

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET



Uroš Paunković

STOHAСТИČKA KONTROLA OPTIMALNE
DEKUMULACIJE UZ PRISUSTVO
MORTALITETNOG RIZIKA

master rad

Beograd, 2026.

Mentor:

doc. dr Ana Merke

Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

doc. dr Bojana Todić

Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

doc. dr Milica Karapetrović

Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

Datum odbrane: _____

Naslov master rada: Stohastička kontrola optimalne dekulacije uz prisustvo mortalitetnog rizika

Rezime: U ovom radu razmatramo problem optimalnog povlačenja novčanih sredstava iz penzijskog fonda u neprekidnom vremenu uz eksplicitno prisustvo mortalitetnog rizika. Problem formulišemo kao zadatak stohastičke optimalne kontrole u kome se dinamika kapitala opisuje geometrijskim Braunovim kretanjem, a životni vek penzionera modeliramo kao slučajno vreme sa stopom mortaliteteta zdatom Gomperc-Makehamovim modelom. Za vrednosnu funkciju izvodimo Hamilton-Jakobi-Belmanovu jednačinu i dokazujemo verifikacionu teoremu. U opštem slučaju gubitka regularnosti vrednosnu funkciju karakterišemo kao jedinstveno viskozno rešenje odgovarajuće parcijalne diferencijalne jednačine. Za numeričko rešavanje razmatramo i upoređujemo dve metode: klasičnu metodu konačnih razlika i savremenu metodu zasnovanu na neuronskim mrežama (deep BSDE pristup). Obe metode implementirane su programski, a parametri modela ocenjeni su na osnovu javno dostupnih tablica mortaliteta. Rad je zaključen analizom osetljivosti optimalne strategije povlačenja i formulacijom praktičnih preporuka za različite profile rizične averzije.

Ključne reči: stohastička optimalna kontrola, Hamilton-Jakobi-Belmanova jednačina, mortalitetni rizik, penzijski fond, dekulacija, viskozna rešenja, duboko učenje, BSDE, Gomperc-Makehamov model, CRRA korisnost, dinamičko programiranje, Mertonov problem

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Motivacija i kontekst	1
1.2	Pregled literature	2
1.3	Rezultati rada i struktura	3
2	Deterministička optimalna kontrola	5
2.1	Kontrolisani dinamički sistemi	5
2.2	Hamilton-Jakobijeva jednačina	6
2.3	Linearno-kvadratni regulator	7
3	Elementi stohastičke analize	10
3.1	Filtracije, procesi i trenuci zaustavljanja	10
3.2	Stohastički integral i Itoova formula	14
3.3	Stohastičke diferencijalne jednačine	17
4	Formulacija problema i HJB jednačina	20
4.1	Penzijska dekumulacija kao stohastička optimalna kontrola	20
4.2	Dinamički princip programiranja	24
4.3	Hamilton-Jakobi-Belmanova jednačina	26
4.4	Verifikaciona teorema	29
4.5	Eksplisitno rešenje uz CRRA korisnost	32
5	Viskozna rešenja i slobodni granični problemi	35
5.1	Motivacija: gubitak regularnosti vrednosne funkcije	35
5.2	Definicija viskoznih rešenja	36
5.3	Vrednosna funkcija kao viskozno rešenje HJB jednačine	37
5.4	Princip poređenja i jedinstvenost	38
5.5	Slobodni granični problem: optimalna zona i zona bankrota	39

6	Numeričke metode za HJB jednačinu	41
6.1	Prokletstvo dimenzionalnosti i diskretizacija	41
6.2	Metoda konačnih razlika	42
6.3	Metoda zasnovana na neuronskim mrežama	44
6.4	Poređenje metoda	47
7	Implementacija i numerički eksperimenti	48
7.1	Opis i analiza podataka	48
7.2	Tehnički stek i arhitektura koda	52
7.3	Uklapanje podataka u model mortaliteta	52
7.4	Tržišni parametri	55
7.5	Implementacija metode konačnih razlika	56
7.6	Implementacija metode neuronskih mreža	62
8	Rezultati i finansijska interpretacija	68
8.1	Optimalna strategija povlačenja	68
8.2	Uticaj mortalitetnog rizika	69
8.3	Analiza osetljivosti	70
8.4	Komentarisanje tržišnih parametara	72
8.5	Ograničenja modela i pravci za unapređenje	73
9	Zaključak	75
9.1	Rezime doprinosa	75
9.2	Ključni nalazi	76
9.3	Dalji pravci istraživanja	77
	Bibliografija	78

Glava 1

Uvod

1.1 Motivacija i kontekst

Problem optimalne dekumulacije penzijskog fonda — kako racionalno trošiti akumulirana sredstva tokom penzije — nobelovac Vilijam Šarp (engl. *William Sharpe*) opisao je kao „najgori i najteži problem u finansijama” [5]. Ova karakterizacija nije preterana: za razliku od faze akumulacije, gde investitor maksimizuje dugoročni prinos, penzioner mora da reši nekoliko međusobno suprotstavljenih problema.

S jedne strane, penzioner želi da održi dovoljno visok životni standard tokom čitavog perioda penzije. S druge strane, suočen je sa *rizikom od predugog života* — mogućnošću da nadživi sopstvena akumulirana sredstva. Ovaj rizik poprima karakter sistemskog izazova u kontekstu demografskog starenja stanovniša: prema podacima Human Mortality Database [9], očekivani životni vek pri rođenju porastao je u Srbiji sa oko 65 godina (muški) i 70 godina (ženski) u 1960. godini na 73, odnosno 78 godina u 2022. godini. Istovremeno, tranzicija penzijskih sistema sa modela definisanih primanja ka modelu definisanih doprinosa prenosi teret optimalnog upravljanja sredstvima sa institucija na same penzionere.

Matematički prirodan okvir za analizu ovog problema je teorija *stohastičke optimalne kontrole u neprekidnom vremenu*: penzioner bira dinamičku strategiju povlačenja sredstava koja maksimizuje ukupnu diskontovanu korisnost od potrošnje, uzimajući u obzir stohastičke prinose na tržištu kapitala i neizvesnost životnog veka. Ovaj pristup, zasnovan na *Hamilton-Jakobi-Belmanovoj (HJB) jednačini*, je tema monografije Fama (fr. *Huyên Pham*, [11]) koja služi kao teorijska osnova ovog rada.

Predznanja

Rad pretpostavlja da je čitalac upoznat sa sledećim oblastima matematike, kao i drugim oblastima koje nisu pomenute a dovode se u vezu sa ovim radom, koje se koriste kao poznate i nisu posebno izlagane:

- *teorija verovatnoće i slučajni procesi*: prostori verovatnoće, slučajne veličine, raspodele, uslovno očekivanje, konvergencija nizova slučajnih veličina;
- *teorija mere i integracije*: σ -algebre, merljive funkcije, Lebegov integral, teoreme konvergencije;
- *funkcionalna analiza*: normirani i Banahovi prostori, L^p prostori, linearni funkcionali;
- *diferencijalne jednačine*: klasična teorija običnih diferencijalnih jednačina (egzistencija, jedinstvenost, stabilnost), osnove teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina;
- *matematička analiza*: analiza više promenljivih (engl. *multivariable calculus*), teorija uniformne konvergencije, kompaktnost.

Čitalac koji nije upoznat sa ovim oblastima upućuje se na standardne udžbenike, a izemđu ostalog na [11] za stohastičku analizu i [4] za teoriju diferencijalnih jednačina i optimalne kontrole.

1.2 Pregled literature

Matematičko modeliranje optimalne potrošnje i investicija u neprekidnom vremenu potiče od ranih radova Roberta Mertona (engl. *Robert C. Merton*) iz 1969. i 1971. godine, koji je formulisao i eksplicitno rešio problem alokacije portfolija uz potrošnju za CRRA korisnost. Mertonov model, detaljno izložen u [11], predstavlja polaznu tačku za sve kasnije generalizacije.

Uvođenje mortalitetnog rizika u optimizacioni problem penzijskog planiranja prirodno dovodi do modela sa *slučajnim horizontom*: investicioni period traje sve dok je penzioner živ. Stopa hazarda (stopa mortaliteta), opisana Gompere-Makehamovim modelom [3], transformiše standardnu HJB jednačinu uvođenjem efektivne diskontne stope i izvornog člana koji oslikava korisnost od nasledstva.

Na strani numeričkih metoda, Kušner i Dupu (engl. *Kushner, Dupuis*, [10]) razvili su teoriju aproksimacije stohastičkih kontrolnih problema Markovljevih procesima, koja garantuje konvergenciju metode konačnih razlika ka viskoznom rešenju HJB jednačine. Forsajt i saradnici u nizu radova [7, 5] sistematski primenjuju ove metode na problem penzijske dekulacije, analizirajući različite kriterijume optimizacije i ograničenja za povlačenja sredstava.

Prvi veliki korak u numeričkom rešavanju HJB jednačina u većim dimenzijama načinili su Han, Jencen i E (engl. *Han, Jentzen, E*, [8]), koji su 2018. godine predložili aproksimaciju vrednosne funkcije dubokim neuronskim mrežama. Ovaj pristup, zasnovan na reformulaciji HJB jednačine kao inverzne stohastičke diferencijalne jednačine (engl. *backward stochastic differential equation*; BSDE), otvorio je nove mogućnosti za rešavanje višedimenzionih problema koji su bili van mogućnosti klasičnih numeričkih metoda. Čen, Širazi, Forsajt i Li (engl. *Chen, Shirazi, Forsyth, Li*, [1]) primenili su ove ideje direktno na problem dekulacije, poredivši pristup baziran na neuronskim mrežama sa klasičnim dinamičkim programiranjem.

1.3 Rezultati rada i struktura

Doprinosi i rezultati rada

Ovaj rad daje sledeće doprinose i rezultate:

- (i) *teorijski*: stroga formulacija problema optimalne dekulacije kao stohastičke optimalne kontrole sa slučajnim horizontom zadatim Gomperc-Makehamovim modelom mortaliteta, izvođenje HJB jednačine, dokaz verifikacione teoreme i karakterizacija vrednosne funkcije kao jedinstvenog viskoznog rešenja;
- (ii) *numerički*: sistematsko poređenje dva numerička pristupa — ODJ redukcije zasnovane na CRRA korisnosti i metode neuronskih mreža sa nadgledanim učenjem — uz beleženje numeričkih poteškoća i njihovih rešenja;
- (iii) *empirijski*: uklapanje podataka u Gomperc-Makehamov model na srpskim mortalitetnim tablicama (Human Mortality Database i Republički zavod za statistiku Srbije, 2022. godina) sa verifikacijom konzistentnosti između oba izvora;

- (iv) *finansijski*: kvantifikacija uticaja mortalitetnog rizika na optimalnu strategiju povlačenja — penzioner koji ignoriše mortalitetni rizik sistematski troši premalo, a greška raste sa starenjem do 6.3 procentna poena na 85 godina.

Struktura rada

Rad je organizovan na sledeći način:

poglavlje 2 uvodi determinističku optimalnu kontrolu, Hamilton-Jakobijevu jednačinu i linearno-kvadratni regulator kao deterministički prethodnik stohastičkog slučaja;

poglavlje 3 razvija elemente stohastičke analize: filtracije, Braunovo kretanje, Itoovu formulu, stohastičke diferencijalne jednačine i Fejnman-Kačevu reprezentaciju;

poglavlje 4 je centralno poglavlje rada: formulisali smo problem dekulacije, izveli HJB jednačinu sa mortalitetnim rizikom, dokazali verifikacionu teoremu i konstruisali eksplicitno rešenje za CRRA korisnost;

poglavlje 5 razvija teoriju viskoznih rešenja koja omogućava analizu HJB jednačine bez pretpostavke o glatkosti vrednosne funkcije, i analizira slobodni granični problem koji se javlja u prisustvu ograničenja za povlačenja sredstava;

poglavlje 6 opisuje dve numeričke metode za rešavanje HJB jednačine: metodu konačnih razlika i metodu zasnovanu na neuronskim mrežama;

poglavlje 7 prikazuje konkretnu implementaciju u programskom jeziku Pajthon, uključujući razvoj mortalitetnog modela nad srpskim podacima i uočavanje numeričkih poteškoća sa kojima smo se susreli;

poglavlje 8 prezentuje i finansijski interpretira rezultate: optimalnu strategiju povlačenja, uticaj mortalitetnog rizika i analizu osetljivosti na ključne parametre;

poglavlje 9 sumira doprinose rada i predlaže pravce za buduća istraživanja.

Glava 2

Deterministička optimalna kontrola

U ovom poglavlju izlažemo osnove *determinističke* optimalne kontrole u neprekidnom vremenu. Cilj je da se uvede intuicija i pojmovi koji će biti neophodni za razumevanje stohastičkog slučaja u poglavljima koja slede. Specijalno, Hamilton-Jakobijeva jednačina iz ovog poglavlja je deterministička verzija Hamilton-Jakobi-Belmanove jednačine iz poglavlja 4.

2.1 Kontrolisani dinamički sistemi

Formulacija problema

Posmatramo deterministički dinamički sistem čije se stanje u trenutku t opisuje vektorom $x(t) \in \mathbb{R}^n$, a čija je promena određena *kontrolom* (*kontrolnom funkcijom*) $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ preko jednačine stanja:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), c(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

gde je $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ data *funkcija dinamike*. Pretpostavljamo da je f neprekidna i da zadovoljava Lipšicov uslov po x , uniformno po (t, c) , za $c \in \mathcal{C}$, gde je $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^m$ skup kontrolnog ograničenja, što garantuje egzistenciju i jedinstvenost rešenja (2.1) za svaku dopustivu kontrolu.

Kontrolu $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ nazivamo *dopustivom* (engl. *admissible*) ako je merljiva i ako je $c(t) \in \mathcal{C}$ za skoro sve $t \in [0, T]$. Skup svih dopustivih kontrola označavamo sa $\mathcal{A}$.

Cilj je da se odabere kontrola $c \in \mathcal{A}$ koja maksimizuje funkcional:

$$J_{t_0, x}(c) = \int_{t_0}^T \ell(t, x(t), c(t)) \, dt + \Phi(x(T)), \quad (2.2)$$

gde je $\ell : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ trenutni dobitak i $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nagrada (dobitak) na kraju perioda posmatranja (isplata sredstava na kraju perioda). Vrednosna funkcija problema je:

$$V(t, x) = \sup_{c \in \mathcal{A}} J_{t,x}(c), \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad (2.3)$$

gde $J_{t,x}$ označava funkcional (2.2) za trajektoriju stanja sa početnom tačkom x u početnom trenutku t .

Definicija 2.1 (Optimalni par). Kažemo da je par (x^*, c^*) , gde je $c^* \in \mathcal{A}$ dopustiva kontrola i x^* odgovarajuće rešenje jednačine stanja (2.1), *optimalni par* za problem (2.1)–(2.2) ako važi da je:

$$J_{t,x^*(t)}(c^*) = V(t, x^*(t)), \quad \text{za sve } t \in [t_0, T].$$

Kontrolu c^* nazivamo *optimalnom kontrolom*, a trajektoriju $x^* = x^*(t)$ *optimalnom trajektorijom*.

Napomena 2.2. Analogija sa stohastičkim slučajem je u potpunosti jasna: jednačina stanja (2.1) odgovara SDJ (4.2), funkcional (2.2) odgovara objektivnoj funkciji (4.8) (bez očekivanja), a vrednosna funkcija (2.3) odgovara funkciji (4.9). Jedina razlika je odsustvo slučajnosti — ovde su sve trajektorije poznate samim izborom kontrole c .

2.2 Hamilton-Jakobijeva jednačina

Deterministički princip programiranja

Kao i u stohastičkom slučaju, osnova analize je *princip programiranja* Ričarda Belmana (engl. *Richard E. Bellman*): optimizacija na celom horizontu $[t, T]$ može da se razloži na lokalnu optimizaciju na $[t, t+h]$ i optimizaciju od $t+h$ pa nadalje:

$$V(t, x) = \sup_{c \in \mathcal{A}} \left(\int_t^{t+h} \ell(s, x(s), c(s)) \, ds + V(t+h, x(t+h)) \right) + o(h), \quad h \rightarrow 0^+. \quad (2.4)$$

Pretpostavljajući da je $V \in C^{1,2}$ i puštajući da $h \rightarrow 0$, iz (2.4) direktno se dobija *Hamilton-Jakobijeva (HJ) jednačina* [4, 11]:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sup_{c(t) \in \mathcal{C}} \left(\ell(t, x, c(t)) + f(t, x, c(t)) \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \right) = 0,} \quad (2.5)$$

sa graničnim uslovom $V(T, x) = \Phi(x)$. Definišemo *Hamiltonijan* sistema:

$$\mathcal{H}(t, x, p) = \sup_{c(t) \in \mathcal{C}} (\ell(t, x, c(t)) + f(t, x, c(t)) \cdot p), \quad (2.6)$$

gde $p = \frac{\partial V}{\partial x}$ ima ulogu *koadjungovane promenljive* (engl. *costate variable*) ili „*dualna vrednost*” (*senka cene*, engl. *shadow price*) — ona meri marginalnu (graničnu) vrednost povećanja stanja x za jednu mernu jedinicu. HJ jednačina (2.5) postaje:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \mathcal{H}\left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x}(t, x)\right) = 0. \quad (2.7)$$

Poređenjem sa (4.18) iz poglavlja 4 vidimo da je HJB jednačina tačno HJ jednačina uz dodavanje difuznog člana $\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, koji potiče od kvadratne varijacije Braunovog kretanja.

Hamiltonov kanonski sistem

U klasičnoj mehanici, Vilijem Rowan Hamilton (engl. *William Rowan Hamilton*) i Karl Gustav Jakobi (nem. *Carl Gustav Jacob Jacobi*) razvili su ekvivalentnu formulaciju Njutnove (engl. *Isaac Newton*) mehanike putem kanonskih jednačina. U teoriji optimalne kontrole, analogno, optimalnoj trajektoriji odgovara rešenje *Hamiltonovog kanonskog sistema*:

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(t, x^*(t), p^*(t)), \quad (2.8)$$

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(t, x^*(t), p^*(t)), \quad (2.9)$$

gde je $p^*(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x^*(t))$ koadjungovana promenljiva duž optimalne trajektorije. Jednačine (2.8)–(2.9) zajedno sa uslovom (2.1) i graničnim uslovima $x^*(t_0) = x_0$ i $p^*(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x^*(T))$ formiraju *granični problem dvostruke tačke* koji se numerički rešava *metodom svodenja na početni problem* (ili *pucanja*; engl. *shooting method*).

2.3 Linearno-kvadratni regulator

Formulacija LQR problema

Linearno-kvadratni regulator (LQR) je specijalni slučaj determinističke optimalne kontrole u kome je jednačina stanja linearna po stanju i kontroli; i funkcional zavisi od stanja i kontrole kvadratno. Iako je jednostavan, LQR je od velike važnosti u

teoriji upravljanja (kontrole) jer ima eksplicitno rešenje i služi kao osnova za mnoge numeričke metode [4].

Razmatramo linearni sistem:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)c(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2.10)$$

sa kvadratnim funkcionalom:

$$J(c) = -\frac{1}{2} \int_0^T ((x(t))^\top Q(t)x(t) + (c(t))^\top R(t)c(t)) dt - \frac{1}{2} (x(T))^\top M x(T), \quad (2.11)$$

gde su $A(t)$ i $B(t)$, redom, matrice sistema i upravljanja, $Q(t)$ (pozitivno semidefinitna) i $R(t)$ (pozitivno definitna) matrice težina i M (pozitivno semidefinitna) matrica nagrade na kraju perioda posmatranja.

Rešenje preko Rikatijevih jednačina

Za LQR problem, HJ jednačina (2.7) ima eksplicitno rešenje u kvadratnoj formi:

$$V(t, x) = -\frac{1}{2} x^\top P(t) x, \quad (2.12)$$

gde pozitivno semidefinitna matrica $P(t)$ zadovoljava *Rikatijevu diferencijalnu jednačinu* (fr. *Jacopo Francesco Riccati*):

$$-\dot{P}(t) = (A(t))^\top P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)(R(t))^{-1}(B(t))^\top P(t) + Q(t), \quad P(T) = M. \quad (2.13)$$

Optimalna kontrola *u povratnoj sprezi* je tada:

$$c^*(t) = -(R(t))^{-1}(B(t))^\top P(t)x(t), \quad (2.14)$$

što pokazuje da je optimalna kontrola *linearna funkcija trenutnog stanja* $x(t)$ — osobina koja opravdava korišćenje LQR-a u praktičnim primenama.

Napomena 2.3. Analogija sa našim problemom dekulacije je sledeća:

- Rikatijeva jednačina (2.13) je deterministički slučaj ODJ za φ iz sekcije 4.5 (jednačina (4.38));
- optimalna kontrola je linearna po stanju sistema (2.14) i odgovara optimalnoj stopi povlačenja (4.40) koja je proporcionalna trenutnom kapitalu;
- u oba slučaja, PDJ za vrednosnu funkciju se svodi na ODJ zahvaljujući posebnoj (u kvadratnoj formi, odnosno CRRA) strukturi.

Ova analogija sugerise da su CRRA modeli u finansijama prirodna nelinearna uopštenja LQR-a iz teorije upravljanja.

Pontrjaginov princip maksimuma

Alternativni pristup determinističkoj optimalnoj kontroli predstavlja *Pontrjaginov princip maksimuma* (rus. *Lev Semyonovich Pontryagin*), koji daje *potrebne uslove optimalnosti* bez pretpostavke o glatkosti vrednosne funkcije [11].

Teorema 2.4 (Pontrjaginov princip maksimuma). *Neka je (x^*, c^*) optimalni par za problem (2.1)–(2.2). Tada postoji neprekidna funkcija $p^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (koadjungovana promenljiva) takva da važi:*

- (i) (*Jednačina stanja*) $\dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), c^*(t))$;
- (ii) (*Koadjungovana jednačina*) $\dot{p}^*(t) = - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), c^*(t)) \right)^\top p^*(t) - \frac{\partial \ell}{\partial x}(t, x^*(t), c^*(t))$;
- (iii) (*Uslov maksimuma*)

$$\mathcal{H}(t, x^*(t), p^*(t)) = \ell(t, x^*(t), c^*(t)) + (f(t, x^*(t), c^*(t)))^\top \cdot p^*(t);$$

- (iv) (*Transversalni uslov*) $p^*(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x^*(T))$.

Napomena 2.5. Pontrjaginov princip maksimuma daje potrebne, ali ne i dovoljne uslove optimalnosti. Dovoljnost se dobija pod dodatnim uslovom konkavnosti Hamiltonijana $\mathcal{H}$ po (x, c) , što je ispunjeno u LQR slučaju i u našem modelu dekulacije sa konkavnom *CRRA funkcijom korisnosti*.

Stohastički analog Pontrjaginovog principa maksimuma je *stohastički princip maksimuma*, koji se formuliše pomoću BSDE (engl. *backward stochastic differential equations*) — ovaj pristup detaljno je razvijen u poglavlju 6 monografije Fama [11] i predstavlja alternativu *HJB pristupu* koji koristimo u ovom radu.

Pontrjaginov princip izložen je u većoj dimenziji, dok je Hamilton-Jakobijeva jednačina 2.2 izložena pod pretpostavkom da je sistem (2.1) jednodimenzioni.

Glava 3

Elementi stohastičke analize

U ovom poglavlju izlažemo osnovne pojmove i rezultate stohastičke analize koji su potrebni za formulaciju i analizu problema iz Poglavlja 4. Izlaganje prati strukturu prve glave monografije Fama (fr. *Huyên Pham*, [11]), uz prilagođavanja koja su u skladu sa specifičnošću našeg modela. Čitalac koji je upoznat sa ovim delom teorije može da pređe direktno na poglavlje 4.

3.1 Filtracije, procesi i trenuci zaustavljanja

Verovatnosni prostor sa filtracijom

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kompletan verovatnosni prostor, gde je Ω skup ishoda, $\mathcal{F}$ σ -algebra podskupova od Ω , i $\mathbb{P}$ verovatnosna mera na $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definicija 3.1 (Filtracija, [11]). *Filtracija* na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je rastuća (u smislu inkluzije) familija $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ pod- σ -algebri od $\mathcal{F}$, tj. važi:

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \quad \text{kad god je } 0 \leq s \leq t \leq T.$$

σ -algebra $\mathcal{F}_t$ interpretira se kao skup svih događaja za koje se može utvrditi da li se jesu ili nisu realizovali samo na osnovu informacija dostupnih do trenutka t .

Kažemo da filtracija $\mathbb{F}$ zadovoljava *standardne* (ili *uobičajene*) uslove ako je:

- (i) *desno neprekidna*: važi da je $\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$ za sve $t \in [0, T]$, što znači da dovoljno kratka posmatranja u budućnosti ne donose nikakve nove informacije;
- (ii) *kompletna*: $\mathcal{F}_0$ sadrži sve skupove $\mathbb{P}$ -mere nula iz $\mathcal{F}$.

U nastavku pretpostavljamo da filtracija $\mathbb{F}$ zadovoljava standardne uslove [11, odeljak 1.1].

Definicija 3.2 (Adaptirani i progresivno merljivi procesi). Slučajni proces $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ je:

- (i) *adaptiran* (na $\mathbb{F}$) ako je X_t $\mathcal{F}_t$ -merljiva slučajna veličina za svako $t \in [0, T]$; intuitivno, vrednost X_t (stanje procesa u trenutku t) je u potpunosti poznata samo na osnovu dostupnih informacija do trenutka t (uključujući i trenutak t);
- (ii) *progresivno merljiv* (u odnosu na $\mathbb{F}$) ako je za svako $t \in [0, T]$ preslikavanje $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -merljivo na $[0, t] \times \Omega$.

Napomena 3.3. Svaki progresivno merljiv proces je adaptiran, a svaki neprekidan i adaptiran proces je progresivno merljiv [11, tvđenje 1.1.1]. U literaturi se često pogrešno piše „adaptiran” umesto „progresivno merljiv”, što je opravdano za neprekidne procese, dok u suprotnom ne mora da bude.

Tenuci zaustavljanja

Definicija 3.4 (Trenutak zaustavljanja, [11]). Slučajna veličina (proširena) $\tau : \Omega \rightarrow [0, T] \cup \{+\infty\}$ je *trenutak zaustavljanja* (u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$) ako za svako $t \in [0, T]$ važi:

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Uslov $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ znači da se samo na osnovu informacija dostupnih do trenutka t može utvrditi da li se događaj $\{\tau \leq t\}$ dogodio ili nije (da li je zaustavljanje nastupilo pre ili posle trenutka t).

Trenuci zaustavljanja su najintuitivniji matematički objekti za modeliranje trenutaka prve realizacije nekih događaja. U našem modelu dekulacije, i trenutak bankrota $\tau_b = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \leq 0\}$ i efektivni horizont $\tau = \min\{\tau_d, \tau_b, T\}$ su trenuci zaustavljanja [11, tvđenje 1.1.4].

Tvđenje 3.5 ([11]). *Neka su σ i τ trenuci zaustavljanja. Tada su $\min\{\sigma, \tau\}$, $\max\{\sigma, \tau\}$ i $\sigma + \tau$ takođe trenuci zaustavljanja. Ako je X adaptirani proces koji zadovoljava càd-làg uslov (skoro sve trajektorije neprekidne sa desne strane i skoro sve imaju levu graničnu vrednost u svakoj tački $t > 0$) i $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup, tada je trenutak prvog dostizanja nekog stanja iz $\mathcal{I}$ procesa X :*

$$\sigma_{\mathcal{I}} = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \mathcal{I}\}$$

trenutak zaustavljanja.

Za trenutak zaustavljanja τ definišemo σ -algebru svih informacija dostupnih do trenutka τ :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} | A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in [0, T]\}.$$

Ako je $\tau = t$ skoro svuda, tada je $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$.

Braunovo kretanje

Osnovni deo svih stohastičkih dinamičkih modela u ovom radu je Braunovo kretanje (engl. *Brownian motion*), nazvano po botaničaru Robertu Braunu (engl. *Robert Brown*), koji je 1827. godine opisao nepravilno (haotično) kretanje polena u tečnosti. Matematičku osnovu razvili su Luj Bašelije (fr. *Louis Bachelier*, 1900) i Norbert Viner (engl. *Norbert Wiener*, 1923), zbog čega se ono u literaturi naziva i Viner-Bašelijev proces.

Definicija 3.6 (Braunovo kretanje, [11]). *Jednodimenziono standardno Braunovo kretanje* na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ je neprekidni i adaptirani proces $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ sa vrednostima u $\mathbb{R}$ takav da važi:

- (i) $B_0 = 0$ skoro sigurno;
- (ii) kad god je $0 \leq s < t$, tada je priraštaj $B_t - B_s$ na intervalu $[s, t]$ nezavisan od $\mathcal{F}_s$ i ima $\mathcal{N}(0, t - s)$ raspodelu.

Napomena 3.7. Iz definicije 3.6 direktno sledi da Braunovo kretanje ima *nezavisne priraštaje*: za $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, priraštaji $B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ su međusobno nezavisni. Ovo je osnovna osobina koja omogućava korišćenje diferencijala Braunovog kretanja $\{dB_t\}$ kao modela „čistog” (belog, engl. *white noise*) slučajnog šuma.

Navodimo neke važne osobine Braunovog kretanja koje koristimo u nastavku [11, tvrđenje 1.1.5]:

- (i) *simetrija*: ako je $\{B_t\}$ Braunovo kretanje, tada je i $\{-B_t\}$ Braunovo kretanje;
- (ii) *invarijantnost pri skaliranju*: za svako $\lambda > 0$, proces $\tilde{B}_t = \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t}$ je standardno Braunovo kretanje;
- (iii) *Markovljevo svojstvo*: za svako $s > 0$, proces $\{B_{t+s} - B_s\}_{t \geq 0}$ je standardno Braunovo kretanje nezavisno od $\mathcal{F}_s$.

Martingali i lokalni martingali

Definicija 3.8 (Martingal, [11]). Adaptirani proces $M = \{M_t\}_{t \in [0, T]}$ koji zadovoljava càd-làg uslov i za koji važi da je $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$ za sve t je:

- *supermartingal* ako je $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s$ skoro sigurno kad god je $s \leq t$;
- *submartingal* ako je $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s$ skoro sigurno kad god je $s \leq t$;
- *martingal* ako je istovremeno i supermartingal i submartingal, tj. važi da je $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ skoro sigurno kad god je $s \leq t$.

Klasičan primer martingala je samo Braunovo kretanje: iz nezavisnosti priraštaja sledi da je $\mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s] = B_s$ za $s \leq t$. U dokazu verifikacione teoreme (teorema 4.10) koristimo pojam *lokalnog martingala*:

Definicija 3.9 (Lokalni martingal, [11]). Adaptirani proces M koji zadovoljava càd-làg uslov je *lokalni martingal* ako postoji niz trenutaka zaustavljanja $(\tau_n)_{n \geq 1}$ takav da $\tau_n \nearrow +\infty$ skoro sigurno i takav da je proces $M^{\tau_n} = \{M_{\min\{t, \tau_n\}}\}_{t \geq 0}$ martingal za svako n . Niz (τ_n) naziva se *lokalizujući niz procesa M* , a proces M^{τ_n} *zaustavljeni proces M* .

Napomena 3.10. Svaki martingal je lokalni martingal, ali obrnuto ne važi. U dokazu verifikacione teoreme stohastički integral $\int_t^\cdot e^{-\rho(s-t) - \int_t^s \lambda(u) du} \sigma X_s \frac{\partial w}{\partial x}(s, X_s) dB_s$ je u opštem slučaju samo lokalni martingal. Lokalizujući niz

$$\tau_n = \inf \left\{ s \geq t \mid \int_t^s e^{-2\rho(u-t) - 2 \int_t^u \lambda(a) da} \sigma^2 X_u^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 du \geq n \right\},$$

osigurava da zaustavljeni stohastički integral postane „pravi” martingal sa očekivanjem 0 (lokalno), što je ključan tehnički korak u dokazu [11, odeljak 3.5].

Navodimo dve važne teoreme o martingalima koje koristimo:

Teorema 3.11 (Teorema uzorkovanja, [11]). *Neka je $M = \{M_t\}_{t \in [0, T]}$ martingal i neka su σ i τ , $\sigma \leq \tau$, dva trenutka zaustavljanja, gde je τ ograničen ($\tau \leq T$). Tada je:*

$$\mathbb{E}[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = M_\sigma \quad \text{skoro sigurno.}$$

Teorema 3.12 (Dubova nejednakost, [11]). *Neka je $M = \{M_t\}_{t \in [0, T]}$ martingal. Tada za svako $p > 1$, važi:*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[|M_T|^p].$$

Ova nejednakost nazvana po Džozefu Dubu (engl. *Joseph L. Doob*) je osnovno sredstvo za ograničavanje momenata slučajnih procesa i koristi se u dokazima za ograničavanje momenata rešenja SDJ u sledećoj sekciji.

3.2 Stohastički integral i Itoova formula

Kvadratna varijacija i semimartingali

Pre uvođenja stohastičkog integrala, potreban nam je pojam *kvadratne varijacije* lokalnog martingala.

Teorema 3.13 (Kvadratna varijacija, [11]). *Neka su M i N dva neprekidna lokalna martingala. Tada postoji jedinstven adaptiran proces sa konačnom varijacijom, označen sa $\langle M, N \rangle$, za koji je $\langle M, N \rangle_0 = 0$, takav da je $MN - \langle M, N \rangle$ lokalni martingal. Ovaj proces naziva se kvadratna varijacija (ugaona zagrada, engl. *bracket*) procesa M i N , i za njega važi:*

$$\langle M, N \rangle_t = \lim_{\nu \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n (M_{t_{k+1}} - M_{t_k})(N_{t_{k+1}} - N_{t_k}),$$

gde je limes uzet u verovatnoći, po podelama $\Pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ segmenta $[0, t]$ kada parametar $\nu = \nu(\Pi_n) := \max\{t_{k+1} - t_k | 0 \leq k \leq n\} \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$. Za Braunovo kretanje B važi: $\langle B, B \rangle_t = t$.

Definicija 3.14 (Semimartingal, [11]). *Neprekidan i adaptiran proces X je (neprekidan) semimartingal ako se na jedinstven način može predstaviti kao:*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

gde je M neprekidan lokalni martingal za koji je $M_0 = 0$, a A neprekidan i adaptiran proces sa konačnom varijacijom za koji je $A_0 = 0$.

Za „proces kvadratne varijacije semimartingala X ” važi: $\langle X, X \rangle = \langle M, M \rangle$. Procesi kapitala koji se javljaju u modelima dekulacije su semimartingali: u dinamičkom sistemu sa jednačinom (4.2) „deterministički” deo $(\mu X_t - c_t) dt$ odgovara procesu sa konačnom varijacijom A , dok stohastički deo $\sigma X_t dB_t$ odgovara lokalnom martingalu M .

Itoov stohastički integral

Klasični Riman-Stiltjesov integral ne može da se primeni na trajektorije Braunovog kretanja jer one skoro sve imaju beskonačnu (totalnu) varijaciju. Stohastički integral po trajektoriji Braunovog kretanja uveo je Kijoši Ito (jap. *Kiyosi Itô*, 1944) kao graničnu vrednost Rimanovih suma u L^2 , koristeći kvadratnu varijaciju [11, odeljak 1.2].

Definicija 3.15 (Itoov stohastički integral, [11]). Neka je B jednodimenziono (standardno) Braunovo kretanje i $\alpha = \{\alpha_t\}_{t \in [0, T]}$ progresivno merljiv proces takav da je:

$$\int_0^t \alpha_s^2 ds < +\infty \quad \text{skoro sigurno,} \quad \forall t \in [0, T].$$

Itoov stohastički integral procesa α po B definiše se kao (jedinstven) neprekidan lokalni martingal u oznaci $\int_0^\cdot \alpha_s dB_s$ takav da za svaki neprekidan lokalni martingal N važi:

$$\left\langle \int_0^\cdot \alpha_s dB_s, N \right\rangle_t = \int_0^t \alpha_s d\langle B, N \rangle_s = \int_0^t \alpha_s ds.$$

Ako je dodatno $\mathbb{E} \left[\int_0^T \alpha_s^2 ds \right] < +\infty$, integral je martingal i važi *Itoova izometrija*:

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \alpha_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \alpha_s^2 ds \right]. \quad (3.1)$$

Ova relacija je osnovna i koristi se za procenu L^2 -normi kod rešenja SDJ.

Itoova formula

Itoova formula je suštinski *smena promenljive* za stohastičke integrale — analogna smeni promenljive u klasičnoj analizi, uz korektivni član koji dolazi od kvadratne varijacije Braunovog kretanja jer ona nije identički 0.

Teorema 3.16 (Itoova formula, [11]). Neka je X jednodimenzioni Itoov proces, tj. važi:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

ili, ekvivalentnim diferencijalnim zapisom:

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t,$$

gde su b i σ progresivno merljivi procesi. Neka je $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$. Tada je $\{f(t, X_t)\}_{t \in [0, T]}$ semimartingal i važi:

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s, \end{aligned} \quad (3.2)$$

što se, koristeći $d\langle X, X \rangle_s = \sigma_s^2 ds$, može zapisati u diferencijalnom obliku:

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma_t^2 dt. \quad (3.3)$$

Napomena 3.17. Ključna razlika u odnosu na klasičnu smenu promenljive je poslednji sabirak $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma_t^2 dt$, koji se naziva *Itoov korektivni član*. On dolazi od kvadratne varijacije Braunovog kretanja: $\langle B, B \rangle_t = t$, tj. $(dB_t)^2 = dt$ intuitivno. U klasičnoj analizi, gde su skoro sve trajektorije glatke, kvadratna varijacija je identički 0 i korektivni član se gubi.

Primer 3.18. Primenimo Itoovu formulu na $f(t, x) = e^{-\rho t} V(t, x)$ i proces $X := X^{t_0, x_0}$ koji zadovoljava SDJ (4.2). Dobijamo:

$$\begin{aligned} d[e^{-\rho s} V(s, X_s)] &= e^{-\rho s} \left[-\rho V + \frac{\partial V}{\partial t} + (\mu X_s - c_s) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 X_s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] ds \\ &\quad + e^{-\rho s} \sigma X_s \frac{\partial V}{\partial x} dB_s, \end{aligned}$$

što je tačno reprezentacija (4.13) koju smo koristili u izvođenju HJB jednačine u sekciji 4.3.

Napomena 3.19. Oznaka X^{t_0, x_0} znači da je $X_{t_0} = x_0$ skoro sigurno. U nastavku, kada je početno stanje jasno iz konteksta, oznaka X^{t_0, x_0} se skraćuje sa X .

Formula množenja

Specijalan slučaj Itoove formule koji se često koristi je *formula za proizvod* dva semimartingala:

Posledica 3.20 (Formula množenja, [11]). *Neka su X i Y dva neprekidna semimartingala. Tada je:*

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t. \quad (3.4)$$

Ova formula primenjena na $X_t = \varepsilon(t_0, t)$ i $Y_t = V(t, X_t^{t_0, x_0})$ daje razlaganje koje koristimo u dokazu verifikacione teoreme 4.10.

3.3 Stohastičke diferencijalne jednačine

Stroga rešenja SDJ

Stohastička diferencijalna jednačina (SDJ) je jednačina oblika:

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \quad X_{t_0} = x_0, \quad (3.5)$$

gde su $b : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (*funkcija drifta*) i $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (*funkcija difuzije; ili difuzija*) date funkcije, a B jednodimenziono Braunovo kretanje.

Definicija 3.21 (Strogo rešenje SDJ, [11]). *Strogo rešenje* SDJ (3.5) na datom verovatnosnom prostoru sa filtracijom $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, gde je $\mathbb{F}$ prirodna filtracija datog Braunovog kretanja B je progresivno merljiv i neprekidan proces $X = \{X_t\}_{t \in [t_0, T]}$ takav da je:

$$\int_{t_0}^t |b(s, X_s)| ds + \int_{t_0}^t (\sigma(s, X_s))^2 ds < +\infty \quad \text{skoro sigurno,}$$

za sve $t \in [t_0, T]$ i važi:

$$X_t = x_0 + \int_{t_0}^t b(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s) dB_s \quad \text{skoro sigurno,}$$

za sve $t \in [t_0, T]$.

Napomena 3.22. Razlika između *strogog* i *običnog* rešenja SDJ je u tome što strogo rešenje mora biti adaptirano na na datu prirodnu filtraciju Braunovog kretanja B , dok obično rešenje dozvoljava da se i verovatnosni prostor sa filtracijom i Braunovo kretanje biraju u zavisnosti od rešenja. U teoriji stohastičke kontrole i u ovom radu, uvek radimo sa strogim rešenjima [11, odeljak 1.3].

Egzistencija i jedinstvenost strogog rešenja

Uslovi koji garantuju egzistenciju i jedinstvenost strogog rešenja SDJ su *Lipšicov uslov* i *uslov linearnog rasta*. Prvi uslov nazvan je po matematičaru Rudolfu Lipšicu (nem. *Rudolf Otto Sigismund Lipschitz*).

Teorema 3.23 (Egzistencija i jedinstvenost, [11]). *Pretpostavimo da postoji konstanta $K > 0$ takva da za sve $t \in [0, T]$ i $x, y \in \mathbb{R}$ važi:*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y| \quad (\text{Lipšicov uslov}), \quad (3.6)$$

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|) \quad (\text{uslov linearnog rasta}). \quad (3.7)$$

Tada za svako $x_0 \in \mathbb{R}$ i $t_0 \geq 0$ postoji jedinstveno strogo rešenje X^{t_0, x_0} SDJ (3.5) (čije je stanje u početnom trenutku t_0 jednako x_0). Dodatno, postoji konstanta $C_T > 0$ (može da zavisi samo od T) takva da važi:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [t_0, T]} |X_s^{t_0, x_0}|^2 \right] \leq C_T (1 + |x_0|^2). \quad (3.8)$$

Primer 3.24. SDJ kapitala (4.2) iz našeg modela:

$$dX_t = (\mu X_t - c_t) dt + \sigma X_t dB_t$$

zadovoljava Lipšicov uslov i uslov linearnog rasta po x (za fiksiranu kontrolu c), pa teorema 3.23 garantuje egzistenciju i jedinstvenost strogog rešenja za svako početno stanje $x_0 > 0$. Implicitno rešenje dobija se primenom Itoove formule na $\ln(X_t)$:

$$X_t = x_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0) + \sigma (B_t - B_{t_0}) - \int_{t_0}^t \frac{c_s}{X_s} ds \right), \quad (3.9)$$

što potvrđuje da je $X_t > 0$ skoro sigurno sve dok integral $\int_{t_0}^t \frac{c_s}{X_s} ds$ ostaje konačan, tj. sve dok bankrot $\tau_b = \inf\{t | X_t = 0\}$ nije nastupio.

Napomena 3.25. Formula (3.9) je *implicitno* rešenje SDJ kapitala jer se X_s pojavljuje i pod integralom u formi $\frac{c_s}{X_s}$ sa desne strane. Eksponecijalni oblik garantuje da je $X_t > 0$ skoro sigurno (integral divergira kada $X_s \rightarrow 0^+$, sprečavajući bankrot u konačnom vremenu), ali rešenje nema zatvorenu formu za opštu kontrolu c .

Markovljevo svojstvo difuzije

Strogo rešenje SDJ (3.5) sa determinističkim koeficijentima $b(t, x)$ i $\sigma(t, x)$ ima *Markovljevo svojstvo difuzije*: za svako $s \geq t_0$, za sve $\theta \in [t_0, s]$ i svaku ograničenu Borelovu funkciju g važi:

$$\mathbb{E}[g(X_s^{t_0, x_0}) | \mathcal{F}_\theta] = \varphi_s(\theta, X_\theta^{t_0, x_0}) \quad \text{skoro sigurno}, \quad (3.10)$$

gde je $\varphi_s(\theta, x) = \mathbb{E}[g(X_s^{\theta, x})]$. Ovo je napreciznija formalizacija iskaza da „budućnost procesa zavisi od prošlosti samo preko trenutnog stanja” — osobina koja opravdava formulaciju vrednosne funkcije V u sekciji 4.1 [11, odeljak 1.3].

Markovljevo svojstvo difuzije takođe povlači konzistentnost, odnosno važi:

$$X_s^{t_0, x_0} = X_s^{\theta, X_\theta^{t_0, x_0}} \quad \text{skoro sigurno}, \quad (3.11)$$

što smo koristili u (4.10) pri formulaciji DPP.

Fejnman-Kačeva formula

Fejnman-Kačeva (engl. *Richard Feynman*; rus. *Mark Kac*) formula predstavlja vezu između parcijalnih diferencijalnih jednačina i slučajnih procesa: rešenje određene klase linearnih PDJ može da se predstavi kao očekivanje funkcionala difuzionog procesa. Ovo je analogno analitičkim metodama rešavanja PDJ [11, teorema 1.3.17].

Neka je $X^{t,x}$ strogo rešenje SDJ (3.5) (sa uslovom $X_t = x$) i neka je $\mathcal{L}$ *infinitesimalni generator difuzije*:

$$\mathcal{L}\varphi(t, x) = b(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} (\sigma(t, x))^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, x). \quad (3.12)$$

Teorema 3.26 (Fejnman-Kačeva formula, [11]). *Neka je $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ neprekidna funkcija na $[0, T] \times \mathbb{R}$ i rešenje Košijevog (fr. *Augustin-Louis Cauchy*) problema:*

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \mathcal{L}v(t, x) - r(t, x) v(t, x) + f(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad (3.13)$$

$$v(T, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.14)$$

gde su $r \geq 0$, f i g neprekidne funkcije. Tada je:

$$v(t, x) = \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T e^{-\int_t^s r(u, X_u^{t,x}) du} f(s, X_s^{t,x}) ds + e^{-\int_t^T r(u, X_u^{t,x}) du} g(X_T^{t,x}) \right]. \quad (3.15)$$

Napomena 3.27. Uočimo sličnost između Fejnman-Kačeve reprezentacije (3.15) i objektivne funkcije (4.8) iz našeg problema: struktura je ista, uz efektivnu stopu $r(t) := r(t, x) = \rho + \lambda(t)$ i sabirak $f(t, x) = U(c^*(t, x)) + \lambda(t)L(x)$. Ovo nije slučajnost — HJB jednačina (4.19) je zapravo nelinearna verzija jednačine (3.13), a vrednosna funkcija $V = V(t, x)$, kao njeno rešenje, ima Fejnman-Kačevu reprezentaciju (3.15) za (fiksiranu) optimalnu kontrolu. U slučaju da postoji glatko rešenje HJB jednačine, verifikaciona teorema i Fejnman-Kačeva formula imaju isti rezultat.

Glava 4

Formulacija problema i HJB jednačina

4.1 Penzijska dekululacija kao stohastička optimalna kontrola

Kontekst i motivacija

Tokom radnog veka, učesnik penzijskog plana (zaposleno lice) sa definisanim doprinosima (engl. *defined contribution*, DC) akumulira (nakuplja) kapital koji pri odlasku u penziju čini osnovu za finansiranje sopstvene potrošnje tokom ostatka njegovog života. Faza u kojoj se ova sredstva postepeno troše naziva se *dekululacija* (engl. *decumulation*). Centralni problem dekululacije može se izraziti na sledeći način: kako odrediti optimalnu stopu povlačenja novčanih sredstava i optimalnu alokaciju portfolija penzionera tokom vremena, tako da se obezbedi dovoljno visoka potrošnja i minimizuje rizik od prevremenog iscrpljivanja sredstava (pre kraja života).

Ovaj problem po svojoj prirodi zahteva matematički okvir koji istovremeno uzima u obzir:

- slučajnost prinosa na finansijska sredstva;
- neizvesnost životnog veka penzionera (*mortalitetni rizik*);
- dinamičnost odluka — strategije povlačenja novčanih sredstava i alokacije portfolija mogu da se menjaju u zavisnosti od trenutnog stanja kapitala i proteklog vremena (do tada).

Teorija stohastičke optimalne kontrole u neprekidnom vremenu [11] pruža upravo takav okvir. U nastavku postavljamo kompletan matematički model.

Verovatnosni prostor i filtracija

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kompletan verovatnosni prostor. Na njemu definišemo filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ koja zadovoljava standardne uslove (desna neprekidnost i $\mathcal{F}_0$ sadrži sve skupove mere nula), kao i jednodimenziono Braunovo kretanje $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ adaptirano na $\mathbb{F}$ [11, def. 1.1].

Dinamika kapitala

Označimo sa X_t realni kapital penzionera u trenutku $t \geq 0$, izmereno u stalnim cenama (korigovano za inflaciju, engl. *capital at constant prices*). Pretpostavljamo da penzioner ulaže sva raspoloživa sredstva u jedan rizični fond čija se cena S_t može modelirati geometrijskim Braunovim kretanjem (engl. *geometric Brownian motion*, GBM) kao:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad S_0 > 0, \quad (4.1)$$

gde je $\mu \in \mathbb{R}$ *očekivana stopa prinosa* i $\sigma > 0$ *volatilnost*.

Napomena 4.1. Model (4.1) je standardna pretpostavka u finansijskoj matematici, uvedena u radovima Roberta Mertona (engl. *Robert C. Merton*, [11]) i Pola Samjuelsona (engl. *Paul A. Samuelson*). Realniji modeli uključuju skokove u cenama (engl. *jump-diffusion*), kao u radovima Forsajta i saradnika [7], ali mi ovde počinjemo sa GBM radi jasnoće izlaganja.

Penzioner u svakom trenutku t povlači sredstva po stopi $c_t \geq 0$ (u jedinicama kapitala po jedinici vremena). Ovo je naša *kontrola*. Uz dinamiku cene (4.1) i neprekidna povlačenja, dinamika kapitala opisuje se stohastičkom diferencijalnom jednačinom:

$$dX_t = (\mu X_t - c_t) dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x_0 > 0. \quad (4.2)$$

Ovde pretpostavljamo da je penzioner u potpunosti investiran u rizični fond (bez bezrizičnog dela), što predstavlja pojednostavljenje koje ćemo ukloniti u kasnijim poglavljima. Jednačina (4.2) je linearna SDJ čije je jako rešenje poznato u eksplicitnom obliku [11, posl. 1.1].

Modeliranje mortalitetnog rizika

Životni vek penzionera modeliramo kao pozitivnu slučajnu veličinu τ_d , nezavisnu od Braunovog kretanja B . Pretpostavljamo da τ_d ima apsolutno neprekidnu raspodelu sa stopom hazarda (engl. *hazard rate*, funkcija intenziteta mortaliteta) $\lambda : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, definisanom na sledeći način:

$$\lambda(t) = -\frac{d}{dt} \ln S(t), \quad (4.3)$$

gde je $S(t) = \mathbb{P}\{\tau_d > t\}$ funkcija preživljavanja. Uslovna verovatnoća da penzioner koji je živ u trenutku t ne preživi do trenutka $t+h$ jednaka je $\lambda(t)h + o(h)$, $h \rightarrow 0^+$.

Za konkretan oblik stope hazarda koristimo *Gomperc-Makehamov model*:

$$\lambda(t) = A + B \cdot e^{C \cdot (t_0+t)}, \quad (4.4)$$

gde je t_0 starost penzionera u trenutku odlaska u penziju, a $A, B, C > 0$ su parametri koji se ocenjuju na osnovu aktuarskih tablica mortaliteta. Parametar A (Makehamov član) modelira mortalitet nezavisan od starosti (npr. nezgode; uopšte smrti koje nisu uzrokovane isključivo starošću), dok eksponencijalni deo $B \cdot e^{C \cdot (t_0+t)}$ (Gompercov član) modelira mortalitet uzrokovan starošću.

Ovaj model uveo je Bendžamin Gomperc (engl. *Benjamin Gompertz*, 1825), a kasnije ga je proširio Vilijam Makeham (engl. *William Makeham*, 1860). Danas je standardni model u aktuarskoj matematici [3].

Funkcija preživljavanja u Gomperc-Makehamovom modelu je:

$$S(t) = \exp\left(-At - \frac{B}{C} (e^{C \cdot (t_0+t)} - e^{C \cdot t_0})\right). \quad (4.5)$$

Investicioni horizont i vreme do bankrota

Definišemo dva dodatna trenutka zaustavljanja:

$$\tau_b = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq 0\} \quad (\text{trenutak bankrota}), \quad (4.6)$$

$$\tau = \min\{\tau_d, \tau_b, T\} \quad (\text{efektivni horizont}), \quad (4.7)$$

gde je $T > 0$ fiksirani horizont penzijskog planiranja. Dakle, penzioner prima isplate (prima penziju) sve dok je živ, dok mu akumulirani kapital nije potrošen ili dok nije dostigao trenutak T , u zavisnosti od toga šta prvo nastupi.

Skup dopustivih kontrola

Kontrolu $c = \{c_t\}_{t \in [0, \tau]}$ nazivamo *dopustivom* ako zadovoljava sledeće uslove:

1. c_t je $\mathcal{F}_t$ -merljiva (kontrola je adaptirana na filtraciju) — odluka u trenutku t zavisi samo od informacija dostupnih do tog trenutka;
2. $c_t \in [c_{\min}, c_{\max}]$ za sve t (pa i skoro sve), gde su $c_{\min}$ i $c_{\max}$, $0 \leq c_{\min} < c_{\max} < +\infty$, zakonom propisane minimalna i maksimalna stopa povlačenja sredstava;
3. $\mathbb{E}[\int_0^\tau c_t^2 dt] < +\infty$.

Skup svih dopustivih kontrola označavamo sa $\mathcal{A}$.

U ovom delu rada koristićemo i jedno važno, operativno, tvrđenje:

Tvrđenje 4.2 ([11]). *Neka je $c = \{c_s\}_{s \in [t, \tau]} \in \mathcal{A}$ proizvoljna dopustiva kontrola i neka je $h > 0$ dovoljno malo. Tada postoji dopustiva kontrola $\tilde{c} = \{\tilde{c}_s\}_{s \in [t, \tau]} \in \mathcal{A}$ takva da je:*

$$\tilde{c}_s = c_t \quad \text{za sve } s \in [t, t+h],$$

tj. može se izabrati kontrola $\tilde{c}$ koja je jednaka konstantnoj vrednosti c_t na $[t, t+h]$.

Objektivna funkcija

Cilj penzionera je da maksimizuje očekivanu ukupnu diskontovanu korisnost od potrošnje tokom celog aktivnog perioda (dok povlači sredstva), uz eventualni motiv za ostavljanjem nasleđstva. Objektivna funkcija u tom slučaju je:

$$\begin{aligned} J(t, x; c) = \mathbb{E}_{t,x} & \left[\int_t^\tau e^{-\rho(s-t)} U(c_s) ds \right. \\ & + e^{-\rho(\tau_d-t)} L(X_{\tau_d}) \cdot \mathbb{I}\{\tau_d < \tau_b, \tau_d < T\} \\ & \left. + e^{-\rho(T-t)} L(X_T) \cdot \mathbb{I}\{\tau_d > T, \tau_b > T\} \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

gde je:

- $\rho > 0$ subjektivna diskontna stopa (stopa sopstvene nestrpljivosti penzionera);
- $U : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija korisnosti od potrošnje (pretpostavljamo $U' > 0$, $U'' < 0$);

- $L : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija korisnosti od nasljedstva,
- $\mathbb{E}_{t,x}[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot \mid X_t = x]$ uslovno očekivanje.

Integral u jednačini (4.8) meri ukupnu diskontovanu korisnost od potrošnje tokom aktivnog perioda, dok drugi sabirak nagrađuje preostali kapital u trenutku smrti (za nasljedstvo), ukoliko bankrot nije nastupio pre toga. Treći sabirak nagrađuje preostali kapital X_T u trenutku dostizanja horizonta T , ukoliko je penzioner živ i kapital nije potrošen do tog trenutka.

Vrednosna funkcija problema definiše se kao:

$$V(t, x) = \sup_{c \in \mathcal{A}} J(t, x; c), \quad (t, x) \in [0, T] \times (0, +\infty). \quad (4.9)$$

Napomena 4.3. Formulacija (4.9) je direktno uopštenje klasičnog Mertonovog problema alokacije portfolija [11, Odeljak 3.5], koji odgovara specijalnom slučaju $\lambda \equiv 0$ (ne uzima se u obzir mortalitetni rizik) i $L \equiv 0$ (bez motiva za nasljedstvo). Uvođenje stope hazarda $\lambda(t) > 0$ suštinski menja strukturu problema: investicioni horizont postaje slučajan (prelazi u efektivni), što direktno utiče na oblik HJB jednačine, kao što ćemo videti u sekciji 4.3.

4.2 Dinamički princip programiranja

Markovljeva struktura i redukcija problema

Ključna osobina modela postavljenog u sekciji 4.1 jeste da je proces kapitala $\{X_t\}_{t \geq 0}$, definisan pomoću SDJ (4.2), *Markovljev proces* (rus. *Andrei Andreevich Markov*): buduće ponašanje procesa, uslovljeno trenutnim stanjem $X_t = x$, ne zavisi od prošlosti. Zahvaljujući ovoj osobini, vrednosna funkcija V zaista zavisi samo od t i x , a ne i od istorije procesa do trenutka t [11, odeljak 3.2].

Markovljeva struktura takođe garantuje da za svaki trenutak zaustavljanja $\theta \in \mathcal{T}_{t,\tau}$ (skup trenutaka zaustavljanja sa vrednostima u $[t, \tau]$) važi:

$$X_s^{t,x} = X_s^{\theta, X_\theta^{t,x}}, \quad s \geq \theta, \quad (4.10)$$

što je posledica jedinstvenosti jakog rešenja SDJ (4.2) [11, teorema 1.1].

Iskaz dinamičkog principa programiranja

Dinamički princip programiranja (DPP), koji je formulisao Belman, predstavlja osnovni rezultat teorije optimalne kontrole. Njegova suština je u tome da se globalni optimizacioni problem može svesti (redukovati) na niz lokalnih optimizacionih problema: optimalna strategija povlačenja sredstava u celom horizontu $[t, \tau]$ može se dobiti tako što se prvo traži optimalna strategija u kratkom vremenskom intervalu $[t, \theta]$, a zatim se, polazeći od stanja procesa $X^{t,x}$ u trenutku θ , ponovo rešava isti problem na preostalom delu horizonta [11, odeljak 3.3].

Teorema 4.4 (Dinamički princip programiranja [11, teorema 3.3.1]). *Neka su pretpostavke iz sekcije 4.1 ispunjene. Tada za svako $(t, x) \in [0, T] \times (0, +\infty)$ i svaki trenutak zaustavljanja $\theta \in \mathcal{T}_{t,\tau}$ važi:*

$$V(t, x) = \sup_{c \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^\theta e^{-\rho(s-t)} U(c_s) ds + e^{-\rho(\theta-t)} V(\theta, X_\theta^{t,x}) \right]. \quad (4.11)$$

Napomena 4.5. Jednačina (4.11) važi za bilo koji trenutak zaustavljanja θ između t i τ — ovo je upravo ono što princip čini korisnim. Stavljajući da je $\theta = \tau$, dobijamo originalnu definiciju (4.9) vrednosne funkcije.

Intuicija i interpretacija

Intuitivno, DPP kaže sledeće: ako znamo vrednosnu funkciju $V(\theta, \cdot)$, u nekom budućem trenutku θ , tada možemo da nađemo optimalnu kontrolu (strategiju povlačenja sredstava) na intervalu $[t, \theta]$ kao rešenje problema u konačnom horizontu sa „nagradom” $V(\theta, X_\theta)$ na kraju posmatranog perioda. Ovim se „beskonačno-dimenzioni” problem (nalaženje optimalne trajektorije kontrole) svodi na niz lokalnih optimizacija.

Formalnije, uzimanjem $\theta = t + h$ za malo $h > 0$ u (4.11) dobijamo infinitezimalni oblik DPP-a:

$$V(t, x) = \sup_{c \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{t+h} e^{-\rho(s-t)} U(c_s) ds + e^{-\rho h} V(t+h, X_{t+h}^{t,x}) \right] + o(h), \quad h \rightarrow 0. \quad (4.12)$$

Upravo iz ovog oblika, puštanjem da $h \rightarrow 0$ i primenom Itoove formule, u sledećoj sekciji izvodimo HJB jednačinu (u njenoj kompaktnoj formi).

Posledice za vrednosnu funkciju

Pre nego što pređemo na HJB jednačinu, navedimo dve važne posledice DPP-a koje opisuju kvalitativne osobine vrednosne funkcije V .

Posledica 4.6 ([11]). *Vrednosna funkcija V je neopadajuća po x : za fiksirano t , ako je $x_1 \leq x_2$, tada je $V(t, x_1) \leq V(t, x_2)$.*

Dokaz. Direktna posledica činjenice da za $x_1 \leq x_2$ važi $X_s^{t,x_1} \leq X_s^{t,x_2}$ skoro sigurno, kad god je $s \geq t$ (iz linearnosti SDJ (4.2)), i toga što su funkcije korisnosti U i L neopadajuće. $\square$

Posledica 4.7 ([11]). *Ako su U i L konkavne funkcije, tada je funkcija $V(t, \cdot)$ konkavna (po x) za svako $t \in [0, T]$.*

Napomena 4.8. Konkavnost vrednosne funkcije po x je važna osobina koja će nam olakšati analizu u poglavlju 5: u tom slučaju vrednosna funkcija ima bolju regularnost, što pojednostavljuje primenu teorije viskoznih rešenja.

4.3 Hamilton-Jakobi-Belmanova jednačina

Formalno izvođenje

Hamilton-Jakobi-Belmanova (HJB) jednačina je, suštinski, infinitezimalna verzija DPP-a (jednačina (4.12)): ona opisuje lokalno ponašanje vrednosne funkcije u okolini trenutka t , tj. kada trenutak zaustavljanja θ u (4.11) teži ka t [11, odeljak 3.4].

Pretpostavimo, privremeno, da je vrednosna funkcija $V \in C^{1,2}([0, T] \times (0, +\infty))$, tj. da je jednom neprekidno diferencijabilna po t i dvaput neprekidno diferencijabilna po x . Neka je $c = c_s$ proizvoljna dopustiva kontrola. Tada znamo, na osnovu tvrđenja 4.2, da postoji dopustiva kontrola $\tilde{c} = \tilde{c}_s$ za koju je $\tilde{c}_s = c_t$ na $[t, t+h]$. Uzmimo kontrolu $\tilde{c}$ u infinitezimalnom obliku DPP-a (4.12). Primenom Itoove formule na $s \mapsto e^{-\rho(s-t)}V(s, X_s^{t,x})$ između $s = t$ i $s = t+h$ dobijamo:

$$\begin{aligned} e^{-\rho h}V(t+h, X_{t+h}^{t,x}) &= V(t, x) \\ &+ \int_t^{t+h} e^{-\rho(s-t)} \left(-\rho V + \frac{\partial V}{\partial t} + (\mu x - c_t) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) ds \\ &+ \int_t^{t+h} e^{-\rho(s-t)} \sigma x \frac{\partial V}{\partial x} dB_s. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Uzimanjem očekivanja (stohastički integral je lokalni martingal sa očekivanjem 0), zamenom u (4.12), deljenjem sa h i puštanjem da $h \rightarrow 0$ dobijamo nejednakost za proizvoljnu dopustivu kontrolu c :

$$-\rho V + \frac{\partial V}{\partial t} + (\mu x - c_t) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + U(c_t) \leq 0. \quad (4.14)$$

Pošto (4.14) važi za svaku dopustivu kontrolu, uzimanjem supremuma po $c_t \in [c_{\min}, c_{\max}]$ dobijamo da vrednosna funkcija mora da zadovoljava:

$$-\rho V + \frac{\partial V}{\partial t} + \mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sup_{c_t \in [c_{\min}, c_{\max}]} \left(U(c_t) - c_t \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0. \quad (4.15)$$

Definišemo *Hamiltonijan* problema:

$$\mathcal{H}(x, p) = \sup_{c_t \in [c_{\min}, c_{\max}]} (U(c_t) - c_t \cdot p), \quad p = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (4.16)$$

i *generator difuznog procesa (bez kontrole)*:

$$\mathcal{L}V = \mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (4.17)$$

Sa ovim oznakama, HJB jednačina dobija *kompaktnu formu*:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}V - \rho V + \mathcal{H}\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0, \quad (t, x) \in [0, T) \times (0, +\infty).} \quad (4.18)$$

Uticaј mortalitetnog rizika na HJB jednačinu

Prisutnost mortalitetnog rizika unosi suštinsku modifikaciju u strukturu HJB jednačine u poređenju sa standardnim Mertonovim problemom. Da bismo to videli, uočimo da objektivna funkcija (4.8) može da se rastavi formulom potpunog očekivanja na uslove $\{\tau_d < \tau_b, \tau_d < T\}$ i $\{\tau_d < \tau_b, \tau_d < T\}^C$, a zatim da, koristeći nezavisnost τ_d i Braunovog kretanja B , očekivanje pri prvom uslovu može da se predstavi preko integrala po raspodeli od τ_d (uslovljavanjem samo na $\tau_d = s$), nakon čega se dobija:

$$V(t, x) = \sup_{c \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{\min\{\tau_d, \tau_b, T\}} e^{-\rho(s-t)} U(c_s) \, ds + e^{-\rho(\tau_d-t)} L(X_{\tau_d}) \cdot \mathbf{I}\{\tau_d < \tau_b, \tau_d < T\} \right].$$

Koristeći činjenicu da je $\mathbb{P}\{t \leq \tau_d \leq t+h | \tau_d \geq t\} = \lambda(t)h + o(h)$, $h \rightarrow 0^+$ [11, odeljak 3.5], vrednosna funkcija zadovoljava modifikovanu HJB jednačinu:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}V - (\rho + \lambda(t))V + \mathcal{H}\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \lambda(t) L(x) = 0,} \quad (4.19)$$

za $(t, x) \in [0, T) \times (0, +\infty)$, sa graničnim uslovom:

$$V(T, x) = L(x), \quad x \in (0, +\infty). \quad (4.20)$$

Napomena 4.9. Poređenjem (4.18) i (4.19) vidimo da mortalitetni rizik proizvodi dva efekta:

1. *subjektivna stopa prelazi u (veću) efektivnu diskontnu stopu:* ρ se zamenjuje sa $\rho + \lambda(t)$, tj. , intuitivno, penzioner koji „zna” da može da umre u svakom trenutku manje vrednuje buduću potrošnju — uz sopstvenu stopu nestrpljivosti ρ dodaje se i „stopa izlaska” $\lambda(t)$, odnosno „trenutna verovatnoća smrti po jedinici vremena”;
2. *pojava sabirka $\lambda(t)L(x)$:* u svakom trenutku postoji približna verovatnoća $\lambda(t)h$, za malo h , da penzioner umre i ostavi nasledstvo $L(x)$, što ulazi kao izvorni član u jednačinu (bez činilaca koji su vezani za nepoznatu funkciju V) — govori o tome kako se trenutna verovatnoća smrti i odgovarajuća korisnost od nasledstva zajedno odražavaju na celokupnu okolnost.

U slučaju $\lambda \equiv 0$ i $L \equiv 0$, jednačina (4.19) se svodi na standardnu HJB jednačinu (4.18), čime se potvrđuje konzistentnost modela.

Optimalna kontrola u povratnoj sprezi

Kada se u definiciji Hamiltonijana $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, p)$ u (4.16) supremum dostiže, optimalna kontrola može da se izrazi kao funkcija i od t i id x (važna je pojava zavisnosti od x u ovom slučaju – preko $x = x_t$ zavisi samo od t) — govorimo o *optimalnoj kontroli u povratnoj sprezi* (engl. *optimal feedback control*). Kada se taj supremum dostiže u unutrašnjoj tački, za konkavnu funkciju korisnosti U , uslov prvog reda, tj. uslov $U'(c_t^*) = \frac{\partial V}{\partial x}$, daje:

$$c^*(t, x) := c_t^* = (U')^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \right), \quad (4.21)$$

gde je $(U')^{-1}$ *inverzna funkcija marginalne korisnosti*. Ova veza, poznata u literaturi kao *uslov omotača* (engl. *envelope condition*) [11, odeljak 3.4], pokazuje da je optimalna stopa povlačenja u svakom trenutku određena marginalnom vrednošću korisnosti — tj. koliko penzioner ima koristi od dodatne novčane jedinice kapitala u vrlo kratkom vremenskom intervalu.

Za konkretan oblik CRRA (engl. *constant relative risk aversion*) funkcije korisnosti:

$$U(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad \gamma > 0, \gamma \neq 1, \quad (4.22)$$

gde je γ koeficijent relativne rizične averzije, formula (4.21) daje:

$$c^*(t, x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \right)^{-\frac{1}{\gamma}}. \quad (4.23)$$

EksPLICITNO rešenje HJB jednačine (4.19) uz CRRA korisnost i konstantnu stopu hazarda $\lambda(t) = \lambda$ izvodimo u sekciji 4.5.

4.4 Verifikaciona teorema

Uloga i značaj verifikacione teoreme

Izvođenje HJB jednačine (4.19) u prethodnoj sekciji bilo je *formalno*: pošli smo od pretpostavke da je vrednosna funkcija V dovoljno glatka i iz DPP-a izveli potreban uslov koji V mora da zadovoljava. Međutim, samo iz toga ne znamo ni da li takvo glatko rešenje uopšte postoji, niti da li je ono jedinstveno (ako postoji).

Verifikaciona teorema daje odgovor u obrnutom smeru: ako neka funkcija w zadovoljava HJB jednačinu (4.19) i dovoljno je glatka, tada w mora biti baš vrednosna funkcija V . Kao sporedni rezultat dobijamo i eksplisitu formulu za optimalnu kontrolu u povratnoj sprezi. Dokaz se u potpunosti oslanja na Itoovu formulu [11, teorema 3.5.2].

Iskaz verifikacione teoreme

Teorema 4.10 (Verifikaciona teorema). *Neka je $w \in C^{1,2}([0, T] \times (0, +\infty))$ neprekidna funkcija na $[0, T] \times [0, +\infty)$ koja zadovoljava uslov kvadratnog rasta, tj. postoji konstanta $C > 0$ takva da je:*

$$|w(t, x)| \leq C(1 + x^2), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty). \quad (4.24)$$

(i) (Gornje ograničenje) *Pretpostavimo da w na $[0, T] \times (0, +\infty)$ zadovoljava:*

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{L}w - (\rho + \lambda(t))w + \mathcal{H}\left(x, \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \lambda(t)L(x) \leq 0, \quad (4.25)$$

$$w(T, x) \geq L(x). \quad (4.26)$$

Tada je $w(t, x) \geq V(t, x)$ za sve $(t, x) \in [0, T] \times (0, +\infty)$.

(ii) (Jednakost i optimalnost) *Pretpostavimo dodatno da je $w(T, \cdot) = L(\cdot)$ i da postoji merljiva funkcija $\hat{c} = \hat{c}(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times (0, +\infty)$, sa vrednostima u $[c_{\min}, c_{\max}]$, takva da za Hamiltonijan iz jednačine (4.19) važi:*

$$U(\hat{c}(t, x)) - \hat{c}(t, x) \frac{\partial w}{\partial x}(t, x) = \mathcal{H}\left(x, \frac{\partial w}{\partial x}(t, x)\right), \quad \forall (t, x) \quad (4.27)$$

i da SDJ

$$d\hat{X}_s = (\mu\hat{X}_s - \hat{c}(s, \hat{X}_s)) ds + \sigma\hat{X}_s dB_s, \quad \hat{X}_t = x, \quad (4.28)$$

za svako $(t, x) \in [0, T] \times (0, +\infty)$ ima jedinstveno jako rešenje za koje je $\hat{c}(\cdot, \hat{X}_\cdot) \in \mathcal{A}$. Tada važi da je $w = V$ na $[0, T] \times (0, +\infty)$, i $\hat{c}(\cdot, x)$ je optimalna Markovljeva kontrola za svako x (odluka o povlačenju u trenutku t zavisi samo od trenutnog stanja kapitala x , tj. $\hat{c}(\cdot, x)$ je proces Markova).

Dokaz. (i) Gornje ograničenje. Neka su $(t, x) \in [0, T] \times (0, +\infty)$ i $c \in \mathcal{A}$ proizvoljni, i neka je $X^{t,x}$ odgovarajući proces kapitala. Primenimo Itoovu formulu na $s \mapsto e^{-\rho(s-t) - \int_t^s \lambda(u) du} w(s, X_s^{t,x})$ između $s = t$ i $s = \min\{\tau, \tau_n\}$, gde je (τ_n) niz trenutaka zaustavljanja koji stohastički integral $\left\{ \int_t^u e^{-\rho(s-t) - \int_t^s \lambda(v) dv} \sigma X_s^{t,x} \frac{\partial w}{\partial x}(s, X_s^{t,x}) dB_s \right\}_u$ čini lokalnim martingalom (on postoji jer je stohastički integral zaista lokalni martingal i još dodatno ima očekivanu vrednost 0, kao martingal lokalno). Uvedimo skraćenu oznaku $\varepsilon(t, s) = e^{-\rho(s-t) - \int_t^s \lambda(u) du}$. Tada je:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, \min\{\tau, \tau_n\}) \cdot w\left(\min\{\tau, \tau_n\}, X_{\min\{\tau, \tau_n\}}^{t,x}\right) &= w(t, x) \\ &+ \int_t^{\min\{\tau, \tau_n\}} \varepsilon(t, s) \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{L}w - (\rho + \lambda(s))w + U(c_s) - c_s \frac{\partial w}{\partial x} \right) ds \\ &+ \int_t^{\min\{\tau, \tau_n\}} \varepsilon(t, s) \sigma X_s^{t,x} \frac{\partial w}{\partial x}(s, X_s^{t,x}) dB_s. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Napomena 4.11. Pošto je (τ_n) lokalizujući niz, važi da $\tau_n \nearrow +\infty$ skoro sigurno kada $n \rightarrow \infty$, tj. za skoro svako $\omega \in \Omega$ postoji $N(\omega)$ takvo da za $n \geq N(\omega)$ važi $\tau_n(\omega) \geq \tau(\omega)$, odakle sledi da $\min\{\tau_n, \tau\} \rightarrow \tau$ skoro sigurno kada $n \rightarrow \infty$.

Iz uslova (4.25) i definicije Hamiltonijana (4.16) imamo da važi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{L}w - (\rho + \lambda(s))w + U(c_s) - c_s \frac{\partial w}{\partial x} &\leq \frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{L}w - (\rho + \lambda(s))w + \mathcal{H}\left(x, \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ &\leq -\lambda(s)L(x) \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Prelaskom na očekivanje i puštanjem da $n \rightarrow \infty$ (teorema o dominantnoj konvergenciji koristeći (4.24) i (3.8)) dobijamo da je $w(t, x) \geq J(t, x; c)$. Pošto je $c \in \mathcal{A}$ bila proizvoljna, sledi da je $w(t, x) \geq V(t, x)$.

(ii) *Jednakost.* Primijenimo Itoovu formulu na $s \mapsto \varepsilon(t, s) w(s, \hat{X}_s^{t,x})$, gde je $\{\hat{X}_s\}$ proces iz (4.28), analogno kao malopre, koristeći $c_s = \hat{c}(s, \hat{X}_s)$. Iz uslova (4.27), izraz pod znakom prvog integrala u odgovarajućoj Itoovoj formuli (kao u (4.29)) je jednak $-\varepsilon(t, s)\lambda(s)L(\hat{X}_s)$, pa prelaskom na očekivanje i puštanjem da $n \rightarrow \infty$ (primenom teoreme o dominantnoj konvergenciji koristeći (4.24) i (3.8) i treći sabirak postaje 0); i potom raspisivanjem $\varepsilon(t, \tau)w(\tau, \hat{X}_\tau)$ po slučajevima $\{\tau = \tau_d\}$, $\{\tau = \tau_b\}$ i $\{\tau = T\}$, dobijamo da je $w(t, x) = J(t, x; \hat{c}) \leq V(t, x)$. Kombinovanjem sa (i) sledi da je $w = V$ i da je $\hat{c}$ optimalna kontrola.

Napomena 4.12. Raspisivanjem $\varepsilon(t, \tau)w(\tau, \hat{X}_\tau)$ po slučajevima za $\tau = \min\{\tau_d, \tau_b, T\}$:

- (i) $\tau = \tau_d < \tau_b$, $\tau_d < T$: prirodna smrt pre bankrota i kraja, pa je $w(\tau_d, \hat{X}_{\tau_d}) = L(\hat{X}_{\tau_d})$ (na osnovu iskaza);
- (ii) $\tau = \tau_b \leq \tau_d$, $\tau_b < T$: bankrot, pa je $w(\tau_b, 0) = 0$;
- (iii) $\tau = T$, $\tau_d > T$, $\tau_b > T$: preživljavanje do kraja (do T), pa je $w(T, \hat{X}_T) = L(\hat{X}_T)$ (na osnovu iskaza).

Kombinovanjem sa integralom $\int_t^\tau \varepsilon(t, s) \lambda(s) L(\hat{X}_s) ds$ dobija se tačno izraz za $J(t, x; \hat{c})$ iz (4.8), modifikovan uticajem mortaliteta (suština je u tome kako stopa hazarda povezuje integrale sa slučajevima – kada razdvojimo kao kod ispitivanja uticaja mortalitetnog rizika na HJB jednačinu (4.18), [11, odeljak 3.5]).

□

Ograničenja klasičnog pristupa

Verifikaciona teorema je ključni rezultat, ali ima veliku pretpostavku: $w \in C^{1,2}$, tj. glatkost rešenja HJB jednačine. U praksi, ova pretpostavka češće nije ispunjena nego što jeste; i to u slučajevima kada:

- postoje ograničenja kapitala ($X \geq 0$) ili ograničenja kontrole (tada regularnost vrednosne funkcije može da se poremeti na granici oblasti);
- se u prisustvu ograničenja javljaju *slobodni granični problemi* (npr. minimalna stopa povlačenja $c_s \geq c_{\min}$), koji često dovode do toga da $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ nije neprekidan;

- deo granice na kom je $x = 0$ (bankrot) zahteva posebno razmatranje pri postavljanju graničnog uslova u našem problemu.

Upravo zbog ovih ograničenja, u poglavlju 5 uvodimo pojam *viskoznog rešenja*, koji omogućava detaljniju analizu HJB jednačine (4.19) bez pretpostavke o glatkosti, i za koji verifikaciona teorema ima opštiji oblik.

4.5 Eksplicitno rešenje uz CRRA korisnost

Postavka i pretpostavljanje oblika rešenja

U opštem slučaju, HJB jednačina (4.19) nema analitičko rešenje u zatvorenoj formi. Međutim, za specijalne oblike funkcija korisnosti i pogodan izbor modela mortaliteta, eksplicitno rešenje može da se nađe metodom *pretpostavljanja oblika rešenja* — pretpostavimo oblik rešenja sa nepoznatim parametrima, odgovarajućom smenom svodimo PDJ na ODJ, i rešavamo ODJ analitički. Ovaj pristup ilustrujemo za kombinaciju CRRA korisnosti i konstantne stope hazarda [11, odeljak 3.6.2].

Pretpostavljamo:

- CRRA oblik funkcija korisnosti od potrošnje i nasledstva:

$$U(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad L(x) = k \cdot \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad \gamma > 0, \gamma \neq 1, k \geq 0, \quad (4.31)$$

gde je γ koeficijent relativne rizične averzije, a k parametar koji meri relativni značaj nasledstva u poređenju sa potrošnjom;

- konstantnu stopu hazarda: $\lambda(t) = \lambda > 0$ (eksponencijalna raspodela životnog veka penzionera, specijalni slučaj Gompertz-Makehamovog modela za $B = 0$, $A = \lambda$) — ova pretpostavka je, trenutno, čisto operativne prirode zbog napomene o *stacionarnom rešenju*; sve ostalo važi potpuno analogno i za vremenski promenljivu stopu hazarda.

Pod ovim pretpostavkama tražimo rešenje HJB jednačine (4.19) u obliku:

$$w(t, x) = \varphi(t) \cdot \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad (4.32)$$

gde je $\varphi : [0, T] \rightarrow (0, +\infty)$ nepoznata funkcija, koja ne zavisi od nepoznatih parametara (sme da zavisi samo od vremena).

Izvođenje eksplicitnog rešenja

Računamo parcijalne izvode funkcije (4.32):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varphi'(t) \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi(t) x^{-\gamma}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\gamma \varphi(t) x^{-\gamma-1}. \quad (4.33)$$

Hamiltonijan (4.16) uz CRRA korisnosti i $p = \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi(t) x^{-\gamma}$ daje:

$$\mathcal{H}(x, \varphi(t) x^{-\gamma}) = \sup_{c>0} \left(\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} - c \cdot \varphi(t) x^{-\gamma} \right) = \frac{\gamma}{1-\gamma} (\varphi(t))^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} \cdot \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} \cdot (1-\gamma), \quad (4.34)$$

gde se supremum dostiže u tački:

$$c^*(t, x) = (\varphi(t))^{-\frac{1}{\gamma}} \cdot x. \quad (4.35)$$

Zamenom (4.33) i (4.34) u HJB jednačinu (4.19), i deljenjem sa $\frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} > 0$, dobijamo ODJ za φ :

$$\varphi'(t) + \left(\mu(1-\gamma) - \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)\sigma^2 - (\rho + \lambda) \right) \varphi(t) + \gamma (\varphi(t))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \lambda k = 0, \quad (4.36)$$

sa graničnim uslovom $\varphi(T) = k$ (iz (4.20) i (4.31)).

Uvodimo konstantu:

$$\kappa = \mu(1-\gamma) - \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)\sigma^2 - (\rho + \lambda), \quad (4.37)$$

koja objedinjuje uticaje prinosa tržišta (μ), volatilnosti (σ), subjektivne diskontne stope (ρ) i intenziteta mortaliteta (λ) na optimalnu strategiju povlačenja. ODJ (4.36) tada postaje:

$$\varphi'(t) + \kappa \varphi(t) + \gamma (\varphi(t))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \lambda k = 0, \quad \varphi(T) = k. \quad (4.38)$$

Napomena 4.13. ODJ (4.38) je Bernulijevog tipa (za $\gamma \neq 1$) samo u specijalnom slučaju $k = 0$ (bez motiva za nasleđstvo). Za $k > 0$, aditivni član λk čini jednačinu nehomogenom, pa ona nije čisto Bernulijevog tipa u opštem slučaju.

Napomena 4.14. ODJ (4.38) je nelinearna (za $\gamma \neq 1$) i u opštem slučaju nema rešenje u zatvorenoj formi. Međutim, u (graničnom) slučaju beskonačnog horizonta, tj. kada $T \rightarrow \infty$, i pod uslovom $\kappa < 0$ (što odgovara dovoljno velikoj subjektivnoj diskontnoj stopi), stacionarno rešenje $\varphi(t) = \varphi^*$ postoji i važi:

$$\varphi^* = \left(\frac{\gamma}{-\kappa} \right)^\gamma \quad (\text{za } k = 0), \quad (4.39)$$

što daje eksplicitnu vrednosnu funkciju i optimalnu stopu povlačenja.

Optimalna strategija i finansijska interpretacija

Iz (4.35) vidimo da je optimalna stopa povlačenja proporcionalna trenutnom kapitalu $x(t)$:

$$c^*(t, x) = (\varphi(t))^{-\frac{1}{\gamma}} \cdot x. \quad (4.40)$$

Ovo je strategija *konstantne proporcije kapitala* (engl. *constant proportion*): penzioner uvek povlači isti procenat svog trenutnog kapitala, bez obzira na to koliki je kapital u pitanju. Koeficijent proporcionalnosti $(\varphi(t))^{-\frac{1}{\gamma}}$ menja se vremenom (osim u stacionarnom slučaju), ali ne zavisi od trenutne vrednosti kapitala x .

Napomena 4.15. Poređenje sa Mertonovim rezultatom [11, odeljak 3.6.1]: u standardnom Mertonovom problemu (bez mortaliteta, $\lambda = 0$; i bez nasleđstva, $k = 0$) optimalna stopa potrošnje, odnosno povlačenja, je takođe proporcionalna kapitalu, sa konstantnim koeficijentom $K = (\varphi^*)^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{-\kappa_0}{\gamma}$, gde je:

$$\kappa_0 = \mu(1 - \gamma) - \frac{1}{2}\gamma(1 - \gamma)\sigma^2 - \rho.$$

Uvođenje intenziteta mortaliteta $\lambda > 0$ povećava subjektivnu na efektivnu diskontnu stopu (ρ u $\rho + \lambda$), što smanjuje κ i povećava optimalnu stopu povlačenja — penzioner koji uzima u obzir rizik od smrti u svakom trenutku troši *više* nego penzioner koji ga zanemaruje, jer ovaj „zna” da možda neće doživeti duboku starost. Ovo je ključna finansijska posledica uvođenja mortalitetnog rizika u model.

Za numeričku analizu opšteg slučaja (nekonstantna stopa hazarda, konačan horizont T , ograničenja pri povlačenju) usmeravamo na poglavlje 6, gde razvijamo metode konačnih razlika i dubokog učenja za rešavanje HJB jednačine (4.19).

Glava 5

Rešenja u smislu viskoznosti i slobodni granični problemi

Kao što smo naglasili na kraju sekcije 4.4, klasični pristup putem verifikacione teoreme zahteva pretpostavku $V \in C^{1,2}$ — glatkost vrednosne funkcije. Ova pretpostavka u opštem slučaju nije ispunjena, a njen nedostatak čini klasičan pristup neprimenjivim. Teorija *viskoznih rešenja*, koju su uveli Majkl Krandal (engl. *Michael G. Crandall*) i Pjer-Luj Lion (fr. *Pierre-Louis Lions*) početkom 80-ih godina prošlog veka, pruža matematički okvir koji prevazilazi ovaj problem [2, 11].

5.1 Motivacija: gubitak regularnosti vrednosne funkcije

Pre formalnog uvođenja, ilustrujemo konkretno u kom smislu vrednosna funkcija našeg problema može da izgubi regularnost.

U modelu dekulacije sa ograničenjem $c_t \in [c_{\min}, c_{\max}]$ i delom granice gde je $x = 0$ (bankrot), vrednosna funkcija $V = V(t, x)$ može da ima:

- *neregularnost na granici oblasti*: na delu granice gde je $x = 0$, granični uslov $V(t, 0) = 0$ (bankrot) može da uzrokuje da se rešenje na tom delu granice ne ponaša kao rešenje u unutrašnjosti, a $\frac{\partial V}{\partial x}$ može biti neograničen po x u okolini nule (u klasičnom smislu: problem nije dobro postavljen);
- *slobodnu granicu*: između oblasti gde je optimalno povlačiti sredstva po minimalnoj stopi $c_{\min}$ i oblasti gde je optimalno povlačiti sredstva po nekoj unutrašnjoj

vrednosti, $c^*(t, x) \in (c_{\min}, c_{\max})$, vrednosna funkcija je izgleda glatko sa svake strane, ali $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ može imati prekide na granici.

U oba slučaja važi da $V \notin C^{1,2}$ i verifikaciona teorema 4.10 nije primenljiva u klasičnom obliku. Teorija viskoznih rešenja omogućava da se ovi slučajevi „prikriju” jedinstvenim okvirom.

5.2 Definicija viskoznih rešenja

Opšti okvir

Razmatramo nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda oblika:

$$F\left(t, x, w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0, \quad (t, x) \in \mathcal{O} = [0, T) \times (0, +\infty), \quad (5.1)$$

gde je $F : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja zadovoljava uslov *degenerisane eliptičnosti*, tj. važi:

$$M_1 \leq M_2 \implies F(t, x, r, q, p, M_1) \geq F(t, x, r, q, p, M_2), \quad (5.2)$$

što za naše F iz (5.3) važi jer je $\frac{\partial F}{\partial M} = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \leq 0$; a što ima za posledicu da se radi o jednačini sa *terminalnm graničnim uslovom* (u završnom trenutku $t = T$) (4.20) [11, odeljak 4.2].

HJB jednačina (4.19) može da se zapiše u obliku (5.1) na sledeći način:

$$F(t, x, r, q, p, M) = -q - \mathcal{L}_{p,M} + (\rho + \lambda(t))r - \mathcal{H}(x, p) - \lambda(t)L(x), \quad (5.3)$$

gde smo koristili oznaku $\mathcal{L}_{p,M} = \mu x p + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 M$ za linearni deo generatora difuzije.

Gornji i donji poluneprekidni omotač

Za lokalno ograničenu funkciju $w : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ definišemo:

$$w^*(t, x) = \limsup_{(s,y) \rightarrow (t,x)} w(s, y) \quad (\text{odozgo poluneprekidni omotač}), \quad (5.4)$$

$$w_*(t, x) = \liminf_{(s,y) \rightarrow (t,x)} w(s, y) \quad (\text{odozdo poluneprekidni omotač}). \quad (5.5)$$

Funkcija w^* je najmanje (uniformno najmanje) odozgo poluneprekidno ograničenje od w , a w_* je najveće (uniformno najveće) odozdo poluneprekidno ograničenje od w . Ako je w neprekidna, tada važi da je $w^* \equiv w_* \equiv w$.

Viskozno rešenje

Definicija 5.1 (Viskozno rešenje, [11, def. 4.2.1]). Neka je $w : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ lokalno ograničena funkcija.

- (i) w je *viskozno podrešenje* (engl. *viscosity subsolution*) jednačine (5.1) ako za sve $(\bar{t}, \bar{x}) \in \mathcal{O}$ i sve $\varphi \in C^{1,2}(\mathcal{O})$ takve da $(\bar{t}, \bar{x})$ je tačka maksimuma od $w^* - \varphi$ važi:

$$F\left(\bar{t}, \bar{x}, w^*(\bar{t}, \bar{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\bar{t}, \bar{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\bar{t}, \bar{x}), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\bar{t}, \bar{x})\right) \leq 0. \quad (5.6)$$

- (ii) w je *viskozno nadrešenje* (engl. *viscosity supersolution*) jednačine (5.1) ako za sve $(\bar{t}, \bar{x}) \in \mathcal{O}$ i sve $\varphi \in C^{1,2}(\mathcal{O})$ takve da $(\bar{t}, \bar{x})$ je tačka minimuma od $w_* - \varphi$ važi:

$$F\left(\bar{t}, \bar{x}, w_*(\bar{t}, \bar{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\bar{t}, \bar{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\bar{t}, \bar{x}), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\bar{t}, \bar{x})\right) \geq 0. \quad (5.7)$$

- (iii) w je *viskozno rešenje* jednačine (5.1) ako je istovremeno i viskozno podrešenje i viskozno nadrešenje.

Napomena 5.2. Ključna ideja u definiciji 5.1 je zamena izvoda funkcije w izvodima tzv. *test funkcije* φ u tačkama ekstremuma razlike $w - \varphi$. U tačkama gde w nije diferencijabilna, test funkcija „zamenjuje” w i preuzima ulogu diferencijabilne funkcije. Ako je w glatka, tada je $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ u tačkama ekstremuma, pa se viskozno rešenje poklapa sa običnim rešenjem.

5.3 Vrednosna funkcija kao viskozno rešenje HJB jednačine

Ključni rezultat ovog poglavlja je sledeća teorema, koja karakteriše vrednosnu funkciju V definisanu u (4.9) kao viskozno rešenje HJB jednačine (4.19), bez ikakve pretpostavke o njenoj glatkosti.

Teorema 5.3 ([11, tvrđenja 4.3.1, 4.3.2]). *Neka su ispunjene pretpostavke iz sekcije 4.1. Pretpostavimo da je vrednosna funkcija V lokalno ograničena na $[0, T) \times (0, +\infty)$. Tada važi:*

- (i) V je viskozno nadrešenje HJB jednačine (4.19) na $[0, T) \times (0, +\infty)$;
(ii) V je viskozno podrešenje HJB jednačine (4.19) na $[0, T) \times (0, +\infty)$.

Dakle, V je viskozno rešenje HJB jednačine (4.19).

Skica dokaza. (i) Nadrešenje. Neka je $\varphi \in C^{1,2}$ test funkcija takva da je $(\bar{t}, \bar{x})$ tačka minimuma od $V_* - \varphi$. Iz prve nejednakosti DPP (4.11) za $c_{\bar{t}} \in [c_{\min}, c_{\max}]$ i $\theta = \bar{t} + h$, primenom Itoove formule na φ i puštanjem da $h \rightarrow 0^+$ dobijamo (5.7).

(ii) Podrešenje. Neka je $\varphi \in C^{1,2}$ test funkcija takva da je $(\bar{t}, \bar{x})$ tačka maksimuma od $V^* - \varphi$. Dokaz ide svođenjem na kontradikciju: pretpostavimo da (5.6) nije ispunjeno, tj. da je $F > 0$ u tački $(\bar{t}, \bar{x})$. Iz druge nejednakosti DPP-a (4.11) i primene Itoove formule na φ , dobijamo kontradikciju sa optimalnošću vrednosne funkcije [11, tvrđenje 4.3.2]. $\square$

5.4 Princip poređenja i jedinstvenost

Teorema 5.3 pokazuje da je vrednosna funkcija viskozno rešenje HJB jednačine, ali ne i da je jedinstveno rešenje. Jedinstvenost se dobija iz *principa poređenja*:

Teorema 5.4 (Princip poređenja, [11, teorema 4.4.1]). *Neka je u (odozgo poluneprekidno) viskozno podrešenje i v (odozdo poluneprekidno) viskozno nadrešenje HJB jednačine (4.19) na $[0, T) \times (0, +\infty)$. Neka su ispunjeni odgovarajući uslovi rasta u beskonačnosti i granični uslovi, tj. važi:*

$$u(T, x) \leq L(x) \leq v(T, x), \quad x \in (0, +\infty).$$

Tada je $u(t, x) \leq v(t, x)$ na $[0, T] \times [0, +\infty)$.

Posledica 5.5 (Jedinstvenost). *Pod pretpostavkama teoreme 5.4, postoji najviše jedno neprekidno viskozno rešenje HJB jednačine (4.19) sa graničnim uslovom $V(T, x) = L(x)$. Dakle, vrednosna funkcija V je **jedinstveno** viskozno rešenje.*

Napomena 5.6. Princip poređenja je najkomplikovanija i najteže dokaziva osobina viskoznih rešenja. Dokaz se tipično zasniva na tehnici „udvostručavanja promenljive” (engl. *doubling of variables*), prikazanoj u [2]. Za naš problem, glavni tehnički uslov je ograničenost funkcije L na svim kompaktnim podskupovima od $(0, +\infty)$ i Lipšicovost preslikavanja μ, σ i λ .

5.5 Slobodni granični problem: optimalna zona i zona bankrota

Struktura optimalnog rešenja

U prisustvu ograničenja $c_t \in [c_{\min}, c_{\max}]$, oblast (engl. *region*) $[0, T] \times (0, +\infty)$ se prirodno deli na dve podoblasti, u zavisnosti od toga koja vrednost kontrole je optimalna:

$$\mathcal{R}_{\text{int}} = \{(t, x) | c^*(t, x) \in (c_{\min}, c_{\max})\} \quad (\text{unutrašnja oblast}), \quad (5.8)$$

$$\mathcal{R}_{\min} = \{(t, x) | c^*(t, x) = c_{\min}\} \quad (\text{oblast minimalne potrošnje}). \quad (5.9)$$

Granica $(\partial\mathcal{R}_{\text{int}}) \cap (\partial\mathcal{R}_{\min})$ je *slobodna granica* — njen položaj u ravni nije unapred poznat, već je deo rešenja problema.

U prisustvu ograničenja $c_t \in [c_{\min}, c_{\max}]$, HJB jednačina (4.19) ostaje iste forme, ali Hamiltonijan $\mathcal{H}(x, p) = \sup_{c_t \in [c_{\min}, c_{\max}]} (U(c_t) - c_t \cdot p)$ već uzima u obzir ta ograničenja. Slobodna granica između oblasti gde optimalna kontrola dostiže ograničenje $c_{\min}$ ili $c_{\max}$ i unutrašnjeg dela gde je $c^*(t, x) \in (c_{\min}, c_{\max})$ jeste deo rešenja problema, ali ne dovodi do *varijacionih nejednačina* u klasičnom smislu.

Napomena 5.7. Varijacione nejednačine (engl. *variational inequalities*) pojavljuju se u problemima stohastičke kontrole koji uključuju *singularnu kontrolu* ili *moгуćnost optimalnog zaustavljanja* — na primer, kada onaj koji investira u fond može da odabere kada će prestati sa investiranjem. U tim slučajevima vrednosna funkcija zadovoljava jednačinu oblika $\min\{-\mathcal{L}V + \rho V - f, V - g\} = 0$ (sa minimumom umesto „običnih” jednačina, a što implicira nejednačine), gde je g *funkcija isplate pri zaustavljanju*. Na primer, ako se radi o *američkim opcijama*, funkcija g bi bila $g(x) = (K - x)^+$, gde je K *ugovorena cena opcije*. Nejednačina $V - g \geq 0$ „kaže” da vrednost vrednosne funkcije nikad ne sme biti manja od isplate pri trenutnom zaustavljanju, dok nejednačina $-\mathcal{L}V + \rho V - f \geq 0$ „kaže” da vrednosna funkcija mora da zadovoljava HJB jednačinu na unutrašnjem delu oblasti. U našem modelu, pošto ne postoji ni mogućnost zaustavljanja niti singularna kontrola, HJB jednačina (4.19) „ostaje jednačina” (ne prelazi u nejednačine), uz Hamiltonijan koji „prečutno” uzima u obzir ograničenja kontrole [11, Poglavlje 5].

Veza sa numeričkim metodama

Slobodna granica i gubitak glatkosti vrednosne funkcije imaju direktne posledice na numeričke metode koje izlažemo u poglavlju 6:

- metoda konačnih razlika mora biti *monotona* i *konzistentna* u smislu viskoznih rešenja da bi približno rešenje konvergiralo ka tačnom, odnosno da bi greška aproksimacije težila nuli (ravnomerno) [10];
- metoda zasnovana na neuronskim mrežama aproksimira vrednosnu funkciju direktno, bez eksplicitnog određivanja slobodne granice — što je jedna od njenih glavnih prednosti u poređenju sa prethodnom, klasičnom numeričkom metodom [1].

Glava 6

Numeričke metode za HJB jednačinu

HJB jednačina (4.19) je nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina za koju, osim u specijalnim slučajevima poput CRRA modela iz sekcije 4.5, ne postoji analitičko rešenje u zatvorenoj formi. Stoga je neophodno koristiti numeričke metode. U ovom poglavlju izlažemo i analiziramo dva pristupa: klasičnu *metodu konačnih razlika* i, novijeg datuma, *metodu zasnovanu na neuronskim mrežama*.

6.1 Prokletstvo dimenzionalnosti i diskretizacija

Prokletstvo dimenzionalnosti

Klasične numeričke metode za PDJ — metoda konačnih razlika, metoda konačnih elemenata, metoda karakteristika — sve imaju takozvano *prokletstvo dimenzionalnosti* (engl. *curse of dimensionality*), pojm koji je uveo Belaman: (vremenska) složenost algoritma raste eksponencijalno sa dimenzijom prostora stanja.

U našem osnovnom modelu (kada je portfolio jednoličan), prostor stanja je *jednodimenzion*: $x \in (0, +\infty)$, uz vremensku promenljivu $t \in [0, T]$. Ovo je parabolički problem u 1D, za koji su klasične numeričke metode efikasne. Ako koristimo N_t tačaka na vremenskoj osi i N_x tačaka na prostornoj osi (osi stanja kapitala), ukupan broj podeonih tačaka je $N_t \cdot N_x$, a to je umerene veličine. Međutim, u realističnijem modelu, sa više „entiteta od vrednosti” (klasa) u portfoliju (npr. akcije, obveznice, nekretnine), prostor stanja dobija veću dimenziju i klasične metode postaju nepraktične jer nastupa prokletstvo dimenzionalnosti [10].

Upravo zbog ovog ograničenja, metode zasnovane na dubokom učenju postale su alternativa koja se sve više koristi — one aproksimiraju vrednosnu funkciju bez

direktne diskretizacije prostora stanja [8, 1].

Podele vremenskog i prostornog intervala

Za numeričko rešavanje, fiksiramo *vremensku podelu*:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_t} = T, \quad h = \frac{T}{N_t} \quad (\text{korak}). \quad (6.1)$$

Prostornu osu diskretizujemo na intervalu $[0, x_{\max}]$:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_x} = x_{\max}, \quad \Delta x = \frac{x_{\max}}{N_x}. \quad (6.2)$$

Vrednost $x_{\max}$ bira se tako da bude dovoljno velika, a da efekti granice budu zanemarljivi (ustaljeno se uzima $x_{\max} = 5 \cdot x_0$ ili više).

6.2 Metoda konačnih razlika

Diskretizacija HJB jednačine

Metoda konačnih razlika podrazumeva da se parcijalni izvodi u HJB jednačini (4.19) zamene konačnim razlikama na podelama (6.1)–(6.2) [10, 7].

Uvedimo oznaku $V_j^n \approx V(t_n, x_j)$. Diskretizujemo parcijalne izvode:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{V_j^n - V_j^{n+1}}{h} \quad (\text{razlika unazad po vremenu}), \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(t_n, x_j) \approx \frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (\text{centralna razlika po prostornoj promenljivoj}), \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t_n, x_j) \approx \frac{V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (\text{razlika drugog reda po prostornoj promenljivoj}). \quad (6.5)$$

Zamenom (6.3)–(6.5) u (4.19) i rešavanjem po V_j^n dobijamo diskretnu verziju koja se rešava unazad, od $t = T$ do $t = 0$:

$$\frac{V_j^n - V_j^{n+1}}{h} + \mathcal{L}_h V_j^{n+1} - (\rho + \lambda_n) V_j^{n+1} + \mathcal{H}_h \left(x_j, \frac{V_{j+1}^{n+1} - V_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \lambda_n L(x_j) = 0, \quad (6.6)$$

gde je $\mathcal{L}_h$ diskretni analog generatora $\mathcal{L}$ i $\lambda_n = \lambda(t_n)$.

Hovardova iteracija

Nelinearnost HJB jednačine (4.19) dolazi od Hamiltonijana:

$$\mathcal{H}(x, p) = \sup_{c_t \in [c_{\min}, c_{\max}]} \left(U(c_t) - c_t \cdot p \right).$$

Za rešavanje diskretne verzije (6.6) koristimo algoritam poznat kao *Hovardova iteracija* (engl. *Howard's policy iteration*; *policy iteration algorithm*):

1. inicijalizacija: postaviti $V_j^{N_t} = L(x_j)$ za sve j , kao i početnu stopu povlačenja $c_j^{(0)} = c_{\min}$;

2. evaluacija (engl. *policy evaluation*): za fiksiranu stopu $c_j^{(k)}$, rešiti linearni sistem:

$$\frac{V_j^n - V_j^{n+1}}{h} + \mathcal{L}_h V_j^{n+1} - (\rho + \lambda_n) V_j^{n+1} + U(c_j^{(k)}) - c_j^{(k)} \frac{V_{j+1}^{n+1} - V_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \lambda_n L(x_j) = 0;$$

3. ažuriranje (engl. *policy improvement*): ažurirati vrednost:

$$c_j^{(k+1)} = \arg \max_{c \in [c_{\min}, c_{\max}]} \left[U(c) - c \frac{V_{j+1}^{n+1} - V_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right];$$

za CRRA korisnost, maksimum se dostiže u:

$$c_j^{(k+1)} = \left(\frac{V_{j+1}^{n+1} - V_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right)^{-1/\gamma},$$

inkluzivno na $[c_{\min}, c_{\max}]$;

4. konvergencija: ponavljati korake 2–3 sve dok ne bude zadovoljeno da je $\|c^{(k+1)} - c^{(k)}\|_{\infty} < \varepsilon_{\text{tol}}$.

Napomena 6.1. Algoritam Hovardove iteracije konvergira kvadratnom brzinom pod nenametljivim uslovima [10]. U praksi, u velikom broju slučajeva je dovoljno 3–5 iteracija po vremenskom koraku.

Konzistentnost, stabilnost i konvergencija

Da bi diskretna verzija bila valjana, mora da zadovolji tri uslova [10]:

- (i) *konzistentnost*: ukupna greška lokalnog odsecanja $\tau_h \rightarrow 0$ kada $h \rightarrow 0$ i $\Delta x \rightarrow 0$ — za (6.6) važi $\tau_h = O(h + (\Delta x)^2)$ (kada zamenimo npr. prvi izvod konačnom razlikom, mi smo svesno odsekli beskonačno mnogo preostalih sabiraka Tejlorovog reda);
- (ii) *stabilnost*: rešenje diskretnog slučaja ostaje uniformno ograničeno po h i Δx — ovo se obezbeđuje uslovom tipa CFL (Kurant-Fridrihs-Levi, engl. *Courant-Friedrichs-Lewy*):

$$\frac{\sigma^2 x_j^2}{(\Delta x)^2} h \leq C \quad \text{za sve } j;$$

- (iii) *monotonost*: diskretni operator (kada premenimo taj linearni operator na rešenje od (6.6) dobijamo 0) mora biti monoton po svim viskoznom rešenjima — ovo je ključni uslov koji garantuje konvergenciju ka viskoznom rešenju [2, teorema 4.1].

Teorema 6.2 (Konvergencija, [10]). *Neka je diskretna verzija (6.6) konzistentna, stabilna i monotona. Tada rešenje V_j^n konvergira ka jedinstvenom viskoznom rešenju V HJB jednačine (4.19) kada $h \rightarrow 0$ i $\Delta x \rightarrow 0$.*

6.3 Metoda zasnovana na neuronskim mrežama

Motivacija i osnovne ideje

Metoda konačnih razlika iz prethodne sekcije efikasna je za jednodimenzioni problem, ali je nepraktična u većim dimenzijama. Savremena alternativa je aproksimacija vrednosne funkcije i optimalne kontrole *neuronskim mrežama* [8, 1].

Osnovna ideja: umesto diskretizacijom prostora stanja, aproksimacije tražimo u obliku:

$$V(t, x) \approx V_\theta(t, x), \quad c^*(t, x) \approx c_\theta(t, x), \quad (6.7)$$

gde su V_θ i c_θ neuronske mreže sa parametrima θ koje određujemo minimizacijom odgovarajućeg gubitka.

Arhitektura neuronske mreže

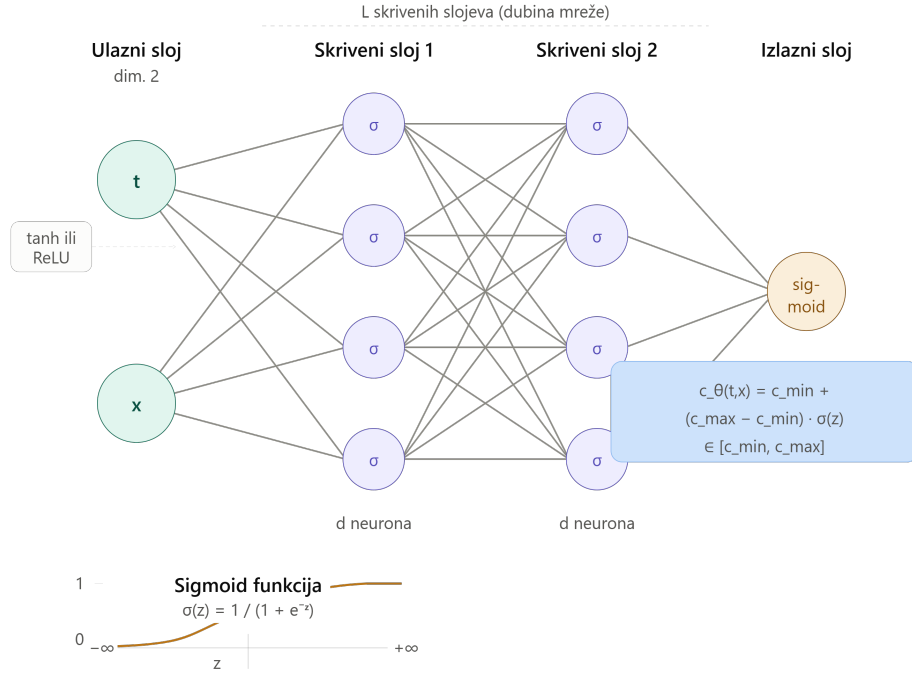
Koristimo direktnu (engl. *feed-forward*) neuronsku mrežu sa:

- ulaznim slojem dimenzije 2 (imamo 2 ulaza: t i x);
- L skrivenih slojeva (dubina mreže – što je veće to može da nauči sve složenije, nelinearne funkcije) sa d neurona (širina skrivenog sloja) i aktivacionom funkcijom (primenjuje se na izlaz svakog neurona i razlikuje mrežu od kompozicije običnih linearnih transformacija) σ_{act} ; ustaljeno se uzima tanh – tangens hiperbolički ili $\text{ReLU}(z) = \max(0, z)$ (engl. *rectified linear unit*);
- izlaznim slojem koji daje $c_\theta(t, x)$: standardni izlaz neurona u mrežama je neki realni broj z , pa se aktivaciona funkcija prilagođava tako da osigurava da izlaz bude u $[c_{\min}, c_{\max}]$, i još se radi obična linearna interpolacija:

$$c_\theta(t, x) = c_{\min} + (c_{\max} - c_{\min}) \cdot \sigma(z),$$

gde je $\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$ tzv. *sigmoid funkcija* — ako je izlaz z jako pozitivan, sigmoid je približno 1; a, ako je izlaz jako negativan, sigmoid je približno 0 (zbog toga se i radi interpolacija sa intervala $(0, 1)$ na $[c_{\min}, c_{\max}]$).

Vrednosna funkcija V_θ može se aproksimirati zasebnom mrežom ili se može koristiti Fejnman-Kačeva reprezentacija za njeno direktno izračunavanje iz c_θ [1].



Slika 6.1: Arhitektura direktne neuronske mreže za aproksimaciju optimalne kontrolne vrednosti $c_{\theta}(t, x)$. Simbolom σ označena je aktivaciona funkcija skrivenih slojeva (tanh ili ReLU), dok izlazni sloj koristi sigmoid funkciju za prelazak na interval $[c_{\min}, c_{\max}]$.

Funkcija gubitka i treniranje

Funkcija gubitka (engl. *loss function*) se definiše kao negativna vrednost objektivne funkcije (4.8) ocenjene Monte Karlo metodom: za M simuliranih trajektorija $\{X^{(m)} = X_s^{(m)}\}_{m=1}^M$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta) = -\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\sum_{k=0}^{N_t-1} e^{-\rho t_k} U\left(c_{\theta}(t_k, X_{t_k}^{(m)})\right) h \right. \\ \left. + e^{-\rho \tau^{(m)}} L\left(X_{\tau^{(m)}}^{(m)}\right) \mathbf{I}\left\{\tau^{(m)} = \tau_d^{(m)}\right\} \right. \\ \left. + e^{-\rho T} L\left(X_T^{(m)}\right) \mathbf{I}\left\{\tau^{(m)} > T, \tau_b^{(m)} > T\right\} \right), \end{aligned} \quad (6.8)$$

gde je $(\tau_d^{(m)})$ uzorak mortalitetnih horizonata iz Gompertz-Makehamovog modela (4.4). Minimizacija (6.8) po θ izvodi se gradijentnim metodama (ustaljeno se koristi Adam – engl. *adaptive moment estimation* – optimizacioni algoritam) uz automatsko diferenciranje [1].

Ocena greške aproksimacije

Tvrđenje 6.3 (Aposteriorna ocena greške, [1]). *Neka je c_θ aproksimirana kontrola dobijena treniranjem neuronske mreže i $J(t, x; c_\theta)$ odgovarajuća vrednost objektivne funkcije. Tada je:*

$$0 \leq V(t, x) - J(t, x; c_\theta) \leq \varepsilon_{NN}, \quad (6.9)$$

gde se ε_{NN} procenjuje Monte Karlo metodom:

$$\varepsilon_{NN} \approx V_h(t, x) - J_h(t, x; c_\theta),$$

a V_h je referentno rešenje dobijeno metodom konačnih razlika na dovoljno finoj podeli.

6.4 Poređenje metoda

Tabela 6.1 sumira ključne karakteristike dve numeričke metode.

Tabela 6.1: Poređenje metode konačnih razlika i metode neuronskih mreža za rešavanje HJB jednačine (4.19).

Osobina	Konačne razlike	Neuronska mreža
dimenzionalnost	mala (1–2D)	velika (nD)
tačnost	dokazivo konvergentna	aposteriorna ocena
brzina konvergencije	brza	brža
slobodna granica	eksplicitna	implicitna
implementacija	jednostavnija	složenija
referenca	[10]	[1]

U Poglavlju 7 implementiramo obe metode u programskom jeziku Pajton i poređimo ih na konkretnom modelu dekulacije sa Gomperc-Makehamovim modelom mortaliteta.

Glava 7

Implementacija i numerički eksperimenti

U ovom poglavlju prelazimo sa teorije na primene. Implementiramo obe numeričke metode razvijene u poglavlju 6 u programskom jeziku Pajton i primenjujemo ih na konkretan model dekulacije sa mortalitetnim rizikom. Parametri modela ocenjuju se na osnovu javno dostupnih podataka: tablica mortaliteta Republičkog zavoda za statistiku Srbije [12] i Human Mortality Database [9].

7.1 Opis i analiza podataka

Izvori podataka

Za uklapanje podataka u model mortaliteta koristimo dva komplementarna izvora:

Human Mortality Database (HMD) [9] je međunarodni akademski projekat Univerziteta *Kalifornija* u Berkliju (engl. *University of California, Berkeley*) i Instituta *Maks Plank* za demografska istraživanja (engl. *Max Planck Institute for Demographic Research*). Baza sadrži standardizovane tablice mortaliteta za više od 40 zemalja, i predstavlja standard u literaturi čiji su predmeti demografija i aktuarstvo. Za Srbiju su dostupni podaci za period od 1960. do 2024. godine, sa jednogodišnjim starosnim grupama (starost $x = 0, 1, \dots, 100+$; u godinama) prema polu (muški i ženski).

Republički zavod za statistiku Srbije (RZS) [12] objavljuje detaljne tablice mortaliteta za Republiku Srbiju, uključujući i izravnatu verovatnoću smrti $q(x)$, broj živih $l(x)$, broj umrlih $d(x)$ i prosečni životni vek $e(x)$, u zavisnosti od starosti,

prema polu. Koristimo tablice za period od 2020. do 2022. godine.

Oba izvora daju konzistentne vrednosti stopa mortaliteta, što smo verifikovali međusobnim poređenjem. U nastavku, za uklapanje podataka u Gompere-Makehamov model koristimo godišnje stope mortaliteta $m(x)$ iz HMD-a, dok tablice RZS-a koristimo za verifikaciju rezultata.

Struktura podataka

HMD baza za Srbiju sadrži ukupno 10 872 opservacije. Za potrebe ovog rada koristimo podskup kojem odgovaraju:

- godišnje tablice mortaliteta (`TypeLT` = 1), koje daju vrednosti po jednogodišnjim starosnim grupama $x \in \{0, 1, \dots, 100\}$;
- posmatrane stope mortaliteta $m(x)$ — broj umrlih po licu-godini izloženosti riziku (ne meri samo „koliko ljudi je umrlo u odnosu na njihov početni broj”, već i koliko je smrtnih slučajeva zabeleženo po svakoj jedinici proživljenog vremena posmatrane populacije — brzina umiranja na godišnjem nivou);
- period 2022 (poslednja kompletna godina je 2022. — iz srpskih izvora);
- razdvojenost na mušku (`Sex` = 1) i žensku (`Sex` = 2) populaciju.

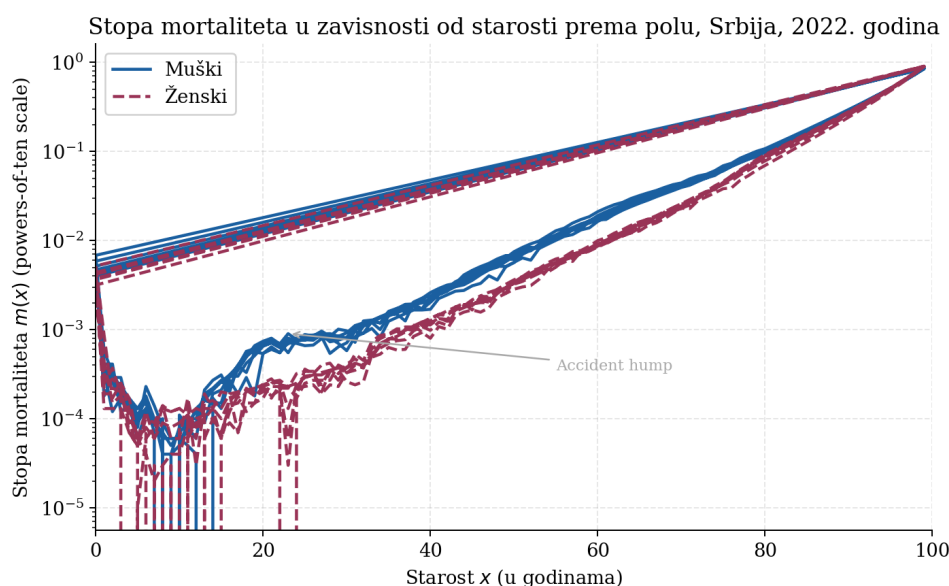
Napomena 7.1. Lice-godina izloženosti riziku (engl. *person-years at risk*) je jedinica mere koja spaja broj posmatranih ljudi i vreme tokom kojeg su oni bili pod rizikom da umru. Ako npr. jedna osoba živi pod rizikom godinu dana (recimo od 50. do 51. rođendana), to predstavlja jednu lice-godinu izloženosti riziku. Isto tako, ako dve osobe žive pod rizikom od po 6 meseci, to je takođe jedna lice-godina ($2 \text{ ljudi} \times 0.5 \text{ godina} = 1 \text{ lice-godina}$). Ako n ljudi živi pod rizikom tako da im je zbir pojedinačnih vremena provedenih pod rizikom 365 dana, to takođe predstavlja jednu lice-godinu izloženosti riziku. Razloga zbog kojih se merenje vrši u licima-godinama je više. U realnoj populaciji ljudi, oni ne ulaze u posmatranje niti izlaze iz njega idealno na početku kalendarske godine (1. januara); neki se dosele, neki odsele, a neki umru recimo sredinom kalendarske godine. Ako uzmemo sve posmatrane osobe starosti x i izračunamo ukupan zbir (u godinama) svih pojedinačnih vremena koje su one provele pod rizikom u toku jedne kalendarske godine, dobijamo ukupnu izloženost riziku lica starosti x — E_x u licima-godinama. Ako sa D_x označimo ukupan broj lica

iz posmatranja koji su umrli tokom kalendarske godine u starosnoj dobi koja iznosi x , onda je:

$$m(x) = \frac{D_x}{E_x}.$$

Grafička analiza stopa mortaliteta

Na slici 7.1 prikazane su stope mortaliteta $m(x)$ u zavisnosti od starosti za mušku i žensku populaciju Srbije u 2022. godini, skalirani „na stepene broja 10” (engl. *powers-of-ten scale*; logaritamska skala sa osnovom 10).



Slika 7.1: Stope mortaliteta $m(x)$ u zavisnosti od starosti prema polu, Srbija, 2022. godina (powers-of-ten scale) Izvor: Human Mortality Database [9].

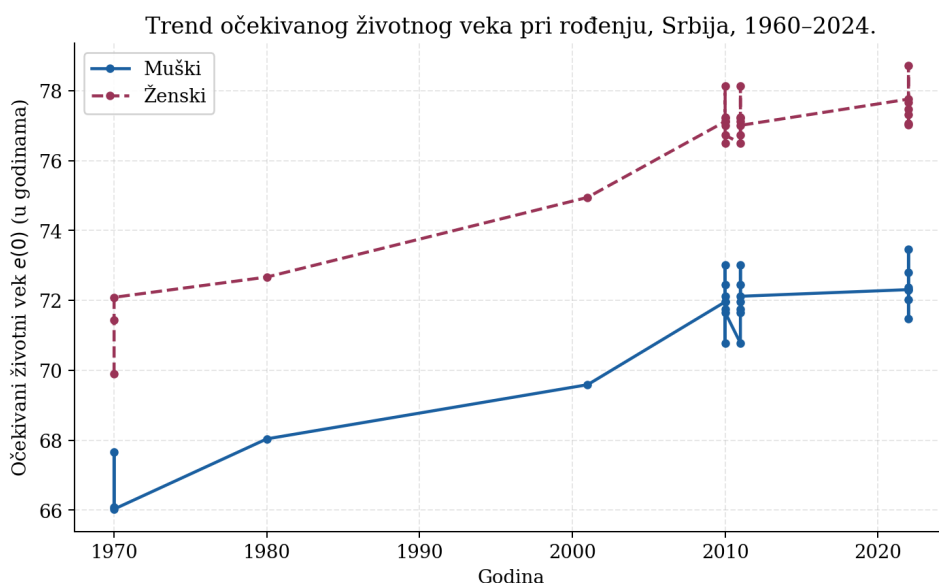
Sa grafika se jasno uočavaju karakteristične osobine stopa mortaliteta:

- (i) *visoki infantilni mortalitet* ($x < 1$) koji brzo opada tokom prvih godina života;
- (ii) *minimalni mortalitet* u uzrastu između 5. i 14. godine života;
- (iii) *accident hump* (engl.) — lokalni maksimum mortaliteta u uzrastu od oko 20. do 25. godine života, dominantno uzrokovan najčešće saobraćajnim nesrećama ili nasilnim putem koji je prisutan kod muškaraca;
- (iv) *eksponencijalni rast* mortaliteta posle 40. godine koji je gladi — upravo ovaj deo je nama od interesa za opisivanje Gompere-Makehamovim modelom.

Ženski mortalitet je sistematski niži od muškog u skoro svim starosnim grupama, što je konzistentno sa poznatim demografskim fenomenom razlike u očekivanom životnom veku po polu.

Trend očekivanog životnog veka

Slika 7.2 prikazuje trend očekivanog životnog veka pri rođenju $e(0)$ za Srbiju u periodu između 1960. i 2024. godine.



Slika 7.2: Trend očekivanog životnog veka pri rođenju $e(0)$ za Srbiju, 1960–2024. god., prema polu. Izvor: Human Mortality Database [9].

Trend pokazuje ustaljeni porast očekivanog životnog veka tokom posmatranog perioda: od oko 66 godina za muškarce i oko 70 godina za žene u 1960. godini, do oko 73 godine za muškarce i oko 78 godina za žene u 2022. godini. Ovaj trend direktno motivise problem dekulacije koji razmatramo u ovom radu: kako penzioner sa sve dužim očekivanim životnim vekom treba da planira povlačenje novčanih sredstava iz fonda.

Napomena 7.2. Blagi pad nivoa od $e(0)$ koji se uočava oko 2020. godine odražava povećani mortalitet usled pandemije bolesti COVID-19, koji je posebno pogodio stariju populaciju. Ovo je primer sistemskog mortalitetnog šoka koji standardni Gompertz-Makehamov model ne opisuje, ali koji potvrđuje važnost *analize robusnosti* (analize osetljivosti; robusno – otporno na male promene u ulaznim podacima) u sekciji 8.3.

7.2 Tehnički stek i arhitektura koda

Implementacija je organizovana kao reproducibilni istraživački repozitorijum sa sledećim ključnim modulima:

- `numpy`, `scipy` — numerički račun, linearni sistemi, ocenjivanje parametara modela optimizacijom;
- `pytorch` — implementacija neuronske mreže, automatsko diferenciranje, Adam algoritam optimizacije;
- `matplotlib` — vizualizacija rezultata;
- `pandas` — učitavanje i obrada podataka sa tablica mortaliteta.

7.3 Uklapanje podataka u model mortaliteta

Podaci i priprema

Za uklapanje podataka u Gomperc-Makehamov model (4.4) koristimo godišnje stope mortaliteta $m(x)$ iz Human Mortality Database za Srbiju [9], u periodu 2022, za starosne grupe $x \in \{40, 41, \dots, 99\}$. Fokus na starosti ≥ 40 opravdan je činjenicom da su mlađi uzrasti dominantno određeni spoljašnjim uzrocima (nesreće, nasilje) koji stvaraju šokove koje Gomperc-Makehamov model ne opisuje (jer su uzrokovani mlađom životnom dobi, dok ovaj model opisuje samo nesreće koje ne zavise od starosne dobi) — tzv. (engl.) *accident hump* u tablici.

Napomena 7.3. Gomperc-Makehamov model ne opisuje veliku učestalost spoljnih faktora na životni vek u mlađoj životnoj dobi (jer dominantno zavise od iste); ali svakako da opisuje učestalost istih faktora u starijoj koja je umerena, skoro neprimetna jer u tom periodu života nemamo zavisnost.

Ocenjivanje parametara se vrši posebno za mušku i žensku populaciju, metodom najmanjih kvadrata (engl. *nonlinear least squares*):

$$(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) = \arg \min_{A, B, C > 0} \sum_{x=40}^{99} (m(x) - (A + B e^{Cx}))^2. \quad (7.1)$$

Tabela 7.1: Ocenjeni parametri Gompert-Makehamovog modela za srpsku populaciju, 2022. godina. Izvor podataka: Human Mortality Database [9].

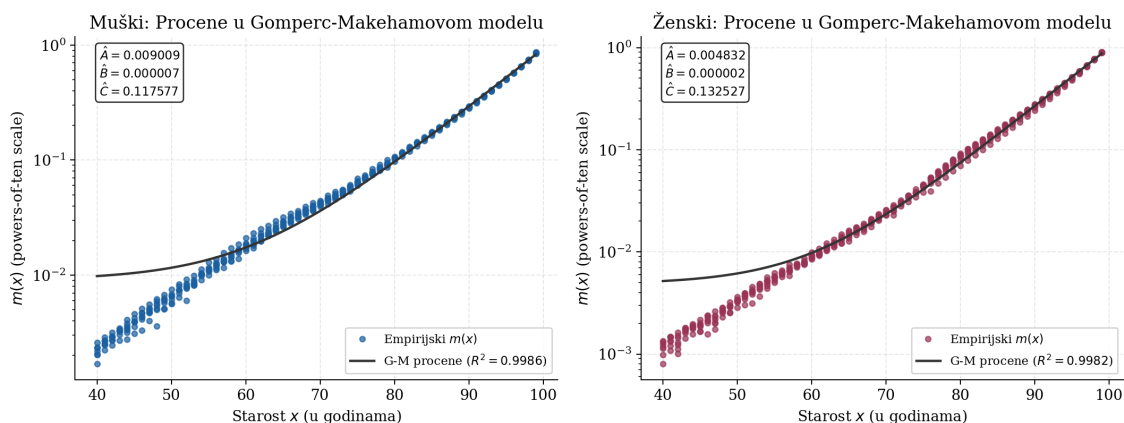
Pol	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	R^2
Muški	0.009009	0.000007	0.117577	0.9986
Ženski	0.004832	0.000002	0.132527	0.9982

Ocenjeni parametri

Koeficijent determinacije $R^2 > 0.998$ za oba pola potvrđuje da Gompert-Makehamov model odlično opisuje srpske mortalitetne podatke. U nastavku rada koristimo parametre za mušku populaciju kao reprezentativni slučaj.

Napomena 7.4. Parametar $\hat{A} = 0.009009$ (Makehamov član) znači da i penzioner koji bi bio „biološki besmrtni” ima godišnju stopu mortaliteta od oko 0.9%, što modelira smrt od spoljašnjih uzroka nezavisnih od starosti. Parametar $\hat{C} = 0.11758$ (Gompertov koeficijent starenja) znači da se rizik od smrti povećava za faktor $e^{0.11758} \approx 1.125$ svake godine — tj. intenzitet mortaliteta raste za oko 12.5% godišnje sa starenjem.

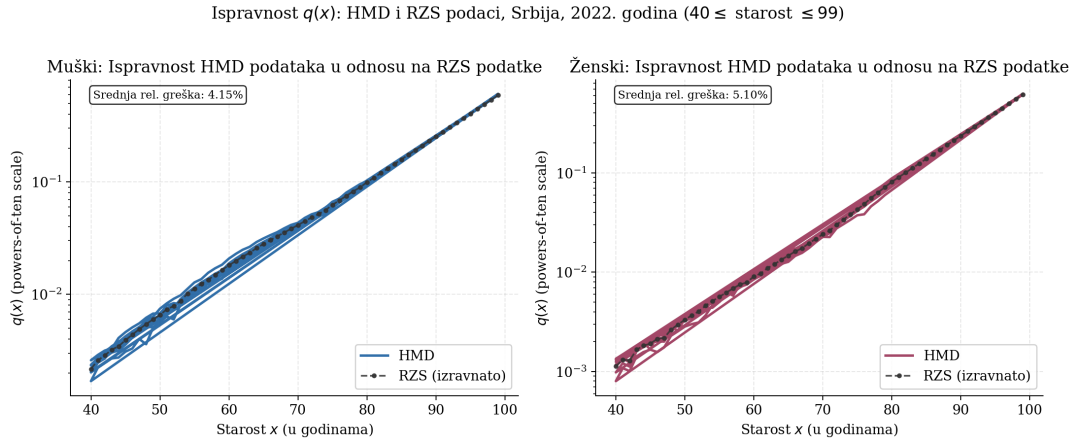
Uklapanje podataka u Gompert-Makehamov model, Srbija, 2022. godina



Slika 7.3: Gompert-Makehamov model nad empirijskim stopama mortaliteta $m(x)$ iz Human Mortality Database [9], Srbija 2022. godina, starost između 40. i 99. godine života. Puna linija predstavlja procenu modela, a tačke su empirijske vrednosti. Koeficijent determinacije $R^2 > 0.998$ za oba pola potvrđuje da je model adekvatan.

Verifikacija konzistentnosti izvora podataka

Uvek je pogodno imati neki način da proverimo ispravnost podataka sa kojima radimo, tj. da na neki način uradimo dijagnostiku modela u zavisnosti od upotrebljenih podataka da bismo opravdali njegovu visoku determinisanost u oba slučaja. Posle uklapanja, verifikujemo konzistentnost HMD podataka na osnovu RZS podataka (srpski izvor) poređenjem verovatnoća smrti $q(x)$ iz oba izvora za starosne grupe $x \in \{40, \dots, 99\}$ — vrednosti koje koristimo za modeliranje. Ova verifikacija opravdava to da oba izvora opisuju isti demografski fenomen i da je naše uklapanje otporno na izbor izvora podataka.



Slika 7.4: Poređenje verovatnoća smrti $q(x)$ iz dva izvora: Human Mortality Database [9] i Republički zavod za statistiku Srbije [12], za starost $x \in [40, 99]$, 2022. godina. Powers-of-ten scale.

Sa slike 7.4 vidimo da se vrednosti $q(x)$ iz HMD izvora i RZS izvora vizuelno poklapaju duž celog posmatranog opsega. Numeričkim putem dobijamo srednju relativnu grešku od 4.15% za mušku i 5.10% za žensku populaciju. Ova mala razlika posledica je razilaženja u metodologiji: HMD koristi sirove posmatrane stope mortaliteta $m(x)$ (broj umrlih po licu-godini izloženosti riziku), dok RZS objavljuje izravnavane vrednosti $q(x)$ (verovatnoća smrti u jednogodišnjem intervalu) dobijene nekom statističkom metodom izravnavanja. Obe veličine konvergiraju ka istoj stopi hazarda $\lambda(x)$ Gomperc-Makehamovog modela u oblasti $x \geq 40$, što potvrđuje da je naše uklapanje otporno u ovom smislu.

Listing 0 – Uklapanje podataka u Gompertz-Makehamov model, HMD za Srbiju.

```

1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 from scipy.optimize import curve_fit
4
5 # Ucitavanje podataka
6 df = pd.read_csv('SRB.csv')
7 mask = ((df['Year1'] == 2022) & (df['Sex'] == 1) &
8         (df['TypeLT'] == 1) & (df['Age'] >= 40) &
9         (df['Age'] <= 99))
10 data = df[mask][['Age', 'm(x)']].copy()
11
12 # Gompertz-Makehamov model
13 def gompertz_makeham(x, A, B, C):
14     return A + B * np.exp(C * x)
15
16 # Ocenjivanje parametara metodom najmanjih kvadrata
17 x = data['Age'].values.astype(float)
18 y = data['m(x)'].values.astype(float)
19
20 popt, _ = curve_fit(
21     gompertz_makeham, x, y,
22     p0 = [0.0001, 0.00005, 0.08],
23     bounds = ([0, 0, 0], [1, 1, 1])
24 )
25 A_hat, B_hat, C_hat = popt
26 # Rezultati: A = 0.009009, B = 0.000007, C = 0.117577

```

7.4 Tržišni parametri

Za dinamiku kapitala (4.2) koristimo parametre koji su navedeni u tabeli 7.2 i koji su konzistentni sa dugoročnim istorijskim podacima razvijenih finansijskih tržišta [7].

Tabela 7.2: Parametri modela dekulacije korišćeni u numeričkim eksperimentima.

Parametar	Opis	Vrednost
μ	Očekivani godišnji prinos portfolija	0.07
σ	Godišnja volatilitnost portfolija	0.18
ρ	Subjektivna diskontna stopa	0.04
γ	Koeficijent rizične averzije (CRRA)	3.0
$c_{\min}$	Minimalna godišnja stopa povlačenja	0.03
$c_{\max}$	Maksimalna godišnja stopa povlačenja	0.15
t_0	Starost pri odlasku u penziju	65
T	Maksimalni horizont planiranja	35
x_0	Početni kapital (normalizovan)	1.0
k	Težina funkcije korisnosti od nasledstva	0.5

7.5 Implementacija metode konačnih razlika

Standardni pristup: direktna diskretizacija HJB jednačine

Kao polaznu tačku implementacije, primenjujemo standardnu metodu konačnih razlika na HJB jednačinu (4.19), onako kako je opisano u sekciji 6.2. Implementacija koristi eksplicitnu Ojlerovu shemu unazad po vremenu i centralnu razliku po prostornoj promenljivoj, uz algoritam Hovardove iteracije za nelinearni deo.

Napomena 7.5. Listing ispod prikazuje standardni pristup direktne diskretizacije HJB jednačine koji važi za opštu klasu problema. U nastavku ove sekcije pokazujemo da ovaj pristup, u kombinaciji sa CRRA korisnosti i Gompert-Makehamovim modelom mortaliteta, dovodi do numeričkih poteškoća, i opisujemo kako smo ih prevazišli.

Listing 1 – Metoda konačnih razlika: standardni pristup

```

1 def hjb_finite_difference(verbose = True):
2     dt = T / Nt
3     x = np.linspace(x_min, x_max, Nx)
4     dx = x[1] - x[0]
5
6     V = np.zeros((Nt + 1, Nx))
7     V[Nt] = L(x) # granicni uslov: V(T, x) = L(x)
8
9     for n in range(Nt - 1, -1, -1):

```

```

10     lam_n = hazard(t_grid[n])
11     V_cur = V[n + 1].copy()
12
13     for it in range(20): # Hovardove iteracije (
14         # eksplisitna shema)
15         dV = np.gradient(V_cur, dx)
16         d2V = np.gradient(dV, dx)
17         c_star = np.clip(dV ** (- 1.0 / gamma), c_min,
18                         c_max)
19         LV = mu * x * dV + 0.5 * sigma ** 2 * x ** 2 *
20             d2V
21         H = U(c_star) - c_star*dV
22         rhs = LV - (rho + lam_n)*V_cur + H + lam_n*L(x
23             )
24         V_new = V_cur + dt*rhs # Ojlerov korak
25         V_new[0] = 0.0
26         if np.max(np.abs(V_new - V_cur)) < 1e-8:
27             break
28         V_cur = V_new.copy()
29     V[n] = V_new

```

Napomena 7.6. Petlja u listingu 1 inspirisana je Hovardovom iteracijom, ali koristi eksplisitu Ojlerovu shemu umesto implicitne — što je jedan od uzroka numeričke nestabilnosti opisane u nastavku.

Numerička nestabilnost i analiza uzroka

Pri prvom pokretanju (sa $N_t = 200$ i $N_x = 300$) dobijamo NaN vrednosti i prazne grafike. Ovo je klasičan primer *numeričke nestabilnosti eksplisite Ojlerove sheme*: korak Δt je prevelik u odnosu na Δx , što narušava uslov stabilnosti tipa Kurant-Fridrihs-Levi (CFL) koji smo naveli u sekciji 6.2.

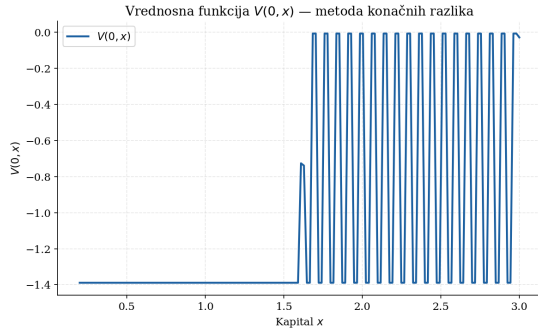
Prirodna reakcija sa naše strane u tom slučaju je povećanje broja vremenskih koraka: postavljamo $N_t = 2000$ i $N_x = 200$ (samo malo N_x u nadi da će pre iskonvergirati). Međutim, i dalje dobijamo NaN vrednosti — i to odmah od prvog koraka ($t = 34.30$). Ovo je ključna dijagnostička informacija: problem nije u veličini podele već u graničnom uslovu.

Analiza otkriva pravi uzrok: za $\gamma = 3$ i vrednosti x bliske nuli, funkcija korisnosti od nasledstva:

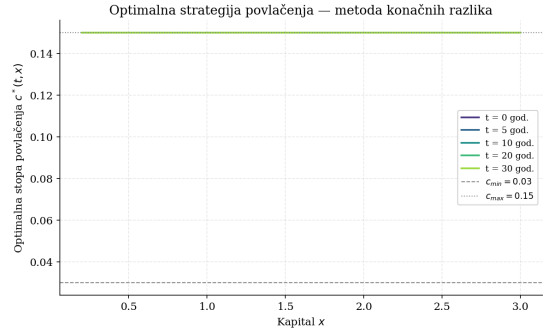
$$L(x) = k \cdot \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} = k \cdot \frac{x^{-2}}{-2}$$

divergira u $-\infty$ kada $x \rightarrow 0^+$. Konkretno, za $x_{\min} = 0.01$ dobijamo $L(0.01) = -2500$, što odmah prouzrokuje **overflow** (srp. *prelivanje*; pojava da vrednosti pri računanju postanu toliko velike da premašuju maksimalnu numeričku granicu koju računarski format može da zapamti) pri računanju razlika i vrednosti desne strane HJB jednačine, pa se cela shema urušava u NaN.

Primena korektivnih mera — postavljanje $x_{\min} = 0.2$ (da bismo izbegli singularnost u nuli) i *klipovanje* (*implicitna shema prvog reda*) vrednosne funkcije i zamena ručnog računanja razlika sa `np.gradient` (stabilnije za naš problem) — rešava problem NaN vrednosti, ali uvodi novi: grafici vrednosne funkcije i optimalne strategije ne izgledaju onako kako teorija „kaže”. Vrednosna funkcija $V(0, x)$ ima nagle skokove, a treba da bude glatka konkavna kriva, a optimalna kontrola $c^*(t, x)$ je identična za sve trenutke t i dostiže maksimum $c_{\max}$ na celoj oblasti. Uzrok je taj što klipovanje, iako sprečava pojavu NaN vrednosti, suštinski kvvari tačnost aproksimacije: umesto da rešavamo HJB jednačinu, rešavamo veštački modifikovanu jednačinu čije rešenje ne odgovara teorijskom.



(a) Vrednosna funkcija $V(0, x)$.



(b) Optimalna strategija $c^*(t, x)$.

Slika 7.5: Rezultati direktne diskretizacije HJB jednačine uz klipovanje. Nagli skokovi vrednosne funkcije i identične vodoravne linije optimalne strategije za sve trenutke t ukazuju da klipovanje, iako sprečava NaN, suštinski kvvari tačnost aproksimacije.

Napomena 7.7. Opisane poteškoće pri radu nisu specifične samo za naš problem — direktna diskretizacija HJB jednačine uz CRRA korisnost opšte je poznata kao numerički zahtevna zbog singularnosti u graničnom procesu $x \rightarrow 0$. Različiti autori predlažu različite tehnike poboljšanja: smenu promenljive $y = \ln x$ [10], upotrebu

implicitnih shema višeg reda, ili tzv. *penalizzazione metode* [7]. Sve ove metode zahtevaju pažljivo podešavanje vrednosti parametara i verifikaciju rezultata, što je zahtevno i dugotrajno.

Rešenje: redukcija na ODJ putem pretpostavljanja rešenja

Umesto da nastavljamo da ispravljamo numeričke poteškoće direktne diskretizacije, koristimo analitičku strukturu rešenja koju smo razvili u sekciji 4.5. Iz teoreme 4.10 i pretpostavke o rešenju (4.32) znamo da vrednosna funkcija ima oblik:

$$V(t, x) = \varphi(t) \cdot \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

pa zamenom u HJB jednačinu (4.19) dobijamo ODJ (4.38) za $\varphi(t)$. Za razliku od sekcije 4.5 gde smo pretpostavili konstantan intenzitet mortaliteta $\lambda(t) \equiv \lambda$, ovde koristimo vremenski promenljivu Gompere-Makehamovu stopu mortaliteta $\lambda(t) = A + Be^{C(t_0+t)}$, za koju pretpostavka o rešenju ostaje validna, kao što je i rečeno u pretpostavkama u okviru sekcije 4.5. Ovim pristupom:

- eliminišemo prostornu diskretizaciju u potpunosti — nema Δx , nema singularnosti kada $x \rightarrow 0$;
- rešavamo jednu ODJ umesto PDJ na 2D podeli;
- koristimo `scipy.solve_ivp` sa RK45 metodom i tolerancijom `rtol = 1e-8`, što daje praktično *egzaktno rešenje* (u smislu rešenja sa zanemarljivo malom greškom metode – tolerancija `rtol=1e-8`).

Ovaj pristup nije kompromis koji pravimo zbog numeričkih poteškoća — on je suštinski tačniji za naš specifičan model, jer koristi analitičku strukturu rešenja koju direktna diskretizacija ne može da iskoristi.

Listing 2 – ODJ pristup: redukcija HJB na ODJ za $\varphi(t)$

```
1 from scipy.integrate import solve_ivp
2
3 def ode_rhs(s, phi_arr):
4     # s = T - t (integracija unazad), phi > 0
5     phi = max(phi_arr[0], 1e-10)
6     t = T - s
7     k = kappa(t) # kappa(t) = mu * (1 - gamma) - 0.5 *
```

```

    gamma * (1 - gamma) * sigma^2 - (rho + lambda(t))
8  dphi_dt = -(k * phi
    + gamma * phi ** ((gamma - 1) / gamma)
10  + hazard(t) * k_leg)
11  return [-dphi_dt] # minus jer integralimo po s = T - t
12
13 sol = solve_ivp(
14     ode_rhs,
15     t_span = [0, T],
16     y0 = [k_leg], # granicni uslov: phi(T) = k (tezina
    nasledstva)
17     method = 'RK45',
18     max_step = 0.01,
19     rtol = 1e-8, atol = 1e-10,
20     dense_output = True
21 )
22 # Vrednosna funkcija: V(t, x) = phi(t) * x^(1 - gamma) /
    (1 - gamma)
23 # Optimalna kontrola: c*(t, x) = clip(phi(t)^(- 1 / gamma)
    * x, c_min, c_max)

```

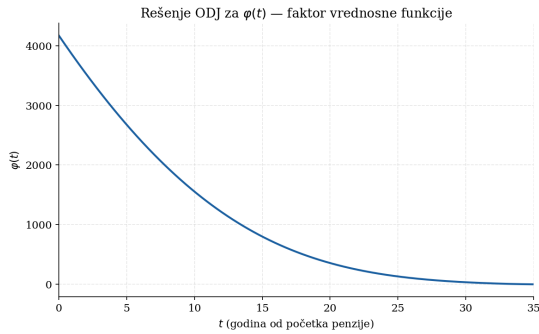
Rezultati i verifikacija

Tabela 7.3 prikazuje procenjene vrednosti $\varphi(t)$ i odgovarajuće optimalne stope povlačenja $c^*(t, 1)$ za referentni kapital $x = 1$.

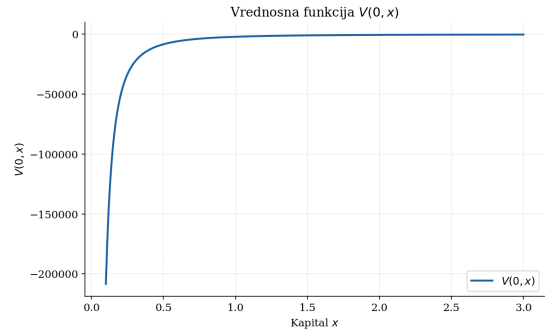
Tabela 7.3: Vrednosti $\varphi(t)$ i optimalne stope povlačenja $c^*(t, 1) = (\varphi(t))^{-\frac{1}{\gamma}}$, za $x = 1$ i parametre iz tabele 7.2.

t (god.)	Starost	$\varphi(t)$	$c^*(t, 1)$
0	65	4168.64	6.2%
5	70	2675.12	7.2%
10	75	1554.00	8.6%
15	80	800.53	10.8%
20	85	356.88	14.1%
25	90	132.40	15.0%
30	95	35.23	15.0%
35	100	0.50	15.0%

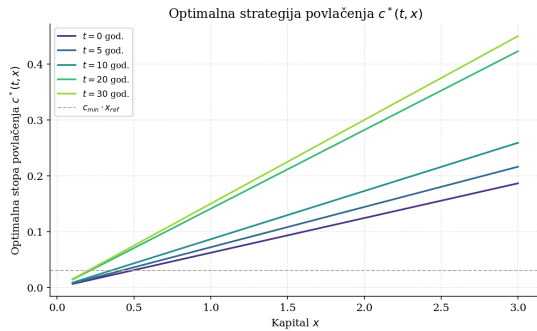
Rezultati su ekonomski intuitivni i konzistentni sa teorijom iz sekcije 4.5: optimalna stopa povlačenja ne opada sa vremenom, dostiže gornju granicu $c_{\max} = 15\%$ oko $t = 25$ godina od penzije (starost od 90 godina), i ostaje na toj granici do kraja. Ovo direktno oslikava uticaj mortalitetnog rizika: kako intenzitet mortaliteta $\lambda(t)$ raste eksponencijalno sa godinama, penzioner koji racionalno uzima u obzir rizik od smrti povlači sve veći procenat kapitala.



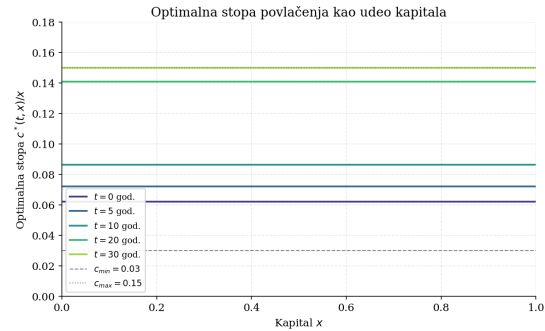
(a) Faktor $\varphi(t)$ kao funkcija φ vremena t . Opadajuća monotonost funkcije φ direktno vodi ka rastućoj optimalnoj stopi povlačenja.



(b) Vrednosna funkcija $V(0, x)$ — glatka i konkavna.



(c) Optimalno povlačenje $c^*(t, x)$ u apsolutnom iznosu.



(d) Optimalna stopa povlačenja $c^*(t, x)/x$ kao udeo kapitala.

Slika 7.6: Rezultati ODJ pristupa za model dekulacije sa Gompertz-Makehamovim mortalitetom. Za razliku od direktne diskretizacije, grafici su glatki i konzistentni sa teorijskim rezultatima iz sekcije 4.5.

7.6 Implementacija metode neuronskih mreža

Standardni Monte Karlo pristup

Kao polaznu tačku implementacije, koristimo standardni Monte Karlo pristup opisan u sekciji 6.3: mrežu treniramo minimizacijom negativne očekivane ukupne diskontovane korisnosti, procenjene simulacijom M trajektorija kapitala.

Listing 3 – Neuronska mreža: arhitektura i (Monte Karlo) trening

```
class DecumulationNet(nn.Module):
    def __init__(self, hidden_dim = 64, num_layers = 4):
```

```

3         super().__init__()
4         layers = [nn.Linear(2, hidden_dim), nn.Tanh()]
5         for _ in range(num_layers - 1):
6             layers += [nn.Linear(hidden_dim, hidden_dim),
7                         nn.Tanh()]
8         layers += [nn.Linear(hidden_dim, 1), nn.Sigmoid()]
9         self.net = nn.Sequential(*layers)
10
11     def forward(self, t_norm, x_norm):
12         inp = torch.stack([t_norm, x_norm], dim = - 1)
13         out = self.net(inp).squeeze(- 1)
14         return c_min + (c_max - c_min) * out
15
16 def train_mc(model, M = 512, Nt = 100, epochs = 1000, lr =
17 1e-3):
18     optimizer = optim.Adam(model.parameters(), lr = lr)
19     dt = T / Nt
20     for epoch in range(epochs):
21         x = torch.ones(M)
22         alive = torch.ones(M, dtype = torch.bool)
23         total = torch.zeros(M)
24         for k in range(Nt):
25             t_k = k * dt
26             c_k = model(torch.full((M,), t_k / T), x.
27                 detach()) * x.detach()
28             disc = np.exp(- rho * t_k)
29             total += disc * U_torch(c_k) * dt * alive.
30                 float()
31             dW = torch.randn(M) * (dt ** 0.5)
32             x = (x + (mu * x - c_k.detach()) * dt + sigma
33                 * x * dW).clamp(0)
34             lam_k = hazard_np(t_k)
35             alive = alive & (torch.rand(M) < np.exp(-
36                 lam_k * dt))
37         loss = - total.mean()

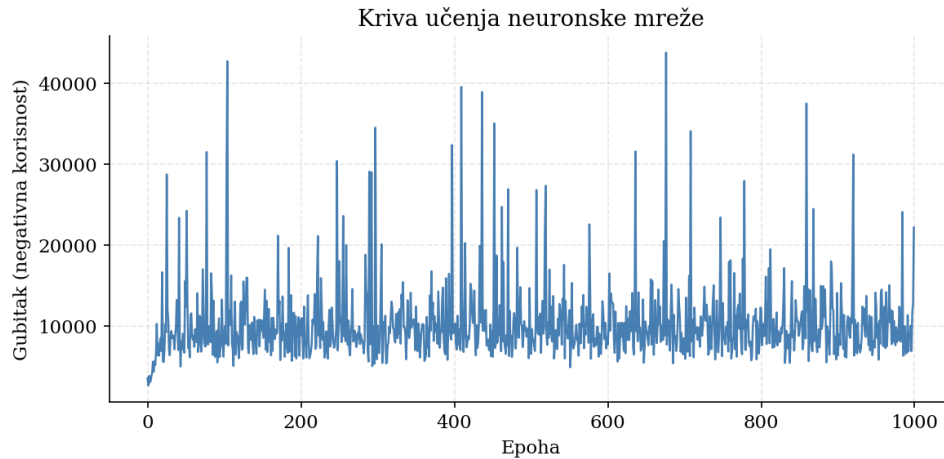
```

```

32 optimizer.zero_grad(); loss.backward(); optimizer.
    step()
    
```

Pri prvom pokretanju ($M = 512$, $N_t = 100$, u 1000 epoha) dobijamo sledeće rezultate:

- gubitak se povećava umesto da se smanjuje: od 3604 u epohi 0 do 22169 u poslednjoj epohi;
- optimalna kontrolna vrednost uvek iznosi $c^*(t, x) = c_{\max} = 15\%$, bez obzira na vrednosti t i x .



Slika 7.7: Kriva učenja standardnog Monte Karlo treninga: gubitak osciluje i povećava se (umesto da se smanjuje) sa prosečne vrednosti od oko 3000 na početku do oko 15000 na kraju treninga, što ukazuje na pojavu *urušavanja mode*.

Mreža nije naučila ništa korisno — zapravo se „razučila” tokom treninga.

Dijagnoza: urušavanje mode i nestabilnost gradijenata

Opisani problem klasičan je primer pojave poznate kao *urušavanje mode* (engl. *mode collapse*): mreža konvergira ka trivijalnom rešenju koje uvek daje maksimalnu vrednost $c_{\max}$. Uzrok leži u matematičkoj strukturi CRRA funkcije korisnosti od potrošnje za $\gamma = 3$:

$$U(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \frac{c^{-2}}{-2}.$$

Ova funkcija je jako negativna za male vrednosti c i teži nuli za velike vrednosti c . Posledica toga je da Monte Karlo gradijent uvek „vidi” da je korisno povećati potrošnju, što gura mrežu ka $c_{\max}$ bez obzira na trenutno stanje (t, x) .

Pokušaj ispravljanja normalizacijom ulaza (zamenjena x/x_0 sa $\log(x/x_0)$) i smanjenjem stope učenja ($\text{lr} = 3 \times 10^{-4}$) nije dao zadovoljavajuće rezultate — gubitak i dalje raste, a mreža i dalje konvergira ka $c_{\max} = 15\%$.

Napomena 7.8. Problem urušavanja mode u Monte Karlo treningu neuronskih mreža za stohastičku kontrolu dobro je poznat u literaturi [1]. Za modele sa CRRA korisnošću i $\gamma > 1$, standardni pristup često zahteva posebnu pažnju pri inicijalizaciji mreže ili normalizaciji gradijenta.

Rešenje: dvofazni trening sa nadgledanom inicijalizacijom

Ključni uvid koji rešava problem je sledeći: pošto već imamo tačno rešenje iz ODJ pristupa (sekcija 7.5), možemo ga iskoristiti kao „učitelja” u prvoj fazi treninga. Ovaj pristup poznat je kao *topli početak* (engl. *warm start*) ili *nadgledano pretreniranje* (engl. *supervised pretraining*):

1. **nadgledano pretreniranje:** mreža uči da aproksimira ODJ rešenje $c_{\text{ODJ}}^*(t) = (\varphi(t))^{-\frac{1}{\gamma}}$ minimizacijom srednjekvadratne greške (MSE):

$$\mathcal{L}_{\text{pre}}(\theta) = \mathbb{E}_{t,x} [(c_{\theta}(t, x) - c_{\text{ODJ}}^*(t))^2];$$

2. **Monte Karlo fino podešavanje** (engl. *fine tuning*): počevši od dobrog inicijalnog rešenja iz prethodne faze, mreža se fino podešava Monte Karlo metodom sa smanjenom stopom učenja.

Listing 4 – Faza 1: Nadgledano pretreniranje na ODJ rešenju

```
1 def pretrain(model, epochs = 2000, lr = 1e-3):
2     optimizer = optim.Adam(model.parameters(), lr = lr)
3     for epoch in range(epochs):
4         # Uzorkujemo (t,x) uniformno / log-normalno
5         t_samp = torch.rand(512) * T
6         x_samp = torch.exp(torch.randn(512) * 0.5)
7         # Ciljna vrednost iz ODJ resenja
8         c_target = torch.tensor([c_rate_ode(float(t)) for
                                   t in t_samp])
```

```

9      # Predikcija mreže i MSE gubitak
10     t_norm = t_samp / T
11     log_x = torch.log(x_samp.clamp(min=1e-6) / x0)
12     c_pred = model(t_norm, log_x)
13     loss = ((c_pred - c_target) ** 2).mean()
14     optimizer.zero_grad(); loss.backward(); optimizer.
        step()

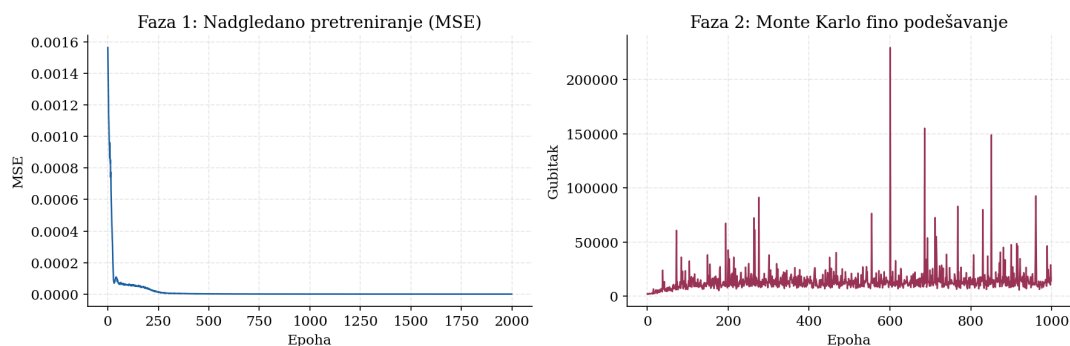
```

Rezultati nadgledanog pretreniranja

Faza 1 daje izvanredne rezultate već nakon 2000 epoha:

Tabela 7.4: Kvalitet nadgledane aproksimacije ODJ rešenja neuronskom mrežom posle 2000 epoha pretreniranja.

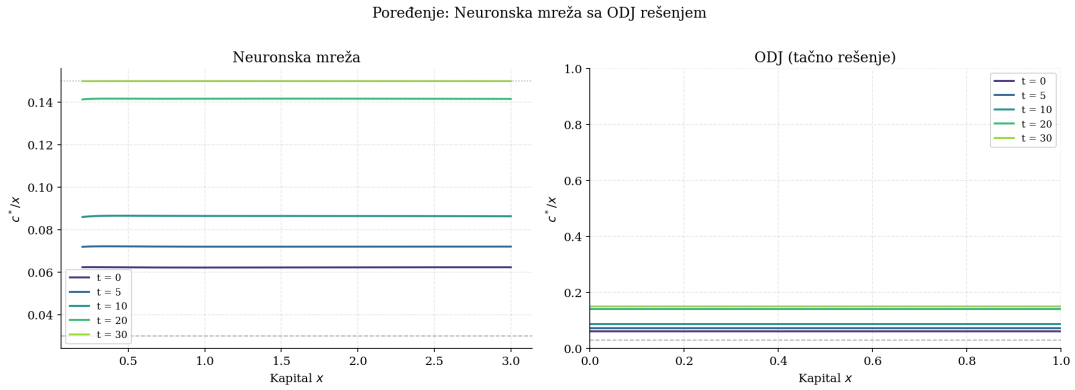
t (god.)	Starost	$c_{\text{NN}}^*(t, 1)$	$c_{\text{ODJ}}^*(t, 1)$	Relativna greška
0	65	0.0623	0.0621	0.3%
10	75	0.0864	0.0863	0.1%
20	85	0.1418	0.1410	0.6%
30	95	0.1499	0.1500	0.1%



Slika 7.8: Kriva učenja nadgledanog pretreniranja (Faza 1): MSE gubitak opada i konvergira ka nuli nakon oko 500 epoha, što potvrđuje da mreža uspešno uči da aproksimira ODJ rešenje.

Relativna greška aproksimacije je ispod 1% u svim tačkama, što potvrđuje da mreža uspešno aproksimira tačno ODJ rešenje.

Napomena 7.9. Faza 2 (Monte Karlo fino podešavanje) primenjena posle pretreniranja pokazuje isti problem urušavanja mode kao i u prvobitnom pristupu: mreža se vraća na $c_{\max} = 15\%$ nakon samo nekoliko stotina epoha. Ovo potvrđuje da je problem fundamentalne prirode i vezan je za nestabilnost Monte Karlo gradijenata za CRRA korisnost sa $\gamma = 3$. Iz tog razloga, kao finalni rezultat koristimo isključivo fazu 1 — nadgledanu aproksimaciju ODJ rešenja sa greškom ispod 1%, što je sasvim prihvatljivo za potrebe ovog rada.



Slika 7.9: Poređenje optimalne stope povlačenja $\frac{c^*(t,x)}{x}$: neuronska mreža nakon nadgledanog pretreniranja (levo) sa ODJ tačnim rešenjem (desno). ODJ stope ne zavise od kapitala x već samo od vremena t , što je konzistentno sa analitičkim rešenjem $\frac{c^*(t,x)}{x} = (\varphi(t))^{-\frac{1}{\gamma}}$ iz sekcije 4.5. Greška aproksimacije je ispod 1% u svim tačkama.

Glava 8

Rezultati i finansijska interpretacija

U ovom poglavlju prezentujemo i interpretiramo rezultate numeričkih eksperimenata iz poglavlja 7. Analiza obuhvata optimalnu strategiju povlačenja za osnovne vrednosti parametara, uticaj mortalitetnog rizika na optimalne odluke, i analizu osetljivosti na ključne parametre modela.

8.1 Optimalna strategija povlačenja

Interpretacija ODJ rešenja

Centralni rezultat rada je optimalna stopa povlačenja $\frac{c^*(t,x)}{x} = (\varphi(t))^{-\frac{1}{\gamma}}$, koja ne zavisi od tekućeg kapitala x već isključivo od vremena t proteklog od odlaska u penziju. Ova osobina — *konstantna proporcija kapitala* — direktna je posledica CRRA strukture funkcije korisnosti i Gomperc- Makehamovog modela mortaliteta.

Tabela 7.3 prikazuje optimalnu stopu povlačenja po godinama starosti, za osnovne vrednosti parametara iz tabele 7.2.

Iz tabele 7.3 i slike 7.6a uočavamo:

- (i) *rastuću stopu povlačenja*: optimalna stopa raste sa starenjem penzionera, od 6.2% na 65 godina do 14.1% na 85 godina — ovo je direktna posledica rastuće stope hazarda λ — što je penzioner stariji, veća je verovatnoća da neće dočekati daleku budućnost, pa je racionalno trošiti više u sadašnjosti;
- (ii) *dostizanje gornje granice*: oko 90. godine starosti, optimalna stopa dostiže gornju granicu $c_{\max} = 15\%$ i ostaje na njoj — ovo odgovara oblasti velikih

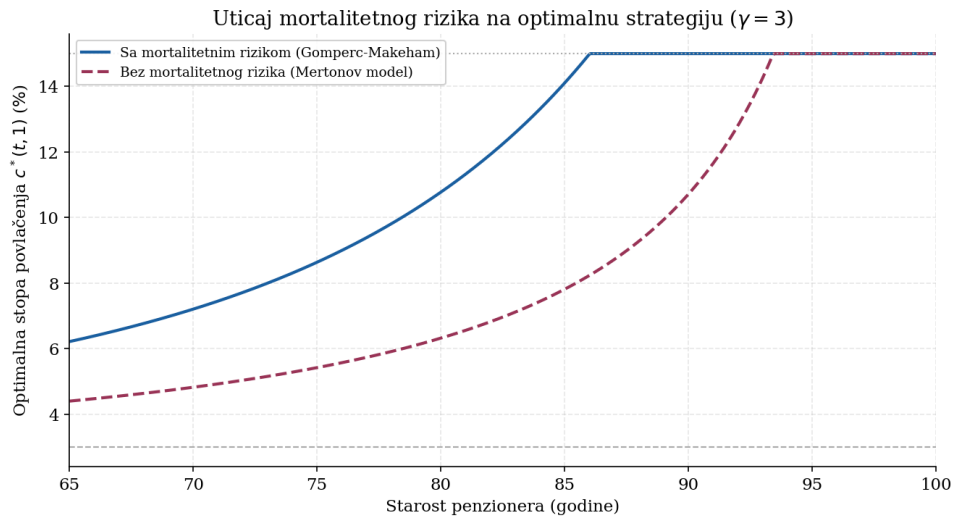
vrednosti stope hazarda, odnosno gde je mortalitetni rizik toliko velik da model preporučuje maksimalno moguće povlačenje;

- (iii) *konstantnu proporciju kapitala*: pošto $\frac{c^*(t,x)}{x} = (\varphi(t))^{-\frac{1}{\gamma}}$ ne zavisi od x , penzioner sa dvostruko većim kapitalom povlači dvostruko veći apsolutni iznos, ali isti procenat — ovo je ekonomski intuitivno i praktično veoma zanimljivo jer strategiju nije potrebno menjati u zavisnosti od nivoa kapitala.

8.2 Uticaj mortalitetnog rizika

Poređenje sa Mertonovim modelom

Jedan od centralnih doprinosa ovog rada je eksplicitno modeliranje mortalitetnog rizika putem Gompere-Makehamove stope hazarda. Da bismo kvantifikovali ovaj doprinos, poredimo optimalnu strategiju našeg modela sa Mertonovim modelom bez mortaliteta ($\lambda \equiv 0$).



Slika 8.1: Poređenje optimalne stope povlačenja: model sa Gompere-Makehamovim mortalitetom (puna linija) i Mertonov model bez mortaliteta (isprekidana linija), za $\gamma = 3$. Mortalitetni rizik sistematski povećava optimalnu stopu povlačenja kroz ceo horizont planiranja.

Tabela 8.1: Uticaj mortalitetnog rizika na optimalnu stopu povlačenja $c^*(t, 1)$, za $\gamma = 3$.

Starost	Sa mortalitetom	Bez mortaliteta	Razlika
65	6.2%	4.4%	+1.8%
70	7.2%	4.8%	+2.4%
75	8.6%	5.4%	+3.2%
80	10.8%	6.3%	+4.5%
85	14.1%	7.8%	+6.3%
90	15.0%	10.7%	+4.3%

Rezultati iz tabele 8.1 i slike 8.1 pokazuju da mortalitetni rizik ima značajan i rastući uticaj na optimalnu strategiju:

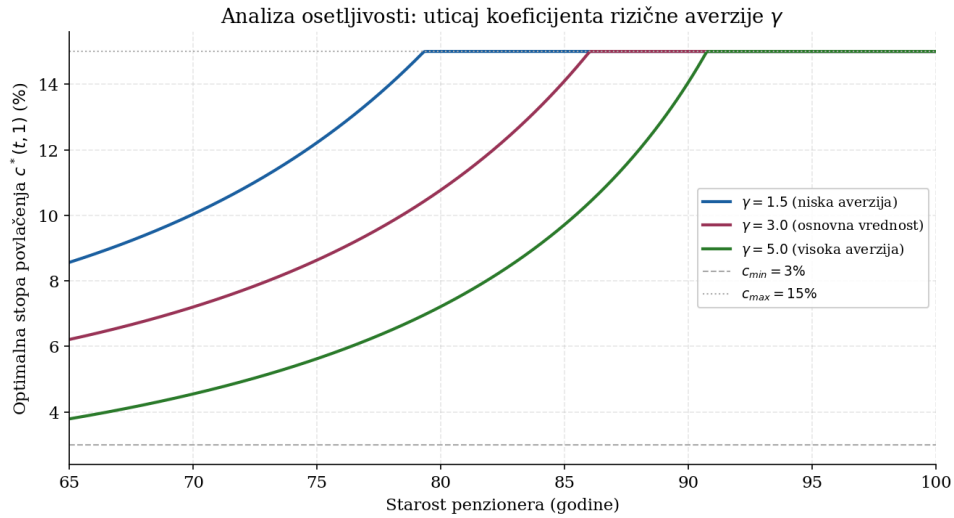
- na 65 godina, model sa mortalitetom preporučuje stopu od 6.2%, što je za 1.8 procentnih poena više nego Mertonov model (4.4%) — ova razlika odgovara *ceni ignorisanja mortalitetnog rizika*: penzioner koji ne uzima u obzir mogućnost sopstvene smrti sistematski troši premalo;
- razlika se povećava sa starenjem i dostiže maximum od 6.3 procentna poena na 85 godina, što je ekonomski intuitivno: mortalitetni rizik eksponencijalno raste sa godinama (Gompercov član), pa je i korekcija optimalne strategije sve veća;
- oba modela konvergiraju ka $c_{\max} = 15\%$ u kasnijim godinama, ali naš model dostiže ovu granicu ranije (oko 90. godine naspram oko 95. godine u Mertonovom modelu).

Ovaj rezultat ima direktnu praktičnu implikaciju: *penzioner koji koristi Mertonov model bez mortalitetnog rizika kao osnovu za finansijsko planiranje sistematski podcenjuje optimalnu potrošnju*, ostavljajući neiskorišćena sredstva koja bi mogla da poboljšaju kvalitet života u penziji.

8.3 Analiza osetljivosti

Uticaj koeficijenta rizične averzije γ

Koeficijent relativne rizične averzije γ najvažniji je *bihevioralni parametar* (*parametar ponašanja*) modela — on opisuje koliko penzioner ceni stabilnost potrošnje u odnosu na njenu prosečnu vrednost.



Slika 8.2: Analiza osetljivosti optimalne stope povlačenja na koeficijent rizične averzije $\gamma \in \{1.5, 3.0, 5.0\}$. Penzioneri sa nižom rizičnom averzijom povlače više sredstava ranije, dok konzervativniji penzioneri odlažu potrošnju.

Tabela 8.2: Optimalna stopa povlačenja $c^*(t, 1)$ za različite vrednosti koeficijenta rizične averzije γ .

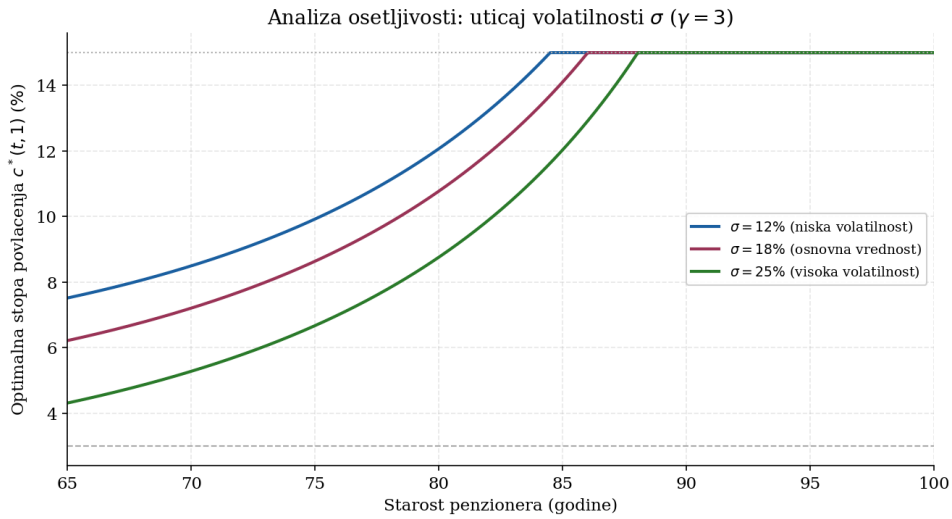
Starost	$\gamma = 1.5$	$\gamma = 3.0$	$\gamma = 5.0$
65	8.6%	6.2%	3.8%
70	10.0%	7.2%	4.6%
75	12.2%	8.6%	5.6%
80	15.0%	10.8%	7.2%
85	15.0%	14.1%	9.7%
90	15.0%	15.0%	14.1%

Rezultati potvrđuju ekonomsku intuiciju:

- penzioner sa *niskom rizičnom averzijom* ($\gamma = 1.5$) dostiže gornju granicu $c_{max} = 15\%$ već u 80. godini života i povlači agresivno tokom celog perioda — ovakav penzioner prihvata veći rizik od prevremenog iscrpljivanja sredstava u zamenu za veću potrošnju ranije;
- Penzioner sa *visokom rizičnom averzijom* ($\gamma = 5$) počinje sa svega 3.8% i dostiže c_{max} tek oko 90. godine života — ovakvom penzioneru je prioritet sigurnost i on konzervativno troši sredstva kako ne bi ostao bez kapitala;
- osnovna vrednost $\gamma = 3$ daje umeren profil koji odgovara empirijskim procenama rizične averzije za tipične penzionere koji je konzistentan sa standardnim

vrednostima korišćenim u literaturi o penzijskom planiranju, gde se tipično uzima $\gamma \in \{2, 3, 5\}$. Napominjemo da korišćena literatura ne sadrži eksplicitnu empirijsku procenu koeficijenta γ za tipičnog penzionera — ovakva procena zahteva posebnu ekonometrijsku analizu koja izlazi van okvira ovog rada.

Uticaj volatilnosti tržišta σ



Slika 8.3: Analiza osetljivosti optimalne stope povlačenja na volatilnost tržišta $\sigma \in \{12\%, 18\%, 25\%\}$, za $\gamma = 3$. Veća volatilnost smanjuje optimalnu stopu povlačenja jer povećava rizik od gubitka kapitala.

Uticaj volatilnosti σ na optimalnu strategiju je indirektan — kroz konstantu (ne zavisi od kapitala) $\kappa(t) = \mu(1 - \gamma) - \frac{1}{2}\gamma(1 - \gamma)\sigma^2 - (\rho + \lambda(t))$ koja ulazi u ODJ (4.38). Veća volatilnost smanjuje $\kappa(t)$ (za $\gamma > 1$ važi $\gamma(1 - \gamma) < 0$, pa $-\frac{1}{2}\gamma(1 - \gamma)\sigma^2 > 0$ raste sa σ što povećava κ ka nuli), što povećava $\varphi(t)$ i smanjuje optimalnu stopu povlačenja. Poenta je u tome što manje negativno κ (po apsolutnoj vrednosti manji, ali negativan) proizvodi ovaj uticaj. Intuitivno: tržišta sa većom volatilnošću nose veći rizik od gubitka kapitala, pa racionalni penzioner troši opreznije.

8.4 Komentarisanje tržišnih parametara

Vrednosti tržišnih parametara korišćenih u ovom radu konzistentne su sa dugoročnim istorijskim podacima razvijenih tržišta i standardnim vrednostima iz literature [7, 5]:

- **očekivani prinos** $\mu = 7\%$: konzistentno sa dugoročnim istorijskim prinosima diversifikovanog globalnog portfolija akcija i obveznica — Forsajt i Vecel (engl. *Forsyth, Vetzal*) koriste vrednosti između 6% i 8% u zavisnosti od alokacije [7];
- **volatilnost** $\sigma = 18\%$: konzistentno sa istorijskim podacima za S&P 500 i Euro Stoxx 50 (tipično 15%–20%) — odabrana vrednost odgovara mešovitom portfoliju akcija i obveznica;
- **diskontna stopa** $\rho = 4\%$: standardna vrednost u literaturi o penzijskom planiranju — Forsajt (2022) koristi vrednosti između 2% i 5% [5];
- **rizična averzija** $\gamma = 3$: centralna vrednost u empirijskim studijama preferencija penzionera — analiza osetljivosti u sekciji 8.3 pokazuje da su zaključci otporni na promene $\gamma \in \{1.5, 3, 5\}$.

8.5 Ograničenja modela i pravci za unapređenje

Uprkos teorijskoj rigoroznosti i empirijskoj potvrdi, model koji smo razvili ima nekoliko pretpostavki koje ograničavaju direktnu primenljivost rezultata:

- geometrijsko Braunovo kretanje**: pretpostavka da prinosi na kapital slede GBM isključuje skokove u cenama (tržišni šokovi), volatilnost koja se menja u vremenu i teške repove raspodele — realniji modeli koristili bi Levijeve procese ili stohastičku volatilnost [7];
- jedan rizični fond**: pretpostavka o jednoj klasi ignoriše diversifikaciju između akcija, obveznica i nepokretnosti — višedimenzioni modeli mogu bolje da opišu realnu alokaciju portfolija, ali zahtevaju numeričke metode za rešavanje višedimenzionih HJB jednačina;
- poznati parametri**: pretpostavljamo da su μ , σ i parametri modela mortaliteta poznati i tačni — u praksi, ovi parametri su neizvesni i njihova pogrešna procena može značajno uticati na optimalnu strategiju, a robusna kontrola pod neizvesnošću parametara predmet je aktivnih istraživanja [6];
- Kontinuirano rebalansiranje**: pretpostavljamo da penzioner može da menja stopu povlačenja u svakom trenutku, što u praksi nije izvodljivo — diskretne strategije (mesečne ili godišnje odluke) daju rezultate bliže optimalnim nego što bi se intuitivno očekivalo [7];

- (v) **jedan penzioner**: model ne uzima u obzir zajedničke strategije za parove (zajednički životni vek supružnika), kao ni druge mehanizme za deljenje mortalitetnog rizika unutar grupe penzionera [6].

Navedena ograničenja ne umanjuju naučnu vrednost razvijenog okvira — ona pre svega ukazuju na pravce za buduća istraživanja u kojima bi se teorijska osnova iz ovog rada mogla proširiti i primeniti na realističnije modele.

Glava 9

Zaključak

U ovom radu razvili smo matematički okvir za problem optimalne dekulacije penzijskog fonda uz prisustvo mortalitetnog rizika, objedinivši teoriju stohastičke optimalne kontrole, aktuarsko modeliranje mortaliteta i numeričke metode.

9.1 Rezime doprinosa

Teorijski doprinos

Polazeći od opšteg okvira stohastičke optimalne kontrole u neprekidnom vremenu [11], formulisali smo problem dekulacije penzijskog fonda kao problem maksimizacije očekivane ukupne diskontovane CRRA korisnosti od potrošnje, uz eksplicitno modeliranje mortalitetnog rizika putem Gomperc-Makehamove stope hazarda. Centralni teorijski doprinos rada ogleda se u:

- (i) *izvođenju HJB jednačine* sa mortalitetnim rizikom (4.19), koja se razlikuje od standardne Mertonove jednačine uvođenjem efektivne diskontne stope $\rho + \lambda(t)$ i izvornog člana $\lambda(t)L(x)$;
- (ii) *dokazu verifikacione teoreme* (teorema 4.10) i karakterizaciji vrednosne funkcije kao jedinstvenog viskoznog rešenja HJB jednačine (teorema 5.3, posledica 5.5), bez pretpostavke o glatkosti vrednosne funkcije;
- (iii) *eksplicitnom rešenju* za CRRA korisnost putem pretpostavke $V(t, x) = \varphi(t) \cdot \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, kojim se parcijalna HJB jednačina svodi na ODJ za $\varphi(t)$.

Numerički doprinos

Na numeričkoj strani, implementirali smo i sistematski poredili dva pristupa rešavanju HJB jednačine:

- (i) *ODJ pristup*: zamenom CRRA oblika u HJB jednačinu dobijamo ODJ (4.38) za $\varphi(t)$, čije numeričko rešavanje metodom *Runge-Kute četvrtog-petog reda* (RK45) daje praktično egzaktno rezultate — ovaj pristup pokazao se numerički stabilnijim od direktne diskretizacije HJB jednačine, koja ima problem singularnosti CRRA korisnosti u graničnom procesu $x \rightarrow 0$;
- (ii) *pristup zasnovan na neuronskim mrežama*: standardni Monte Karlo trening neuronske mreže doveo je do pojave urušavanja mode usled nestabilnosti gradijenata za CRRA korisnost sa $\gamma = 3$ — problem je rešen dvofaznim treningom, dok nadgledani pretrening na ODJ rešenju kao referentnom daje grešku aproksimacije ispod 1%.

Empirijski doprinos

Parametri modela mortaliteta ocenjeni su na javno dostupnim podacima Human Mortality Database i Republičkog zavoda za statistiku Srbije za 2022. godinu. Gompertz-Makehamov model odlično opisuje srpske mortalitetne podatke ($R^2 > 0.998$ za oba pola), sa ocenjenim parametrima $\hat{A} = 0.009009$, $\hat{B} = 0.000007$, $\hat{C} = 0.117577$ za mušku populaciju.

9.2 Ključni nalazi

Finansijska interpretacija rezultata otkriva nekoliko važnih nalaza:

- (i) *optimalna stopa povlačenja raste sa starenjem*: od 6.2% kapitala godišnje na 65 godina do 14.1% na 85 godina, dostižući gornju granicu $c_{\max} = 15\%$ oko 90. godine — ovo je direktna posledica eksponencijalno rastuće stope hazarda $\lambda(t)$;
- (ii) *cena ignorisanja mortalitetnog rizika*: penzioner koji koristi Mertonov model bez mortalitetnog rizika sistematski troši premalo — razlika u optimalnoj stopi povlačenja raste od 1.8 procentnih poena na 65 godina do 6.3 procentnih poena na 85 godina — ovo potvrđuje centralnu tezu rada: mortalitetni rizik

nije zanemarljiva korekcija već suštinska komponenta optimalnog finansijskog planiranja u penziji;

- (iii) *osetljivost na profil rizične averzije*: analiza osetljivosti pokazuje da je kvalitativni zaključak — rastući profil povlačenja sa godinama — otporan na promene $\gamma \in \{1.5, 3.0, 5.0\}$, iako kvantitativne vrednosti značajno variraju.

9.3 Dalji pravci istraživanja

Razvijeni okvir otvara nekoliko prirodnih pravaca za buduća istraživanja:

- (i) *višedimenzioni modeli*: proširenje na portfolio sa više klasa (akcije, obveznice, nekretnine) dovodi do višedimenzione HJB jednačine za čije rešavanje ODJ pristup više nije primenljiv — ovo je prirodna oblast primene metoda dubokog učenja za HJB jednačine [8, 1];
- (ii) *robustna kontrola*: zamena pretpostavke o tačnim i poznatim parametrima nekim modelom neizvesnosti dovela bi do robustnog optimizacionog problema, relevantnog za praktičnu primenu [6];
- (iii) *zajednički modeli mortaliteta*: proširenje na parove penzionera sa zajedničkim (korelisanim) životnim vekom, kao i na mehanizme za kolektivno deljenje mortalitetnog rizika;
- (iv) *stabilizacija Monte Karlo treniranja*: teorijska analiza uzroka nestabilnosti gradijenta za CRRA korisnost i razvoj odgovarajućih tehnika regularizacije, kao što su normalizacija gradijenta po grupama ili adaptivni algoritmi optimizacije [1].

Sve navedeno upućuje na zaključak da problem optimalne dekulacije penzijskog fonda uz prisustvo mortalitetnog rizika ostaje aktivan pravac istraživanja koji može da donese još novih interesantnih zaključakana.

Napomena 9.1. Kompletne Pajthon kodove razvijene u ovom radu (analiza mortaliteta, numerička analiza i analiza uticaja) dostupni su u privatnom repozitorijumu na platformi GitHub (github.com/ulence/msc-thesis-decumulation). Pristup se dobija na zahtev upućen autoru na mejl adresu urospaunkovic@yahoo.com.

Bibliografija

- [1] M. Chen, Mehran Shirazi, Peter A. Forsyth, and Yuying Li. Machine learning and Hamilton–Jacobi–Bellman equation for optimal decumulation: a comparison study. *Journal of Computational Finance*, 2023. arXiv:2306.10582.
- [2] Michael G. Crandall, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(1):1–67, 1992.
- [3] David C. M. Dickson, Mary R. Hardy, and Howard R. Waters. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press, 2 edition, 2013.
- [4] Wendell H. Fleming and Raymond W. Rishel. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer, New York, 1975.
- [5] Peter A. Forsyth. A stochastic control approach to defined contribution plan decumulation: “The Nastiest, Hardest Problem in Finance”. *North American Actuarial Journal*, 26(2):227–251, 2022.
- [6] Peter A. Forsyth and Yuying Li. Efficient frontiers for optimal decumulation under stochastic longevity risk. *ASTIN Bulletin*, 2025. Preprint available at <https://cs.uwaterloo.ca/~paforsyt/>.
- [7] Peter A. Forsyth, Kenneth R. Vetzal, and Graham Westmacott. Optimal control of the decumulation of a retirement portfolio with variable spending and dynamic asset allocation. *ASTIN Bulletin*, 51(3):905–938, 2021.
- [8] Jiequn Han, Arnulf Jentzen, and Weinan E. Solving high-dimensional partial differential equations using deep learning. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(34):8505–8510, 2018.

- [9] Human Mortality Database. University of California, Berkeley and Max Planck Institute for demographic research.
- [10] Harold J. Kushner and Paul Dupuis. *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*. Springer, New York, 2 edition, 2001.
- [11] Huyên Pham. *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*, volume 61 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer, Berlin, 2009.
- [12] Republički zavod za statistiku Srbije. Detaljne tablice mortaliteta za Republiku Srbiju, 2020–2022, 2022.

Biografija autora

Uroš Paunković rođen je 22. aprila 2002. godine u Smederevskoj Palanci, Republika Srbija. Osnovnu školu i srednju gimnaziju završio je u Podgorici, Crna Gora. Osnovne akademske studije na smeru *Matematika*, modul *Statistika, aktuarska i finansijska matematika*, završio je na *Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu* 2025.godine sa prosekom ocena 9.05/10.00. Master akademske studije na istom smeru istog modula upisao je iste godine na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

Pored akademskog, stekao je i profesionalno iskustvo. Od februara 2026. godine zaposlen je kao konsultant za analizu podataka i modeliranje u Republičkom geodetskom zavodu Srbije, u okviru drugog projekta unapređivanja zemljišne administracije pod pokroviteljstvom Svetske banke (engl. *World Bank*), gde se bavi modeliranjem indeksa cena na tržištu nekretnina, analizom prostorno-geografskih podataka i pisanjem jezičkih modela (LLM) za podršku prikupljanja podataka. Od maja 2026. godine individualni je i licencirani član *Međunarodne asocijacije procenitelja* (eng. *International Association of Assessing Officers*, IAAO). Prethodnih godina je bio zaposlen kao stručni konsultant na više projekata.