

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Ана Антић

КОМБИНАТОРНИ ПРОБЛЕМИ У
СТОХАСТИЧКИМ ИГРАМА

мастер рад

Београд, 2026.

Ментор:

др Марија Цупарић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Бојана Милошевић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Јелена Јоцковић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Наслов мастер рада: Комбинаторни проблеми у стохастичким играма

Резиме: Стохастичке игре представљају важан концепт у примени теорије вероватноће, у којем се динамика система одвија кроз низ случајних прелаза између стања. Посебно су интересантни модели у којима је простор одлука коначан, јер омогућавају фокус на анализу вероватносних механизма, расподела и дугорочног понашања система. Ова тема је значајна јер повезује комбинаторику и стохастичке процесе у контексту игара и пружа могућност за формално проучавање дискретних модела са богатом математичком структуром. Детаљно ће бити обрађене слот игре, што, на пример, подразумева израчунавање броја могућих добитних комбинација, анализу вероватноће добитка, разматрање промена стања у игри у зависности од различитих параметара, моделирање очекиваног добитка, ентропије и волатилности. Такође ће бити приказани и примери где одлука играча утиче на очекивани добитак.

Кључне речи: Марковљеви ланци, комбинаторика, очекивани добитак, бонус игре, стратегије играња

Садржај

1	Увод	1
1.1	Историјски развој теорије вероватноће и игара на срећу	1
1.2	Развој слот машина	3
1.3	Савремени контекст	4
2	Теоријске основе	5
2.1	Слот игра као стохастичка игра	9
2.2	Појмови посебно везани за стохастичке игре	22
3	Решавање комбинаторних проблема	25
3.1	Основна игра	25
3.2	Класични бонуси	37
3.3	Игре са стратегијом	52
4	Закључак	61
5	Кодови	63
	Библиографија	73

Глава 1

Увод

1.1 Историјски развој теорије вероватноће и игара на срећу

Интересовање људи за случајност и вероватноћу постоји још од праисторијских времена. Један од најранијих облика игара на срећу били су *астрагали* — примитивне коцке направљене од костију животињских папака, које датирају из око 3600. године пре нове ере. Ове коцке су имале две заобљене стране и четири равне површине, па су се у играма користиле само равне стране, што је давало четири могућа исхода. Играње оваквим коцкама било је распрострањено у древном Египту, Вавилону, Риму, па и код Етрушћана, који су користили икосаедре са пентагоналним странама.

Према римском историчару Светонију, цар Август био је страствени коцкар. Он је играо игру у којој се бацало четири астрагала, а победник је био онај ко добије сва четири различита броја — комбинацију која се називала „Венера“. Шестострана коцка, какву данас познајемо, у употреби је већ више од 4000 година.

Игре на срећу биле су популарне и у древној Кини и Индији. Индијски математичари су већ у 3. веку пре нове ере разматрали питања вероватноће, али најчешће у религиозном контексту.

Први значајан математички приступ играма на срећу потиче од италијанског математичара Ђиролама Кардана (1501–1576), који је написао дело *Liber de ludo aleae* („Књига о бацању коцке“)[4]. Ту Кардано анализира вероватноће добитака и даје савете — чак и како да се вара у играма. Он је први формално

дефинисао вероватноћу као однос броја повољних и броја могућих исхода, и израчунао да је вероватноћа да се добије било који број на поштеној коцки једнака $1/6$.

Прави почетак формалне теорије вероватноће везује се за 17. век и дописивање између Блеза Паскала и Пјера Ферма. Њихова преписка [1], подстакнута проблемима које је поставио коцкар Шевалије де Мере, представља темељ комбинационе вероватноће. Де Мере је, на пример, тврдио да ће у четири бацања коцке добити бар једну шестлицу, јер је „вероватноћа једнака $4/6$ “. Иако је његов рачун био погрешан, у пракси је често добијао, јер је стварна вероватноћа да се бар једном добије шестлица у четири бацања око 52%:

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.52.$$

Када је покушао да прошири игру на две коцке и 24 бацања, тврдећи да ће добити бар један пар шестлица, изгубио је велики новац. Обратио се Паскалу, који је затим укључио Ферма у решавање проблема. Они су показали да је вероватноћа да се у 24 бацања добије бар један пар шестлица приближно 49%:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.49,$$

што значи да је вероватније да ће изгубити него добити, па се не исплати кладити се на тај исход.

Де Мере је погрешно мислио да ако је вероватноћа у једном бацању $1/6$, онда је у два бацања $2/6$, а у четири бацања $4/6$, што очигледно није тачно јер би то значило да би у шест бацања са вероватноћом $6/6 = 1$ увек добио шестлицу, што се не дешава. Он је хтео шансу од 60%, што би стварно постигао у пет бацања, јер је

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.6.$$

Решавањем једначине $1 - (5/6)^n > 0.5$ добија се $n > 3$, па му се клађење за четири бацања исплатило. У случају две коцке је резеновао слично и мислио да се вероватноћа добитка шестлице у једном бацању множи са бројем бацања. Желео је шансу $24/36 = 4/6$, али је стварна вредност мања од 0.5. Решењем једначине $1 - (35/36)^n > 0.5$ добија се $n > 24$, што значи да би му се тек са 25 бацања благо исплатило клађење:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} \approx 0.5055,$$

а његова жељена шанса од 60% би се постигла за $n \approx 32.5$, односно за 32 или 33 бацања.

Касније је Кристијан Хајгенс систематизовао њихове резултате, а Јакоб Бернули их је додатно развио. Тако је, кроз сарадњу коцкара и математичара, настала модерна теорија вероватноће.

1.2 Развој слот машина

Сарадња коцкара и математичара наставила се до данашњих дана. Модерне игре на срећу и даље представљају извор занимљивих математичких проблема, којима ћемо се даље бавити. Слот машина је један од најпрепознатљивијих симбола индустрије игара на срећу. Током година, ове машине су стекле глобалну популарност и постале неизоставан део готово сваког казина. Њихова основна структура подразумева екран са три или више **рилова (бубњева)** који се окрећу након активације игре. Назив „слот машина“ потиче од отвора (енгл. *slot*) који служи за убацивање и преузимање новчића.

Прва позната машина која се сматра претечом модерних слот игара настала је 1891. године у Њујорку, а конструисали су је Ситман и Пит. Била је заснована на покеру и садржала је пет бубњева са укупно педесет карата. Играчи су убацивали новчић и повлачили ручицу, чиме би се активирало окретање бубњева.

Године 1963. компанија *Bally* представила је прву потпуно електромеханичку слот машину. Већ 1976. године развијена је прва видео слот машина, а 1996. појавила се *Reel 'Em In* — прва видео слот игра са бонус екраном.

Савремене слот машине су у потпуности електронске и користе виртуелне бубњеве. Уместо механичких делова, оне користе генераторе случајних бројева (RNG- random number generator). Такве технологије омогућавају сложене графичке приказе и динамичне анимације, чиме се значајно унапређује корисничко искуство.

Игра почиње тако што играч убацује новац, жетон или ваучер са баркодом, а затим активира игру притиском на дугме или повлачењем ручице. Бубњеви се окрећу и заустављају, при чему се симболи ређају на екрану. Уколико се појави добитна комбинација, играч добија кредите у складу са табелом исплате.

Раније су слот машине карактеристисали механичка ручица са стране, отвор за убацивање новчића и табела исплате са бројем кредита, док модерне карактеристишу генератор случајних бројева (RNG), тач-скрин или дугмад и сензор за препознавање различитих облика уплате (новчић, новчаница, жетон, ваучер). Када се кликне на дугме, игра се покреће и то једно одигравање се назива **спин**.

1.3 Савремени контекст

Са појавом дигиталне технологије, слот игре су добиле бројне варијације. Данас се често играју као видео игре, укључујући и онлајн верзије. Слот машина је данас најзаступљенији облик коцкања у казинима, чинећи око 70% укупног прихода просечног казина.

Од првих механичких машина до савремених дигиталних система, слот игре су одиграле значајну улогу у развоју индустрије игара на срећу. Математика је кључна за прављење таквих игара јер се вероватноћа добитака мора унапред израчунати да би они који праве игре остварили жељени профит.

Ово поглавље је написано на основу литературе [1]–[4].

Глава 2

Теоријске основе

Стохастичке игре су тип математичких модела у којима се одлуке доносе у окружењу које укључује случајност (вероватноћу), при чему исходи зависе и од избора играча и од случајних фактора. У сваком кораку, играчи бирају акције, што доводи до преласка у ново стање (у складу са матрицом вероватноћа преласка), и добијају одговарајуће награде.

У теорији игара, *стохастичка игра* (или *Марковљева игра*) је понављајућа игра са вероватносним прелазима, коју игра један или више играча. Игра се одвија кроз низ фаза. На почетку сваке фазе, игра се налази у неком стању. Играчи бирају акције и сваки играч добија исплату која зависи од тренутног стања и изабраних акција. Након тога, игра прелази у ново, насумично стање, чија расподела зависи од претходног стања и изабраних акција играча. Овај поступак се понавља у новом стању, и игра се наставља током коначног или бесконачног броја фаза.

Укупна исплата за играча се често дефинише као дисконтована сума појединачних исплата по фазама, или као просек тих исплата током времена.

Стохастичке игре је увео Лојд Шепли (Lloyd Shapley) почетком 1950-их. Оне представљају проширење Марковљевих процеса одлучивања на више међусобно повезаних доносилаца одлука, као и проширење стратегијских игара на динамичке ситуације у којима се окружење мења у зависности од избора играча.

Да бисмо могли прецизније да објаснимо стохастичке игре и механизам њиховог функционисања, неопходно је најпре изложити неке резултате из области вероватноће, статистике и случајних процеса, које ћемо представити у овом поглављу.

Дефиниција 1. Догађаји E и F су независни ако важи:

$$P(E \cap F) = P(E)P(F).$$

Општије, догађаји $E_1, E_2, \dots, E_n$ ($n \geq 2$) су независни ако:

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_m}) = P(E_{i_1})P(E_{i_2}) \dots P(E_{i_m}),$$

када год је $2 \leq m \leq n$ и $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$.

Најзад, пребројиво бесконачна колекција догађаја $E_1, E_2, \dots$ је независна ако су $E_1, E_2, \dots, E_n$ независни за свако $n \geq 2$.

Дефиниција 2. Условна вероватноћа догађаја E под условом да се догодио догађај D дефинише се као:

$$P(E \mid D) := \frac{P(D \cap E)}{P(D)}, \quad (2.1)$$

под условом да је $P(D) > 0$.

Приметимо да, ако су D и E независни, онда важи $P(E \mid D) = P(E)$, тј. условна вероватноћа догађаја E под условом независног догађаја D једнака је (безусловној) вероватноћи догађаја E .

Теорема 1. Нека је I коначан или пребројиво бесконачан индексни скуп, и нека је $\{D_i, i \in I\}$ колекција међусобно искључивих догађаја чија унија има вероватноћу 1, и претпоставимо да је $P(D_i) > 0$ за свако $i \in I$. Ако је E догађај, онда важи:

$$P(E) = \sum_{i \in I} P(D_i)P(E \mid D_i). \quad (2.2)$$

Следећи резултат је познат као Бајесов закон.

Теорема 2. Претпоставимо, поред претпоставки Теореме 1, да је $P(E) > 0$. Тада важи:

$$P(D_j \mid E) = \frac{P(D_j)P(E \mid D_j)}{P(E)} = \frac{P(D_j)P(E \mid D_j)}{\sum_{i \in I} P(D_i)P(E \mid D_i)}, \quad (2.3)$$

за свако $j \in I$.

Дефиниција 3. Математичко очекивање дискретне случајне величине X , која може да узима коначан број вредности $x_1, x_2, \dots, x_k$ са одговарајућим вероватноћама $p_1, p_2, \dots, p_k$, дефинише се као:

$$\mathbb{E}[X] = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_kp_k.$$

У случају када случајна величина X има бесконачно много исхода, математичко очекивање се дефинише као:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

Дефиниција 4. Волатилност тј. стандардно одступање σ се дефинише као:

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mu)^2]},$$

где:

- X — случајна променљива,
- $\mu = \mathbb{E}[X]$ — очекивана вредност,
- $D(X)$ — дисперзија променљиве X .

Волатилност у слот играма волатилност представља меру варијабилности исхода, односно колико се добици разликују од просечног добитка током времена. Висока волатилност значи да игра има ретке, али велике добитке, док ниска волатилност подразумева чешће, али мање добитке.

Дефиниција 5. Фамилија случајних величина $X(t), t \in T$ дефинисана на истом простору вероватноће $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ са вредностима у истом мерљивом простору $(S, \mathcal{F})$, где је T бесконачан скуп, назива се **случајни процес**. Простор $(S, \mathcal{F})$ назива се **фазни простор случајног процеса**.

Дефиниција 6. Случајни процес је **процес Маркова** ако важи

$$P\{X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} \mid X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\} = P\{X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} \mid X(t_n) \leq x_n\},$$

за свако $x_1, x_2, \dots, x_n$ из S и свако $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, где је $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$.

За ланац Маркова кажемо да је *хомоген* ако вероватноће преласка не зависе од тренутка n , тј. ако важи

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) \quad \text{за свако } n \geq 0 \text{ и свака стања } i, j \in S.$$

У наставку ћемо подразумевати хомоген ланац Маркова у дискретном времену.

Дефиниција 7. За сваки пар стања $i, j \in S$ дефинишемо вероватноћу преласка

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

Матрица прелаза Марковљевог ланца у дискретном времену је

$$P = (p_{ij})_{i,j \in S}.$$

За њу важи

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \quad \text{за свако } i \in S.$$

Дефиниција 8. Стохастичка игра се дефинише као уређена петорка (S, A, P, r, γ) где су:

- S — скуп стања (коначан или бесконачан),
- A — скуп акција (одлуке које играчи могу да донесу),
- $P : S \times A \rightarrow \Delta(S)$ — функција прелаза, која сваком пару (s, a) додељује вероватносну расподелу наредног стања. Дакле, $P(s'|s, a)$ је функција преласка, односно вероватноћа да се из стања s прелази у s' након акције a ,
- $r(s, a)$ — функција награде: очекивана награда за акцију a у стању s ,
- γ — дисконтни фактор ($0 < \gamma \leq 1$), који одређује важност будућих награда.

Кључне карактеристике стохастичких игара:

- **Стохастичност:** Постоји елемент случајности у прелазима између стања.
- **Вишестепеност:** Игра се одвија у више корака, где сваки корак зависи од претходног.
- **Стратегија:** Играчи развијају стратегије које максимизују очекивану добит у односу на вероватноће и понашање других играча.

2.1 Слот игра као стохастичка игра

Слот игра се може формално описати као стохастичка игра дефинисана уређеном петорком (S, A, P, r, γ) где су:

1. **Стања S :** Представљају све могуће ситуације у којима се слот машина може наћи:
 - почетно стање (пре спина),
 - комбинације симбола након спина,
 - бонус рунде.
2. **Акције A :** Потези које играч може да направи:
 - притисни *спин*,
 - повећај/смањи улог.
3. **Вероватноћа прелаза $P(s'|s, a)$:** У слот игри, ово је дефинисано генератором случајних бројева (RNG). Ако играч притисне *спин*, постоји одређена вероватноћа да се појави добитна или губитна комбинација.
4. **Награда $r(s, a)$:** Награда је добитак (или губитак) након акције:
5. **Дисконтни фактор γ :** Означава колико играч вреднује будуће добитке:
 - близу 1 ако играч планира да игра дугорочно,
 - близу 0 ако га занима само тренутни исход.

Дисконтована сума награда је:

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n r_n,$$

где је r_n награда у n -тој рунди. У анализи слот игара често се користи $\gamma = 1$, јер се посматра укупан очекивани добитак.

Један поједностављен пример моделовања слот игре као стохастичке игре би изгледао овако:

$$S = \{\text{Почетно, Добитак, Губитак}\}, \quad A = \{\text{Одиграј, Крај}\}$$

Вероватноће прелаза:

$$P(\text{Добитак} \mid \text{Почетно, Одиграј}) = 0.2,$$

$$P(\text{Губитак} \mid \text{Почетно, Одиграј}) = 0.8.$$

Награде:

$$r(\text{Добитак, одиграј}) = +70,$$

$$r(\text{Губитак, одиграј}) = -10.$$

Ретко који играч одигра само једну рунду, најчешће их је више. Исходи у рундама су независни догађаји тј. вероватноћа добитка у наредној рунди не зависи од тога да ли је остварен добитак или губитак у претходној рунди.

Дефинишимо стања:

0 — почетак играња,

1 — добитак у рунди,

−1 — губитак у рунди.

A_n — број кредита који играч има у датом стању.

Вероватноће прелазака између стања:

$$(A_{n-1}, 0) \rightarrow (A_n, -1) \quad p = 0.8$$

$$(A_{n-1}, 0) \rightarrow (A_n, 1) \quad p = 0.2$$

$$(A_{n-1}, 1) \rightarrow (A_n, -1) \quad p = 0.8$$

$$(A_{n-1}, 1) \rightarrow (A_n, 1) \quad p = 0.2$$

$$(A_{n-1}, -1) \rightarrow (A_n, -1) \quad p = 0.8$$

$$(A_{n-1}, -1) \rightarrow (A_n, 1) \quad p = 0.2$$

Једина одлука коју играч доноси након сваке рунде је да ли жели да одигра још једну рунду или да заврши игру.

Пример одигравања: Једна рунда кошта 10 кредита. Играч почиње са 50 кредита. Пошто је вероватноћа добитка 0.2, очекивано је да у просеку свака пета игра буде добитна ($1/p = 1/0.2 = 5$).

Игра 1:

$$(50, 0) \rightarrow (40, -1) \rightarrow (30, -1) \rightarrow (20, -1) \rightarrow (10, 1)$$

Играч је у прве три рунде изгубио, а у четвртој освојио 100 кредита и одлучио да прекине игру са профитом од 60 кредита. Вероватноћа да прве 3 рунде буду губитничке, а 4. победничка је

$$0.8^3 \times 0.2 = 0.1024.$$

.

Игра 2:

$(50, 0) \rightarrow (40, -1) \rightarrow (60, 1) \rightarrow (50, -1) \rightarrow (80, 1) \rightarrow (70, -1) \rightarrow (60, -1) \rightarrow (50, -1) \rightarrow (40, -1) \rightarrow (30, -1) \rightarrow (20, -1) \rightarrow (20, 1) \rightarrow (10, -1) \rightarrow (0, -1)$

Играч је одиграо 14 рунди и завршио игру са губитком од 50 кредита. Имао је три добитне рунде, што је приближно очекивано, али су добици били мањих вредности. Да је престао да игра након четврте рунде, завршио би са добитком, али је наставио у покушају већег профита и на крају све изгубио.

Дисконтована сума за игру 1 је

$$G_1 = -10 + \gamma(-10) + \gamma^2(-10) + \gamma^3(90),$$

а за игру 2 је

$$G_2 = -10 + 20\gamma - 10\gamma^2 + 30\gamma^3 - 10\gamma^4 - 10\gamma^5 - 10\gamma^6 - 10\gamma^7 - 10\gamma^8 - 10\gamma^9 + 0\gamma^{10} - 10\gamma^{11} - 10\gamma^{12}.$$

γ	G_1	G_2
1	60	-50
0.9	38.51	-14.93
0.5	-6.25	0.012
0.2	-11.68	-6.18

Табела 2.1: Дисконтоване вредности за различите γ

Примећујемо да за $\gamma = 1$ имамо добитак/губитак који је остварен, док су за мање вредности γ те суме доста другачије. Што је мање γ , то значи да се мање вреднују касније рунде и да је најбитније шта је било на почетку. У слот играма играчи обично играју више рунди, па нема много смисла гледати мале вредности γ .

Можемо да посматрамо γ као вероватноћу са којом играч бира да настави игру након сваке рунде и да нађемо вредност γ^* дефинисану једначином $G(\gamma) = 0$. За $\gamma > \gamma^*$ дисконтована вредност игре 1 је позитивна, па игра

делује исплатива, док за $\gamma < \gamma^*$ игра 1 има негативну вредност, па овај праг одређује да ли је игра прихватљива из перспективе играча у зависности од његове спремности да чека будуће добитке. У игри 1 добитак је само на крају, па G_1 опада, јер што је мање γ , то мање вреднујемо тај добитак, док у игри 2 G_2 варира јер имамо више добитака током игре.

Игра	γ^*
Игра 1	0.576
Игра 2	0.487

Табела 2.2: Критичне вредности дисконтног фактора

Уведимо сад још неке појмове у вези са случајним процесима.

Дефиниција 9. Нека је $i \in S$. Означимо $P_i(\cdot) := P(\cdot \mid X_0 = i)$, уз претпоставку да је почетна расподела таква да $P(X_0 = i) > 0$. За $j \in S$ дефинишемо T_j као време првог доласка у стање j и N_j као број посета стању j (без почетног времена):

$$T_j := \min\{n \geq 1 : X_n = j\}, \quad N_j := \sum_{n=1}^{\infty} I\{X_n = j\}. \quad (2.4)$$

Ако је $\{n \geq 1 : X_n = j\} = \emptyset$ онда $T_j = \infty$.

Вероватноћа да Марковљев ланац, почевши из стања i , икада посети стање j (или се врати у i ако је $j = i$):

$$f_{ij} := P_i(T_j < \infty) = P_i(N_j \geq 1). \quad (2.5)$$

Стање j је пролазно ако је $f_{jj} < 1$, а повратно ако је $f_{jj} = 1$.

Приметимо да је

$$\begin{aligned} P_i(N_j \geq m) &= \sum_{n_1, \dots, n_m \geq 1} P_i(X_1 \neq j, \dots, X_{n_1-1} \neq j, X_{n_1} = j, \dots, X_{n_1+\dots+n_m} = j) \\ &= f_{jj}^{m-1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Користећи

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_{jj}^{m-1} = \begin{cases} 1, & \text{ако } f_{jj} = 1, \\ 0, & \text{ако } f_{jj} < 1, \end{cases}$$

добијамо

$$P_i(N_j = \infty) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } j \text{ пролазно,} \\ f_{ij}, & \text{ако је } j \text{ повратно.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Очекивани број посета стању j при поласку из стања i је

$$\mathbb{E}_i[N_j] = \sum_{m=1}^{\infty} P_i(N_j \geq m) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{jj}^{m-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-f_{jj}}, & \text{ако је } j \text{ пролазно,} \\ \infty, & \text{ако је } j \text{ повратно.} \end{cases} \quad (2.8)$$

За $n \geq 1$, са $P^n(i, j)$ означавамо верованоћу преласка из стања i у стање j за n корака, тј. (i, j) -ти елемент n -тог степена матрице прелаза:

$$P^n(i, j) = P\{X_n = j \mid X_0 = i\} = (P^n)_{ij}.$$

Теорема 3. За Марковљев ланац у S са матрицом прелаза P , стање $j \in S$ је:

$$\text{пролазно ако } \sum_{n=1}^{\infty} P^n(j, j) < \infty, \quad \text{повратно ако } \sum_{n=1}^{\infty} P^n(j, j) = \infty. \quad (2.9)$$

Доказ. Користећи уведене ознаке имамо следеће: Ако је стање j повратно, онда по формули (2.7) важи

$$P_j(N_j = \infty) = 1.$$

Пошто је

$$E_j[N_j] = E_j\left(\sum_{n=0}^{\infty} I\{X_n = j\}\right),$$

применом линеарности математичког очекивања добијамо

$$E_j[N_j] = \sum_{n=0}^{\infty} E_j[I\{X_n = j\}] = \sum_{n=0}^{\infty} P_j(X_n = j) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(j, j).$$

Како је $N_j = \infty$ са вероватноћом 1, па следи

$$E_j[N_j] = \infty,$$

па је

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n(j, j) = \infty.$$

С друге стране, ако је стање j пролазно, онда је по формули (2.8)

$$E_j[N_j] = \frac{1}{1 - f_{jj}}.$$

Пошто је за пролазно стање $f_{jj} < 1$, важи

$$E_j[N_j] = \frac{1}{1 - f_{jj}} < \infty,$$

следи

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n(j, j) = \frac{1}{1 - f_{jj}} < \infty.$$

□

Лема 1. Нека су $i, j \in S$ различита. Ако је стање i повратно и $f_{ij} > 0$, онда је стање j такође повратно и $f_{ji} = 1$.

Доказ. Пошто је $f_{ij} > 0$, постоји $r \in \mathbb{N}$ такво да $P^r(i, j) > 0$. Претпоставимо супротно, да је $f_{ji} < 1$, тј. да са позитивном вероватноћом ланац крене из j и никада не стигне у i . Полазећи из i , са позитивном вероватноћом $P^r(i, j) > 0$ ланац за r корака доспе у j , а одатле са вероватноћом $1 - f_{ji} > 0$ никада више не посети i . Следи

$$1 - f_{ii} \geq P^r(i, j) (1 - f_{ji}) > 0,$$

па је $f_{ii} < 1$, што противречи повратности стања i (за које важи $f_{ii} = 1$). Дакле $f_{ji} = 1$. Пошто је $f_{ji} > 0$, постоји $s \in \mathbb{N}$ такво да $P^s(j, i) > 0$.

За свако $n \geq 0$ важи

$$P^{s+n+r}(j, j) \geq P^s(j, i) P^n(i, i) P^r(i, j).$$

Сумирањем по n и коришћењем повратности стања i ($\sum_{n \geq 0} P^n(i, i) = \infty$) добијамо

$$\sum_{m \geq 0} P^m(j, j) \geq P^s(j, i) P^r(i, j) \sum_{n \geq 0} P^n(i, i) = \infty,$$

јер су $P^s(j, i) > 0$ и $P^r(i, j) > 0$ фиксне позитивне константе. Пошто дивергира ред $\sum_m P^m(j, j)$, стање j је повратно.

□

Дефиниција 10. Кажемо да је стање j достижно из стања i ако и само ако постоји неки цео број $n \geq 0$ такав да

$$P_{ij}^n > 0.$$

Ако је стање i достижно из стања j и обрнуто, онда кажемо да она *комуницирају* и пишемо $i \leftrightarrow j$.

Теорема 4. Релација комуникације је релација еквиваленције.

По дефиницији, релација комуникације је рефлексивна и симетрична. Транзитивност следи композицијом путева.

Дефиниција 11. Ланац Маркова је *несводљив* ако и само ако сва стања припадају једној класи комуникације. Ланац Маркова је *сводљив* ако и само ако постоје две или више комуникационих класа.

Теорема 5. Нека је $\{X_n\}_{n \geq 0}$ несводљив Марковљев ланац са матрицом прелаза P и N_j случајна променљива која представља укупан број посета стању j . Ако је пролазан, онда:

$$P_i \left(\bigcup_{j \in S} \{N_j = \infty\} \right) = 0, \quad i \in S$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(i, j) < \infty \text{ за сва } i, j \in S. \quad (2.10)$$

Ако је повратан, онда:

$$P_i \left(\bigcap_{j \in S} \{N_j = \infty\} \right) = 1, \quad i \in S$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(i, j) = \infty \text{ за сва } i, j \in S. \quad (2.11)$$

Разматрамо опкладу која исплаћује једнако. Нека је p вероватноћа добитка за играча, q вероватноћа губитка, а r вероватноћа нерешеног исхода. Јасно је да важи:

$$p + q + r = 1, \quad p > 0, \quad q > 0, \quad r \geq 0.$$

Нека случајна променљива X представља добитак играча из једне опкладе. Расподела X је дата са:

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = -1) = q, \quad P(X = 0) = r. \quad (2.13)$$

Сада нека је $(X_1, X_2, \dots)$ низ независних случајних променљивих са истом расподелом као X , који представља резултате независних понављања опкладе.

$$S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Нека S_n представља кумулативни добитак играча након n опклада; јасно је да је $S_0 = 0$. За дате позитивне целе бројеве W и L , претпостављамо да играч престаје са клађењем чим добије W јединица или изгуби L јединица. Тада је тренутак заустављања:

$$N(-L, W) := \min\{n \geq 1 : S_n = -L \text{ или } S_n = W\}.$$

Дефиниција 12. Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ буде вероватносни простор, $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ филтрација, и $\{X_n\}_{n \geq 0}$ прилагођен стохастички процес такав да $E|X_n| < \infty$ за свако n . Процес $\{X_n\}$ назива се *супермартингал* у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n\}$ ако за свако n важи

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq X_n \quad P\text{-скоро сигурно.}$$

Теорема 6. (Теорема о опционом заустављању) Нека је $\{X_n\}_{n \geq 0}$ случајни процес и нека је $\{M_n\}_{n \geq 0}$ супермартингал, а N тренутак заустављања, све у односу на $\{X_n\}_{n \geq 0}$. Претпоставимо да важи једна од следећих хипотеза:

(а) $P(N < \infty) = 1$ и $M_n \geq 0$ за свако $n \geq 0$.

(б) $P(N < \infty) = 1$, M_N има коначно математичко очекивање и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|M_n| \mathbf{1}_{\{N \geq n+1\}}] = 0.$$

(в) $\mathbb{E}[N] < \infty$ и постоји константа C таква да

$$\mathbb{E}[|M_{n+1} - M_n| \mid X_0, \dots, X_n] \leq C \quad \text{на } \{N \geq n+1\}$$

за свако $n \geq 0$.

Тада M_N има коначно математичко очекивање и

$$\mathbb{E}[M_N] \leq \mathbb{E}[M_0].$$

Алтернативно, нека је $\{X_n\}_{n \geq 0}$ случајни процес и нека је $\{M_n\}_{n \geq 0}$ суб-мартингал (односно мартингал), а N тренутак заустављања, све у односу на $\{X_n\}_{n \geq 0}$. Под хипотезом (б) или (в), M_N има коначно математичко очекивање и важи

$$\mathbb{E}[M_N] \geq \mathbb{E}[M_0].$$

Теорема 7. (Валдов идентитет) Нека су $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ низ независних и једнако расподељених дискретних случајних вектора са X_1 који има коначно математичко очекивање, и нека је $S_0 := 0$ и $S_n := X_1 + \dots + X_n$ за свако $n \geq 1$. Нека је N тренутак заустављања у односу на $\{(X_n, Y_n)\}_{n \geq 1}$ са коначним математичким очекивањем. Тада S_N има коначно математичко очекивање и

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1].$$

Напомена. Низ $Y_1, Y_2, \dots$ не игра суштинску улогу у овом резултату и може се изоставити.

Доказ. Ако дефинишемо

$$M_n := S_n - n\mathbb{E}[X_1], \quad n \geq 0,$$

онда је $\{M_n\}_{n \geq 0}$ мартингал у односу на $\{(X_n, Y_n)\}_{n \geq 1}$, и закључак следи из теореме 6 под хипотезом в). Заиста, приметимо да

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|M_{n+1} - M_n| \mid (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)] &= \mathbb{E}[|X_{n+1} - \mathbb{E}[X_1]| \mid (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)] \\ &= \mathbb{E}[|X_{n+1} - \mathbb{E}[X_1]|] \\ &\leq 2\mathbb{E}[|X_1|], \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

па је задовољена хипотеза в) из претходне теореме, а закључак $\mathbb{E}[M_N] = \mathbb{E}[M_0] = 0$ имплицира почетно тврђење. $\square$

Сада формулишемо теорему која даје вероватноћу да играч постигне добитак W пре него што изгуби L .

Теорема 8. Нека случајна променљива X има расподелу из (2.13), где је $p > 0$, $q > 0$, $r \geq 0$ и $p + q + r = 1$. Нека су $X_1, X_2, \dots$ независне и једнако расподелење као X . Тада:

$$P(N(-L, W) < \infty) = 1.$$

Ако је $p \neq q$, важи:

$$P(S_{N(-L, W)} = W) = \frac{(q/p)^L - 1}{(q/p)^{L+W} - 1} = 1 - P(S_{N(-L, W)} = -L).$$

Ако је $p = q$, тада:

$$P(S_{N(-L, W)} = W) = \frac{L}{L + W} = 1 - P(S_{N(-L, W)} = -L).$$

Доказ. Ради једноставности пишемо N уместо $N(-L, W)$ и стављамо $M := L + W$.

Посматрајмо блокове дужине M :

$$B_k := (X_{(k-1)M+1}, X_{(k-1)M+2}, \dots, X_{kM}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Дефинишемо

$$T := M \cdot \min\{k \geq 1 : B_k = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_M\}.$$

T представља крај првог блока који се у целости састоји од корака $+1$.

Блокови $B_1, B_2, \dots$ су независни, а вероватноћа да је један фиксни блок у целости једнак $(1, \dots, 1)$ износи p^M . Стога број потребних блокова

$$K := \min\{k \geq 1 : B_k = (1, \dots, 1)\}$$

има геометријску расподелу са параметром p^M , тј.

$$P(K = k) = (1 - p^M)^{k-1} p^M, \quad k = 1, 2, \dots$$

Одатле је очекивана вредност коначна:

$$E[K] = \frac{1}{p^M} < \infty, \quad \text{па је} \quad E[T] = M \cdot E[K] = \frac{M}{p^M} < \infty.$$

Пошто M узастопних корака $+1$ гарантује изаlazак из интервала, важи $N \leq T$ (скоро сигурно), одакле следи

$$E[N] \leq E[T] = \frac{M}{p^M} < \infty, \quad P(N < \infty) = 1.$$

Случај $p \neq q$:

$$Y_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}, \quad n \geq 0.$$

Овај низ је мартингал у односу на филтрацију $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, што проверавамо директно. Кључно је да је очекивани мултипликативни прираштај једнак 1:

$$\begin{aligned} E\left[\left(\frac{q}{p}\right)^X\right] &= p \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^1 + q \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} + r \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^0 \\ &= p \cdot \frac{q}{p} + q \cdot \frac{p}{q} + r = q + p + r = 1. \end{aligned}$$

Стога, због независности X_{n+1} од $\mathcal{F}_n$,

$$E[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = Y_n \cdot E\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}\right] = Y_n,$$

па је (Y_n) заиста мартингал са $E[Y_0] = (q/p)^0 = 1$.

Пошто је $N < \infty$ скоро сигурно, а до тренутка заустављања вредности процеса остају у ограниченом скупу, $S_{\min\{n, N\}} \in \{-L, \dots, W\}$, заустављени мартингал је ограничен:

$$0 \leq Y_{\min\{n, N\}} \leq \max\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^W, \left(\frac{q}{p}\right)^{-L}\right\} =: C < \infty.$$

Тиме су задовољени услови теореме о опционом заустављању (верзија за ограничен заустављени мартингал), одакле

$$E[Y_N] = E[Y_0] = 1.$$

Пошто $S_N \in \{W, -L\}$, добијамо

$$\left(\frac{q}{p}\right)^W P(S_N = W) + \left(\frac{q}{p}\right)^{-L} P(S_N = -L) = 1.$$

Означимо $\rho := q/p$ и $a := P(S_N = W)$, тако да је $P(S_N = -L) = 1 - a$. Тада

$$\rho^W a + \rho^{-L}(1 - a) = 1 \implies a(\rho^W - \rho^{-L}) = 1 - \rho^{-L}.$$

Множењем бројиоца и имениоца са ρ^L следи

$$a = \frac{1 - \rho^{-L}}{\rho^W - \rho^{-L}} = \frac{\rho^L - 1}{\rho^{L+W} - 1}.$$

Случај $p = q$:

Сада је $E[X_1] = p \cdot 1 + q \cdot (-1) + r \cdot 0 = p - q = 0$. Пошто је $E[N] < \infty$ и прираштаји су ограничени ($|X_i| \leq 1$), можемо применити Валдов идентитет:

$$E[S_N] = E[N] \cdot E[X_1] = E[N] \cdot 0 = 0.$$

Са $a := P(S_N = W)$ имамо

$$E[S_N] = W \cdot a + (-L)(1 - a) = 0 \implies a = \frac{L}{L + W}.$$

□

Наведимо још неке често коришћене теореме.

Теорема 9 (Слаби закон великих бројева). Нека је $X_1, X_2, \dots$ низ независних случајних величина са равномерно ограниченим дисперзијама. Ако је

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

онда важи

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказ.

$$\begin{aligned} & P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n - \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n)}{n}\right| > \varepsilon\right) \\ &= P(|X_1 + \dots + X_n - \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n)| \geq n\varepsilon) \\ &\leq \frac{D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)}{n^2\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Како случајне величине $X_i, i = 1, 2, \dots$ имају равномерно ограничене дисперзије, постоји константа $C \geq 0$ тако да важи:

$$D(X_i) \leq C, \quad i = 1, 2, \dots$$

Из ових неједнакости следи

$$P\left(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

што имплицира да

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

□

Теорема 10 (Централна гранична теорема). Ако $EX_r = \mu$ и $0 < D(X_r) = \sigma^2 < \infty$, онда, кад $n \rightarrow \infty$,

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{(n\sigma^2)^{1/2}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x),$$

где је $\Phi(x)$ стандардна нормална функција расподеле.

Теорема 11 (Служкијева теорема). Ако је $X_n \rightarrow X$ у расподели и $Y_n \rightarrow a$ (где је a константа) у вероватноћи, онда

$$Y_n X_n \rightarrow aX \text{ у расподели,} \quad X_n + Y_n \rightarrow X + a \text{ у расподели.}$$

Теорема 12. Нека је $X_1, \dots, X_n$ случајни узорак независних и једнако расподењених случајних величина из произвољне расподеле са очекиваном вредношћу μ и са коначном стандардном девијацијом σ и

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \tilde{S}_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Онда

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\tilde{S}_n} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1), \text{ у расподели.}$$

Доказ. Из централне граничне теореме (ЦГТ) знамо да

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1), \text{ у расподели,}$$

где је $\mathcal{N}(0, 1)$ стандардна нормална расподела.

Такође знамо да $\tilde{S}_n^2 \rightarrow \sigma^2$, у вероватноћи. Дакле,

$$\frac{\tilde{S}_n}{\sigma} \rightarrow 1, \text{ у вероватноћи.}$$

Користећи претходну теорему:

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\tilde{S}_n} = \frac{\sigma}{\tilde{S}_n} \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1), \text{ у расподели.}$$

□

Интервал поверења је опсег вредности у коме се са одређеним степеном поверења налази истинска вредност неког параметра, на пример очекиване вредности бонус игре.

Дефиниција 13. Нека је $\bar{X}_n$ узорачка средина узорка величине n и $\tilde{S}_n$ узорачко стандардно одступање. Ако претпоставимо да је узорак довољно велик или нормално расподељен, интервал (приближни) поверења за просек на нивоу поверења $1 - \alpha$ се добија као:

$$\bar{X}_n \pm z_{\alpha/2} \frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}},$$

где је $z_{\alpha/2}$ квантил нормалне расподеле за изабрани ниво поверења.

Пример: Ако смо симулирали 10 000 игара бонуса, добили просечан добитак $\bar{X}_n = 500$ и знамо да је стандардна девијација $\sigma = 50$, тада 95% интервал поверења за истински просечан добитак је:

$$500 \pm 1.96 \cdot \frac{50}{\sqrt{10000}} = 500 \pm 0.98 \approx [499.02, 500.98].$$

Напомене:

- Што је већи узорак n , интервал постаје ужи, тј. прецизнији.
- Ако стандардна девијација није позната, уместо z -расподеле, користили бисмо узорачку стандардну девијацију $\tilde{S}_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ и t -расподелу са $n - 1$ степени слободе, јер она има дебље репове.
- Интервал поверења не говори о вероватноћи да је конкретан параметар унутар интервала, већ о понашању интервала ако бисмо симулацију поновили много пута.

Примена у бонус играма: Када симулирамо велик број игара, можемо одредити просечан добитак и његов интервал поверења. То нам омогућава да проценимо ризик и варијабилност бонуса и донесемо одлуке о дизајну игре без потребе за компликованим аналитичким прорачунима.

2.2 Појмови посебно везани за стохастичке игре

Један од главних појмова у анализи слот игара је РТП тј. повраћај играчу (RTP - return to player).

Дефиниција 14. Нека је $S = \{s_1, s_2, \dots, \tilde{s}_n\}$ скуп могућих исхода спина, а $p_i = P(s_i)$ њихове вероватноће. Добитак у стању s_i означавамо са r_i . Тада је очекивани добитак РТП дефинисан као:

$$RTP = \sum_{i=1}^n p_i \cdot r_i.$$

Пројектовање слот игре заснива се на одређивању комбинација p_i и r_i тако да:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad \text{и} \quad 0 < RTP < 1.$$

РТП се може дефинисати и као проценат добитка у односу на улог.

$$RTP = \frac{\text{укупан износ исплата}}{\text{укупан износ улога}} \cdot 100\%.$$

Ако играч одигра сто рунди са улогом од 10 динара на слот игри чији је теоријски РТП једнак 93%, онда се очекује да ће од укупно уложених 1000 динара повратити приближно 930 динара у виду добитака, а преосталих 70 његовог улога у овој игри представља предност казина (*house edge*), односно новац који казино остварује као зараду по сваком појединачном улогу. У пракси обично није довољно 100 рунди да се постигне ова конвергенција, већ је потребно одиграти много већи број игара, па ће након много одиграних рунди од стране више играча казино остварити тај профит од 7%, али ће појединачни РТП-јеви по играчу доста варирати. Пуно њих ће имати РТП 0%, неки ће имати око 100%, док ће поједини имати јако велики РТП, који може да иде и преко 1000%.

Још један од битнијих појмова је ентропија која представља меру неизвесности или количине информације коју садржи случајна променљива.

Дефиниција 15. За дискретну случајну величину X која може да узме вредности $x_1, x_2, \dots, x_n$ са одговарајућим вероватноћама $p_1, p_2, \dots, p_n$, ентропија се дефинише као:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i.$$

Већа вредност ентропије означава већу неизвесност исхода, док мања вредност значи да су исходи предвидљивији. У контексту слот игара, ентропија мери степен случајности у добицима и расподели вероватноћа исхода.

Нека сваки бубањ има k симбола, а машина има n бубњева. Пошто сваки исход зависи од распореда симбола на бубњевима, укупан број различитих комбинација је:

$$N = k^n.$$

Добитне линије су посебно дефинисани скупови позиција на екранима који формирају образац за израчунавање добитака. Нека је L број добитних линија, а C_i комбинације које их формирају. Тада је укупан број свих комбинација које воде до добитка:

$$N_{win} = \sum_{i=1}^L |C_i|.$$

Дефиниција 16. Стохастички модел слот машине може се представити као Марковљев ланац са коначним бројем стања $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ и матрицом прелаза $P = [p_{ij}]$, где $p_{ij} = P(s_{t+1} = s_j | s_t = s_i)$.

Матрица P мора задовољити услов нормализације:

$$\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1, \quad \forall i.$$

Све дефиниције, доказане теореме и докази теорема који нису наведени у овој глави могу се наћи у литератури под бројем [5], [6] и [7].

Глава 3

Решавање комбинаторних проблема

У овом поглављу биће приказан конкретан пример једне класичне слот игре и анализиран математички концепт иза ње. Затим ће бити приказани и разни примери бонус игара, прво они у којима само случајност има утицаја на исход, а онда и они код којих стратегија играча такође утиче на исходе.

3.1 Основна игра

Почнимо тако што ћемо дефинисати игру. Прве слот машине су имале само основну игру у којој на линији треба да се појави одређени број истих симбола, а касније су почели да се појављују разни бонуси. Овде ћемо показати из чега све може да се састоји једна слот игра. Прва верзија ће имати само основну игру.

Већина слот игара има РТП између 85% и 97%. Битно је да се нађе баланс, тако да компанија која прави игру има довољан приход од те игре, али и да играчи не губе превише, па да не желе да играју ту игру. Ако би био 100% то би значило да је игра праведна и да ће на дуже стазе играч вратити свој улог и у том случају креатор игре не би зарађивао. Направићемо игру која има око 91% РТП (Видети дефиницију у глави 2).

Ова игра ће имати 5 бубњева и на сваком од њих ће се налазити по 30 симбола. На екрану ће се видети три врсте и средња врста ће бити добитна линија.

Да би комбинација на линији била добитна, низ мора да почне са леве стране, од првог бубња и да се појави на наредна 2, 3 или 4. Дакле, играч ће остварити добитак ако има 5, 4 или 3 иста симбола гледајући слева надесно.

Пример једне добитне комбинације са 5 симбола Н2 (на 3. бубњу је симбол W који мења било који други симбол, у овом случају Н2 графички приказан као звездица)

L1	L3	H2	H3	H2
H2	H2	H2	W	H2
L1	L1	H1	L2	L1

Графички би то кориснику било приказано као на слици:



Слика 3.1: Добитна комбинација

Ово је уобичајена нотација за симболе. Симболи који почињу са Н обично плаћају више (од енглеског High), а они који почињу са L мање (од енглеског Low). Симбол W (Wild) је џокер који може да замени остале симболе, а SC је симбол који има неко посебно својство. У овој игри имамо 8 различитих симбола (3 Н, 3 L, W и SC).

Имамо 6 различитих линијских симбола, 1 џокер симбол који мења било који други и 1 скетер симбол који не мора да буде на линији, него се остварује добитак ако се појави укупно 5 тих симбола било где на прозору.

Приказ расподеле симбола по бубњевима је дат у табели 1: У овом примеру редослед симбола у оквиру једног бубња није битан, већ само број појављивања.

Бубањ1	Бубањ2	Бубањ3	Бубањ4	Бубањ5
L1	L3	H2	H3	L3
H2	L1	W	L1	L3
L3	L2	H3	L2	L2
H3	L3	L1	L3	L2
L1	H1	L2	H1	L1
L2	W	L3	L3	L1
L3	L1	H1	L1	H3
H1	L2	H2	L2	H3
H2	W	SC	L3	H1
L2	H1	W	H1	L1
H3	W	H2	H3	H3
L1	H1	W	L1	L1
L2	L2	H3	L2	L2
L3	L3	L1	L3	L3
L1	W	L2	H1	H1
H2	H2	L3	H2	H2
H2	W	H1	SC	W
L3	L3	W	L3	SC
H1	L1	W	L1	L3
H2	W	H3	L2	L2
L3	L3	L2	L3	L1
L1	W	L3	H1	H3
H2	H2	H1	H2	H2
H1	W	L2	W	H1
H3	H3	W	L3	H3
SC	L3	H2	L3	W
H1	SC	H2	W	L2
H2	H3	H2	H3	L2
L1	H3	L2	L1	L1
L3	W	L3	H3	L3

Табела 1. Распоред симбола по тракама

Симболе смо поставили произвољно тако да сваки буде довољно заступљен са нешто више L симбола који плаћају мање него H симбола који плаћају

више. Тај распоред може остати фиксан и за њега наћи одговарајуће величине награда како би се наместио жељени РТП, а ако се награде фиксирају, онда се број симбола по бубњевима може мењати како би на тај начин добили одговарајући РТП.

Пребројавање симбола је дато у следећој табели, како бисмо могли да вршимо сва рачунања.

	Бубањ1	Бубањ2	Бубањ3	Бубањ4	Бубањ5
H1	4	3	3	4	3
H2	7	2	6	2	2
H3	3	3	3	4	5
L1	6	3	2	5	6
L2	3	3	5	4	6
L3	6	6	4	8	5
W	0	9	6	2	2
SC	1	1	1	1	1
WH1	4	12	9	6	5
WH2	7	11	12	4	4
WH3	3	12	9	6	7
WL1	6	12	8	7	8
WL2	3	12	11	6	8
WL3	6	15	10	10	7
Укупно	30	30	30	30	30

Табела 2. Број појава симбола на тракама

Последњих 6 редова нису симболи који се појављују на бубњу, него представљају збир појављивања одређеног симбола и симбола W, како би нам рачунање добитних комбинација било лакше.

Укупан број могућих комбинација добијамо када помножимо број симбола на сваком бубњу, у овом случају:

$$30^5 = 24\,300\,000.$$

Сада ћемо да пребројимо колико има добитних комбинација и да израчунамо која је вероватноћа њиховог освајања. Ту вероватноћу рачунамо тако

што поделимо број комбинација за сваки појединачни добитак са укупним бројем комбинација.

Комбинације	Бројност	p	РТП	Т	$p \cdot \log_2(p)$
H1 H1 H1 H1 H1	12960	0.000533333	0.0533333	1875.00	-0.00580
H2 H2 H2 H2 H2	14784	0.000608395	0.0486716	1643.67	-0.00650
H3 H3 H3 H3 H3	13608	0.000560000	0.0336000	1785.71	-0.00605
L1 L1 L1 L1 L1	32256	0.001327407	0.0663704	753.35	-0.01269
L2 L2 L2 L2 L2	19008	0.000782222	0.0312889	1278.41	-0.00807
L3 L3 L3 L3 L3	63000	0.002592593	0.0777778	385.71	-0.02227
H1 H1 H1 H1 X	64800	0.002666667	0.0533333	375.00	-0.02280
H2 H2 H2 H2 X	96096	0.003954568	0.0711822	252.87	-0.03157
H3 H3 H3 H3 X	44712	0.001840000	0.0294400	543.48	-0.01672
L1 L1 L1 L1 X	88704	0.003650370	0.0365037	273.94	-0.02956
L2 L2 L2 L2 X	52272	0.002151111	0.0172089	464.88	-0.01906
L3 L3 L3 L3 X	207000	0.008518519	0.0511111	117.39	-0.05857
H1 H1 H1 X X	311040	0.012800000	0.0640000	78.13	-0.08048
H2 H2 H2 X X	720720	0.029659259	0.1186370	33.72	-0.15053
H3 H3 H3 X X	233280	0.009600000	0.0288000	104.17	-0.06435
L1 L1 L1 X X	397440	0.016355556	0.0327111	61.14	-0.09706
L2 L2 L2 X X	285120	0.011733333	0.0117333	85.23	-0.07525
L3 L3 L3 X X	540000	0.022222222	0.0222222	45.00	-0.12204
H1 H1 X X X	907200	0.037333333	0.0186667	26.79	-0.17709
H2 H2 X X X	1247400	0.051333333	0.0256667	19.48	-0.21991
H3 H3 X X X	680400	0.028000000	0.0140000	35.71	-0.14444
5 SC	243	0.000010000	0.0050000	100000.00	-0.00017
Укупно	6032043	0.248232222	0.9112583	4.028	1.3709581

Табела 3. Вероватноће, РТП по добитним комбинацијама, очекивано време до освајања дате комбинације и ентропија

Т представља учесталост добитака у просеку који добијамо као $1/0.248232222$, то значи да је очекивано да је потребно 4 пута да одиграмо игру како бисмо нешто освојили. Последња колона представља ентропију ове игре.

Првих шест редова табеле 3 рачунамо тако што помножимо збирове бројева појављивања датог симбола и цокер симбола на свакој појединачном

бубњу. У случају $H1$ то изгледа овако:

$$4 \times 12 \times 9 \times 6 \times 5 = 12960.$$

Из табеле 2 смо гледали врсту $WH1$ која представља те збирове.

Када имамо 4 иста симбола, тај симбол или цокер морају да се налазе на прве 4 траке, док на последњој може бити било који симбол сем та два (јер ако би био неки од та два, то би припало комбинацији од 5 тих симбола и овде то морамо да изузмемо).

На пример, број комбинација за 4 $H2$ симбола (8. ред у табели) добијамо овако:

$$7 \times 11 \times 12 \times 4 \times (30 - 4) = 96096.$$

Даље, у редовима са три иста симбола, он или цокер се морају јавити на прве три траке, на четвртој било који сем њих, док на петој може бити било који (јер чак и ако је исти као претходни, низ је прекинут — а мора бити повезан да би комбинација од 4 симбола била добитна).

Број комбинација за три $L3$ симбола:

$$6 \times 15 \times 10 \times (30 - 10) \times 30 = 540000.$$

Слично, када имамо само два иста симбола, она се морају јавити на прва два места, на трећем било шта сем тога, а на четвртом и петом било шта. На пример, за два $H3$ симбола добијамо:

$$3 \times 12 \times (30 - 9) \times 30 \times 30 = 680400.$$

За скетер (SC) рачунамо другачије. Он не мора да се нађе на линији, него било где на прозору, што значи да у свакој од 5 колона има 3 места на којима може да се заустави. Зато је број могућих комбинација:

$$3^5 = 243.$$

Рецимо да улажемо 1 кредит сваки пут када притиснемо дугме и покренемо игру. Следећа табела представља колико кредита се добија за остварење датих низова.

Пошто су тежине сваког од 30 симбола исте, вероватноћа да се симбол нађе горе, у средини или доле на заустављеном екрану је иста. Тако да ако бисмо увели још додатних линије, само бисмо помножили добијене резултате.

Симбол	Дужина	Награда
H1	5	100
H2	5	80
H3	5	60
L1	5	50
L2	5	40
L3	5	30
H1	4	20
H2	4	18
H3	4	16
L1	4	10
L2	4	8
L3	4	6
H1	3	5
H2	3	4
H3	3	3
L1	3	2
L2	3	1
L3	3	1
H1	2	0.5
H2	2	0.5
H3	2	0.5
SC	5	500

Табела 4. Вредности исплата за сваку од комбинација

Игра може да има исти РТП, али различиту учесталост погађања. Ако се често остварују добици, њихова вредност је мања, а ако се ретко остварују, вредност им је већа.

Џокер симбол се јавља 18 пута; број комбинација можемо смањити на разне начине — смањивањем броја яокер симбола, мењањем симбола генерално, или укидањем неких добитних комбинација (на пример, када имамо само два иста симбола).

У неким играма велика награда није фиксна, већ расте временом док је неко не освоји, а онда се враћа на почетну вредност.

Вероватноћа да освојимо комбинацију $5 \times H1$ је 0.000533333, што значи да је очекивано да је освојимо једном у:

$$\frac{1}{0.000533333} \approx 1875$$

игара.

Тој награди можемо додати инкремент од 1%, што значи да када уложимо један кредит, 0.99 одмах одлази, а 0.01 се чува и исплаћује оном ко освоји ову награду. Онда је очекивано да особа која освоји ту комбинацију не добије само 100 кредита, већ:

$$100 + 1875 \times 0.01 = 118.75$$

кредита.

Наравно, неће увек бити освојена та сума — некада више, некада мање — али ово је просек. Тада и РТП ове игре повећа за 1%.

Продискутујмо и учесталост освајања било које награде. У овој игри она износи 0.24, што значи да играч отприлике сваки четврти пут ($1/0.24$) освоји неку награду. Просечна вредност исплата је 43.43, а волатилност 20.35.

За сваки бубањ израчунавамо ентропију:

$$H_r = - \sum_i p_i \log_2 p_i,$$

где је p_i вероватноћа симбола i на бубњу r . Ентропија мери непредвидивост: већа ентропија значи равномернију расподелу симбола, мања ентропија указује на доминацију неколико симбола.

Бубањ	ентропија
1	2.634
2	2.738
3	2.836
4	2.787
5	2.807

Табела 5. Ентропија по бубњевима слот машине

Ентропија по бубњевима представља мерење непредвидљивости симбола. Што је већа ентропија, то је симбол који се извлачи на бубњу мање предвидљив.

Сума ентропија свих бубњева даје приближну ентропију једног спина (по средњој линији), што у нашем случају износи приближно 13.8017. Ова вредност указује на умерено велику непредвидљивост спина: није минимална јер сваки бубањ има више различитих симбола; да се јавља само један симбол, његова вероватноћа би била 1, па би ентропија била $-\log_2 1 = 0$, али ни максимална јер неке комбинације се понављају чешће, а пошто имамо 8 различитих симбола, да се сваки од њих појављује по нпр. 4 пута, а не да неких има више, а других мање како смо навели у табели 2, достигла би се максимална вредност $\log_2 8 = 3$ јер би вероватноћа сваког била $4/32 = 1/8$. Примећујемо ипак да су вредности близу максималне, јер ниједан симбол нема довољно велику вероватноћу појављивања да доминира на неком бубњу, него је за сваки неизвесно који ће се појавити. (Највећа вероватноћа је за W на бубњу 2, али и она је $9/30$ што и даље није много велика вероватноћа.) Ово је типично за слот машине средње волатилности.

Можемо променити волатилност тако да РТП остане исти. Ако исплаћујемо награде само када имамо 4 или 5 истих симбола, знатно смањујемо број добитних комбинација и учесталост погађања. Ако направимо велики јаз између највећих добитака и осталих, игра ће бити знатно волатилнија.

Нека је нова табела исплата дата у наставку:

Симбол	Количина	Награда
H1	5	1482
H2	5	11
H3	5	10
L1	5	9
L2	5	8
L3	5	7
H1	4	6
H2	4	5
H3	4	4
L1	4	3
L2	4	2
L3	4	1
SC	5	3000

Табела 6. Нова табела исплата

Највећи добитак је у претходној верзији био 500, а сада је 3000, што се знатно разликује од очекиване вредности. Када се ове вредности награда и раније израчунате вероватноће убаце у формулу за волатилност из Дефиниције 4, добијамо:

$$\sigma = 64.65,$$

што је више од три пута већа волатилност у односу на оригиналну поставку. Пошто смо избацили велики број комбинација, учесталост погађања сада је:

$$p = 0.03,$$

што значи да играч у просеку остварује неку награду само једном у:

$$\frac{1}{0.03} \approx 34$$

спинова.

Прву верзију игре би вероватно изабрао неко ко воли често да добија, чак и када су исплате мање. Супротно томе, другу верзију би преферирао играч који тежи великим, али ретким добицима — односно, тзв. *high volatility* профил игре.

Број симулација (n)	Стандардна грешка	граница грешке ($z = 1.96$)	95% интервал поверења
10^6	0.02036	± 0.03990	(0.87136, 0.95116)
10^7	0.00644	± 0.01261	(0.89865, 0.92387)
10^8	0.00204	± 0.00399	(0.90727, 0.91525)
10^9	0.00064	± 0.00126	(0.91000, 0.91252)

Табела 7. 95% интервали поверења РТП процене при различитом броју симулација

РТП који смо раније израчунали аналитички и добили вредност 0.9112583, потврђујемо симулирањем великог броја игара. Та теоријска вредност се увек налази унутар интервала. Примећујемо да што је број симулација већи, то је интервал ужи и грешка мања.

Запишимо матрицу преласка. Стања 2-5 значе да је погођена линијска комбинација те дужине, а стање 0 да није погођена никаква линијска комбинација. Запишимо вероватноће преласка

	5	4	3	2	0
5	0.006404	0.022781	0.10237	0.116667	0.751778
4	0.006404	0.022781	0.10237	0.116667	0.751778
3	0.006404	0.022781	0.10237	0.116667	0.751778
2	0.006404	0.022781	0.10237	0.116667	0.751778
0	0.006404	0.022781	0.10237	0.116667	0.751778

За стање i дефинишемо вероватноћу повратка:

$$f_i = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}.$$

Пошто је матрица преласка P таква да су све врсте идентичне и збир им је 1, имамо $P^n = P$ за свако $n \geq 1$. Дакле:

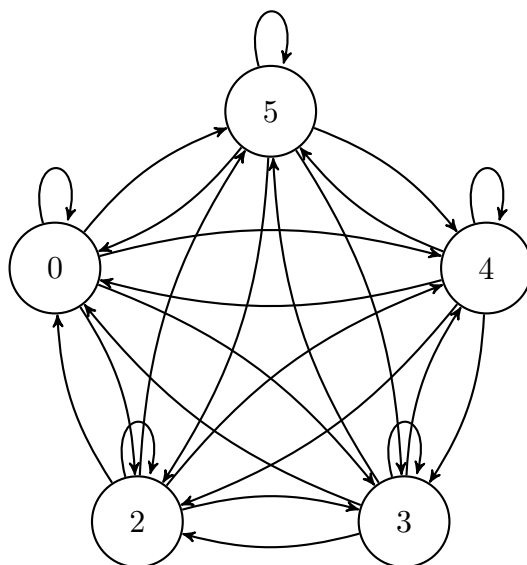
$$p_{00}^{(n)} = p_{00} = 0.751778, p_{22}^{(n)} = p_{22} = 0.116667, \dots, p_{55}^{(n)} = p_{55} = 0.006404.$$

Збир:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{55}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} 0.006404 = \infty.$$

и аналогно за остала 4 стања. Према теорему из поглавља 1, стање i је повратно ако је овај збир бесконачан. Дакле, свако од 5 стања је повратно.

Са графика видимо да се из сваког стања може стићи у било које друго стање.



Слика 3.2: Граф ланца Маркова

Симбол	Дужина	Теоријски	10^6	10^7	10^8
H1	5	5.33333%	5.21000%	5.4340%	5.333%
H1	4	5.33333%	5.35000%	5.30780%	5.333%
H1	3	6.40000%	6.34700%	6.38440%	6.400%
H1	2	1.86667%	1.85300%	1.86530%	1.867%
H2	5	4.86716%	4.63200%	4.79200%	4.867%
H2	4	7.11822%	7.07040%	7.16000%	7.118%
H2	3	11.86370%	11.87560%	11.88650%	11.864%
H2	2	2.56667%	2.58290%	2.56900%	2.567%
H3	5	3.36000%	3.30000%	3.32040%	3.360%
H3	4	2.94400%	2.97600%	2.92430%	2.944%
H3	3	2.88000%	2.91240%	2.89010%	2.880%
H3	2	1.40000%	1.39160%	1.45270%	1.400%
L1	5	6.63704%	6.55000%	6.66500%	6.637%
L1	4	3.65037%	3.75000%	3.64550%	3.650%
L1	3	3.27111%	3.23540%	3.27720%	3.271%
L2	5	3.12889%	3.16400%	3.14520%	3.129%
L2	4	1.72089%	1.69520%	1.71900%	1.721%
L2	3	1.17333%	1.16740%	1.16940%	1.173%
L3	5	7.77778%	8.02800%	7.81710%	7.778%
L3	4	5.11111%	5.04360%	5.10050%	5.111%
L3	3	2.22222%	2.22510%	2.21520%	2.222%
SC	5	0.50000%	0.55000%	0.5200%	0.500%
Укупно		91.12583%	90.90960%	91.26060%	91.1258%

Табела 8. Поређење теоријских и симулационих РТП по комбинацији

У табели 3 смо теоријски израчунали колико RTP-а доприноси свака од комбинација. Након што се симулира велики број игара и забележи колико пута је која комбинација добијена и затим те вредности помноже са њиховим добитком и поделе укупним бројем игара, добијамо симулиране појединачне RTP вредности, У табели 8 видимо како те вредности конвергирају теоријској за одређени број симулација (од 10^6 до 10^8). Примећујемо да је на 10^8 постигнута довољно добра конвергенција.

3.2 Класични бонуси

У данашње време играчима није више занимљиво да само чекају да добију исте симболе на бубњевима, већ воле разноврсност. Зато се праве видео слот игре које имају додате разне бонус игре. Сада ћемо видети како би различити бонуси могли да се додају у до сад описану класичну слот игру.

Пример 1

Прво ће скетер комбинације уместо да плаћају кредите, покретати бесплатне игре (за N игара се улаже само 1 кредит, а не N кредита). Бесплатне игре се играју исто као основна игра, а исплате могу бити увећане одређен број пута.

Како да одредимо одговарајући број бесплатних игара? Приметимо да

$$RTP = \frac{T \cdot M \cdot S \cdot N}{1 - N \cdot T}.$$

где су:

- T – вероватноћа са којом улазимо у бесплатне игре,
- M – мултипликатор,
- N – број игара,
- S – очекивани добитак за све комбинације.

Дакле на почетку се добије N бесплатних игара и онда сваки пут кад се током њих опет освоји 5 скетер симбола, добије се још N нових игара. Током

тих N бесплатних игара, очекивани број поновних активација бонуса једнак је

$$N \cdot T,$$

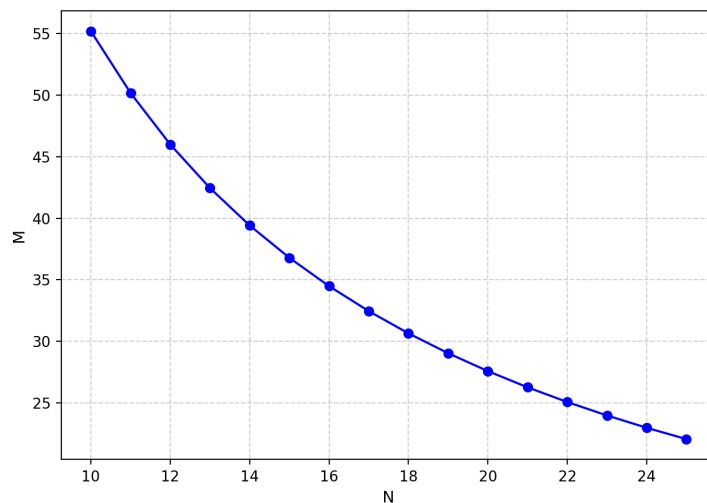
(јер свака игра независно са вероватноћом T доводи до поновног освајања N бесплатних игара), а свака од њих генерише нови процес чији је очекивани број бесплатних игара поново једнак E . Због тога важи рекурзивна једначина

$$E = N + (N \cdot T)E.$$

Из ње следи да ће очекивани број одигравања бити

$$E = \frac{N}{1 - N \cdot T}.$$

Да би нам PTP остао исти, хоћемо да удео од бесплатних игара буде око 0.005. Вредности $T = 0.00001$ (вероватноћа освајања скетер комбинација) и $S = 0.906$ (очекивање осталих добитака без скетера) имамо и онда можемо испробати разне вредности за M и N тако да добијемо жељену вредност.



Слика 3.3: График зависности броја игара и мултипликатора

На пример, $M = 25$, $N = 22$ делује као добар избор.

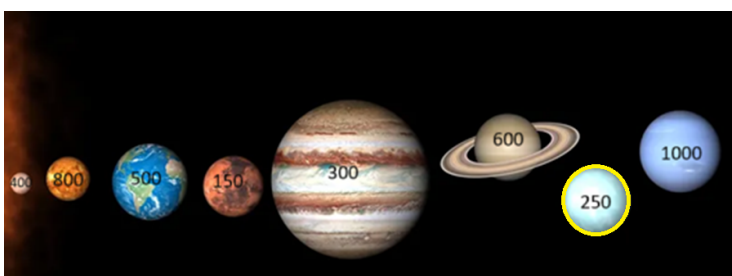
Сад ћемо разматрати примере где је бонус игра потпуно другачија од основне игре, тј. игра се без бубњева.

Пример 2

Играчу се на екрану прикаже 8 планета и он треба да изабере једну од њих. Кад изабере, откривају се вредности кредита које су се криле иза њих. Пошто играч не зна која је вредност иза које планете, не може намерно изабрати највећу, него насумично бира неку. То значи да је вероватноћа избора сваке планете $1/8$.



Слика 3.4: Екран пре играчевог избора



Слика 3.5: Екран након играчевог избора

У примеру са слике играч је изабрао другу планету здесна, па ће освојити 250 кредита.

Желимо да очекивана вредност добитка у бонус игри буде 500, како се наш $PTП$ не би променио.

Нека је U добитак у овој бонус игри, а формула за очекивање:

$$E(U) = p_1x_1 + \dots + p_8x_8.$$

Како је $p_i = 1/8$ за свако i , па можемо извући заједничку вероватноћу и назвати је p :

$$E(U) = p(x_1 + \dots + x_8) = pN,$$

где је N збир свих вредности.

Желимо $E(U) = 500$, па добијамо једначину:

$$N \cdot \frac{1}{8} = 500 \implies N = 8 \cdot 500 = 4000.$$

То значи да збир награда иза планета треба да буде 4000. Вредности можемо распоредити произвољно у зависности од жељене највеће награде или дисперзије. У наставку су два примера расподела награда.

Велика дисперзија	Мала дисперзија
1000	480
800	520
600	540
500	580
400	440
300	460
250	560
150	420

Можемо одабрати све вредности око 500 за мању волатилност, или највећу 1000, најмању 150 за већу волатилност. У првом случају, разлика најповољнијег и најнеповољнијег исхода је 160, а у другом 850.

У оба примера је μ исто.

$$\mu = \frac{1000 + 800 + 600 + 500 + 400 + 300 + 250 + 150}{8} = 500,$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{(1000 - 500)^2 + (800 - 500)^2 + \dots + (150 - 500)^2}{8} \\ &= \frac{(500)^2 + (300)^2 + (100)^2 + (0)^2 + (-100)^2 + (-200)^2 + (-250)^2 + (-350)^2}{8} \\ &= \frac{250000 + 90000 + 10000 + 0 + 10000 + 40000 + 62500 + 122500}{8} \\ &= \frac{585000}{8} = 73125, \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{73125} \approx 270.42,$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_2^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{2,i} - \mu)^2 = \frac{(480 - 500)^2 + (520 - 500)^2 + \cdots + (420 - 500)^2}{8} \\
 &= \frac{(-20)^2 + (20)^2 + (40)^2 + (80)^2 + (-60)^2 + (-40)^2 + (60)^2 + (-80)^2}{8} \\
 &= \frac{400 + 400 + 1600 + 6400 + 3600 + 1600 + 3600 + 6400}{8} \\
 &= \frac{24000}{8} = 3000, \\
 \sigma_2 &= \sqrt{3000} \approx 54.77,
 \end{aligned}$$

$$H = - \sum_{i=1}^n p \log_2 p = -8 \cdot \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 8 = 3.$$

Ентропија је у оба случаја 3. Она се може смањити ако смањимо број планета у избору, а повећати ако повећамо број опција у избору.

Пример 3

Играч добија матрицу 3×3 у којој су скривена по 3 поља вредности А, Б и В и бира поља док не отвори три исте награде:

$$\begin{bmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{bmatrix}$$

Овако би изгледала једна игра која се завршила у четири потеза.

$$\begin{bmatrix} X & X & X \\ X & A & X \\ X & X & X \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} X & X & X \\ B & A & X \\ X & X & X \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} X & X & A \\ B & A & X \\ X & X & X \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} X & X & A \\ B & A & X \\ X & A & X \end{bmatrix}$$

Иако делује сложеније, суштина је иста као у претходном примеру. Најмање три потеза (сва три исто), а највише седам потеза да би се игра завршила (првих 6 отворених по 2 од сваке вредности, последњи одлучује).

Број могућих комбинација за отварање:

- 7 отварања: $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 3 = 90 \cdot 3 = 270$

- 6 отварања: $\binom{5}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 60 \cdot 3 = 180$
- 5 отварања: $\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 24 \cdot 3 = 72$
- 4 отварања: $\binom{3}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 18$
- 3 отварања: 3

Укупно 543, за сваку награду по 181. Значи са истом вероватноћом можемо освојити сваку од 3 награде.

Формула за очекивање је иста:

$$E(U) = p(x_1 + x_2 + x_3) = pY, \quad p = 1/3.$$

Желимо $E(U) = 500$, па је $Y = 3 \cdot 500 = 1500$. Нека буде $Y = (300, 400, 800)$.

Тада награде у матрици можемо расподелити на следећи начин (битно је само да је сваке по 3, небитно на ком пољу је која):

$$\begin{bmatrix} 800 & 400 & 300 \\ 400 & 800 & 300 \\ 300 & 800 & 400 \end{bmatrix}$$

Ентропија је

$$H = - \sum_{i=1}^n p \log_2 p = -3 \cdot \frac{1}{3} \log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3 \approx 1.585.$$

Пошто су сва три исхода једнако вероватна, постигнута је максимална вредност ентропије за случај са три награде, што значи да је скроз неизвесно коју од њих ћемо освојити. Поређења ради, да су вероватноће награда $(0.9, 0.1, 0.1)$ ентропија би била

$$H = -(0.9 \log_2 0.9 + 2 \cdot 0.1 \log_2 0.1) \approx 0.922,$$

што је доста мања вредност и то значи да постоји награда која је знатно извеснија од других. С друге стране, ентропија је у овом примеру мања него у претходном зато што имамо само 3 различите награде, док смо тамо имали 8, што је више различитих исхода, а у оба примера је равномерна расподела, док величине награда не утичу на вредност ентропије.

Пример 4

Бирамо прво једну од 10 звездица; ако је на њој награда, освајамо је и идемо у ред са 2 звездице мање. Ако изаберемо X , игра је готова. Спустамо се ред по ред док не дођемо до последњег реда. Нека је

10	X	30	40	15	45	25	35	55	50
85	60	X	70	90	100	65	80		
240	230	210	220	200	X				
320	X	300	330						
440	X								

Просечни добици по нивоима кад је погођена награда: 30.89, 78.57, 220, 316.67, 440.

Вероватноће завршавања игре по нивоима: $\frac{1}{10}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$.

Вероватноће и добици:

Вероватноћа	0.1	0.1125	0.13125	0.164063	0.246094	0.246094
Укупан добитак	0	33.89	112.46	332.46	649.127	1089.127
Очекивање	0	3.8125	14.76	52.544	159.746	268.027

Први ред представља да играч одабере X у првом бирању, тада је његов добитак 0 и вероватноћа за то је 0.1 јер је X једна од 10 звездица. Други је да у првом нивоу изабере неку вредност, а у другом X , трећи да у прва два изабере вредност, а у трећем X и тако аналогно до последњег реда који значи да је у свим нивоима погодио неку награду. Имајући то у виду, тако рачунамо вероватноће: $0.1125 = \frac{9}{10 \cdot 8}$, $0.13125 = \frac{9 \cdot 7}{10 \cdot 8 \cdot 6}$, $0.164063 = \frac{9 \cdot 7 \cdot 5}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4}$, $0.246094 = \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}$. Укупан добитак за сваки ниво је очекивани добитак на том нивоу плус сума добитака са претходних. Очекивање за сваки ниво онда добијемо множењем укупног добитка и вероватноће. На крају је очекивани добитак за игру сума свих појединачних очекивања, што износи $0 + 3.8125 + 14.76 + 52.544 + 159.746 + 268.027 = 500.89$. У овом примеру смо пре него што смо дошли до приказаних вредности фиксирали број нивоа и звездица, а мењањем награда наместили да очекивање буде баш око 500.

Ако као исходе ове игре посматрамо да смо игру завршили на једном од 5 нивоа, можемо израчунати ентропију (последња вероватноћа је збир пете и шесте из табеле, јер обе представљају завршетак на 5. нивоу само једна са X ,

а друга са 1000). Ентропија је

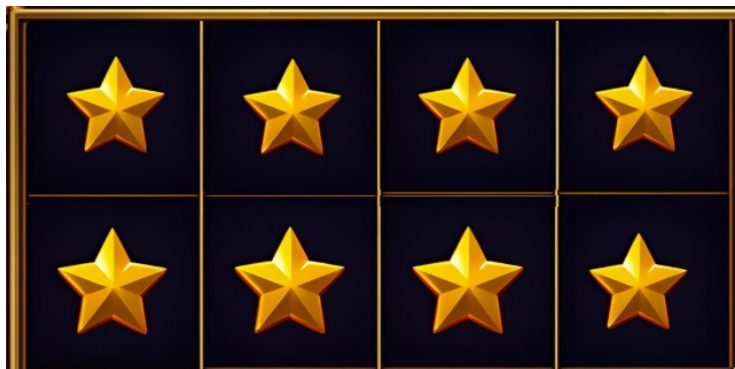
$$\begin{aligned} H &= - \sum_{i=1}^5 p_i \log_2 p_i \\ &= - \left(0.1 \cdot \log_2 0.1 + 0.1125 \cdot \log_2 0.1125 + 0.13125 \cdot \log_2 0.13125 \right. \\ &\quad \left. + 0.164063 \cdot \log_2 0.164063 + 0.492188 \cdot \log_2 0.492188 \right) \\ &\approx 2.0476. \end{aligned}$$

Овде је један исход знатно већи од осталих, али не доминира превише.

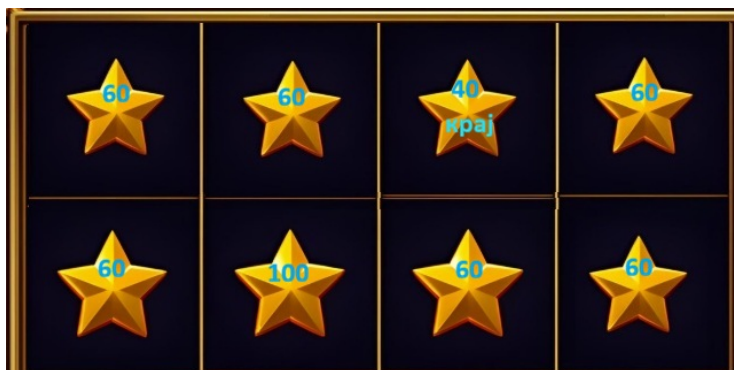
Пример 5

Бирамо звездице са враћањем. На располагању су:

- 1 звездица са наградом од 100 кредита,
- 6 звездица са наградом од 60 кредита,
- 1 звездица са наградом од 40 кредита и написано *крај*.



Слика 3.6: Ово је приказано играчу



Слика 3.7: Ово се крије иза

Након сваког бирања се поново насумично распоређује где је шта.

Овде можемо користити геометријску расподелу.

Вероватноћа да извучемо звездицу на којој пише *крај* је

$$r = \frac{1}{1 + 6 + 1} = 0.125,$$

па је очекивани број извлачења

$$\frac{1}{r} = 8.$$

Очекујемо да ће пре извучене звезде са *крај* бити 7 извлачења, а очекивани добитак по једном извлачењу је:

$$E = \frac{6 \cdot 60 + 100}{7} \approx 65.7143.$$

Укупни очекивани добитак ове игре је:

$$E_{\text{укупно}} = 7 \cdot 65.7143 + 40 = 500.$$

Пошто желимо да очекивање буде 500, можемо поставити и општу формулу:

$$500 = \left(\frac{1}{r} - 1 \right) \cdot E + X,$$

где је r вероватноћа да се извуче звезда са *крајем*, E очекивани добитак појединачног извлачења пре крајње звезде, а X награда која се осваја уз крајњу звездицу.

Видели смо да тројка (r, E, X) задовољава ову једначину. Могуће је написати код који би нашао још оваквих тројки, али у пракси дизајнер игре обично

има неку фиксну вредност, па ако би фиксирао једну од ове 3 променљиве, са графика у 2 димензије би могао да нађе све парове који задовољавају формулу као у примеру 1. Ако имамо фиксирани 2 вредности, трећа се налази простим решавањем једначине. Нпр. ако желимо $r = 10, E = 30$, занима нас да нађемо X тј. која вредност треба да стоји на звездици са ознаком крај.

$$500 = (10 - 1) \cdot 30 + X \Rightarrow X = 500 - 270 = 230.$$

Пример 6

Бирамо 5 бројева од 40. Затим се извлачи 8 бројева и у зависности колико смо погодили, добијамо одређену награду. Овде користимо биномну расподелу.

Награда	Број погођених	Број комбинација	Вероватноћа	Очекивање	Учесталост
0	0	23 535 820	0.306038832	0	3.267559
380	1	33 622 600	0.437198332	166.1353661	2.287291
900	2	16 231 600	0.211061264	189.9551373	4.737961
3000	3	3 246 320	0.042212253	126.6367582	23.6898
5000	4	261 800	0.003404214	17.02106965	293.7536
10000	5	6 545	8.51053×10^{-5}	0.851053483	11750.14
		76 904 685	1	500.5993848	

Број укупних комбинација за извлачење је:

$$\binom{40}{8} = 76\,904\,685.$$

Број комбинација за тачно t погодака је:

- Погодили 0: $\binom{35}{8}$
- Погодили 1: $\binom{35}{7} \cdot \binom{5}{1}$
- Погодили 2: $\binom{35}{6} \cdot \binom{5}{2}$
- Погодили 3: $\binom{35}{5} \cdot \binom{5}{3}$
- Погодили 4: $\binom{35}{4} \cdot \binom{5}{4}$
- Погодили 5: $\binom{35}{3} \cdot \binom{5}{5}$

Вероватноћу да смо погодили тачно t бројева добијамо тако што поделимо број комбинација за тај исход са укупним бројем комбинација:

$$P(\text{погодили } t) = \frac{\binom{k}{t} \cdot \binom{N-k}{m-t}}{\binom{N}{m}},$$

где је N укупан број бројева на табли, m број извучених, k број изабраних, а t број погодака.

Ово је мини верзија познате Кино игре (80 бројева, извлачи се 20, играч бира 2–10 бројева).

Приметимо да је велика вероватноћа да погодимо тачно 1 број, мало ређе него сваки други пут (2.29), док је очекивано да се свих 5 бројева погоди само једном у 11750 одигравања. Број комбинација, вероватноћа и учесталост не зависе од вредности награда. За њих смо изабрали један од случајева у коме ће укупно очекивање бити око 500. То се може постићи и за другачије вредности параметара N , m , k , t или вредности награда.

Ентропија у овом бонусу је

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \approx 1.74.$$

Пример 7

Имамо 5 поља и на свако поље са одређеном вероватноћом која зависи од броја живота и броја тренутних звездица пада нова звезда. Играч креће са 2 живота: ако ни на једно поље не падне звезда, губи живот, а ако падне бар једна, број живота се враћа на 2.

Кад изгубимо све животе, врши се исплата.

Задајмо табелу тежина, у зависности од тога колико живота и већ палих звездица имамо. Ако имамо m звездица, у једном потезу може да нам падне још 5 - m .

Претворимо ове тежине у вероватноће тако што ћемо сваку појединачну поделити са сумом тежина колоне у којој се налази. Сума вероватноћа сваке колоне је онда 1.

Ово ћемо решити помоћу ланца Маркова.

Формирајмо матрицу прелаза између стања. Први број представља колико нам звездица фали, а други колико живота имамо. Никад не можемо да пређемо из стања где нам фали мањи број звездица у оно где нам фали више

ГЛАВА 3. РЕШАВАЊЕ КОМБИНАТОРНИХ ПРОБЛЕМА

	5		4		3		2		1	
r	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
0	25000	1200	3500000	1850	6500000	2100	5500010	6610	3005197	101500
1	8600	860000	940000	940000	970000	970000	1650000	3300	1	1
2	1200	12000	60000	60000	4000	50000	1	1	0	0
3	200	2000	1	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
5	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

	5		4		3		2		1	
r	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
0	0.7142449	0.001371112	0.777777432	0.00184658	0.869681446	0.002054591	0.769230984	0.666935728	0.999999667	0.999990148
1	0.245700246	0.982630296	0.208888796	0.938262338	0.129783231	0.949025586	0.230768876	0.332963374	3.32757E-07	9.85212E-06
2	0.034283755	0.01371112	0.013333327	0.059889085	0.000535189	0.048918845	1.3986E-07	0.000100898	0	0
3	0.005713959	0.002285187	2.22222E-07	9.98151E-07	1.33797E-07	9.78377E-07	0	0	0	0
4	2.85698E-05	1.14259E-06	2.22222E-07	9.98151E-07	0	0	0	0	0	0
5	2.85698E-05	1.14259E-06	0	0	0	0	0	0	0	0

и не можемо изгубити два живота истовремено. Стања у којима имамо 0 живота су апсорбујућа јер је крај игре кад дођемо у њих. Сваки ред ове матрице се сумира на 1.

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	
	52	51	50	42	41	40	32	31	30	22	21	20	12	11	10	0	
4	52	0	0.71425	0	0.24570	0	0	0.03428	0	0	0.00571	0	0	2.8570E-05	0	0	2.8570E-05
5	51	0	0	0.00137	0.98263	0	0	0.01371	0	0	0.00229	0	0	1.1426E-06	0	0	1.1426E-06
6	50	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	42	0	0	0	0	0.77778	0	0.20889	0	0	0.01333	0	0	2.2222E-07	0	0	2.2222E-07
8	41	0	0	0	0	0	0.00185	0.93826	0	0	0.05989	0	0	9.9815E-07	0	0	9.9815E-07
9	40	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	32	0	0	0	0	0	0	0.86968	0	0.12978	0	0	0	0.00054	0	0	1.3380E-07
11	31	0	0	0	0	0	0	0	0.00206	0.94903	0	0	0	0.04892	0	0	9.7838E-07
12	30	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.76923	0	0	0.23077	0	0	1.3986E-07
14	21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.66694	0.33296	0	0	0.00010	0
15	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
16	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.99999	0	3.3276E-07	0
17	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.99999	9.8521E-06	0
18	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Табела 3.1: Матрица преласка

Крећемо увек из стања 52, а можемо да завршимо у било ком од апсорбујућих стања 50, 40, 30, 20, 10, 0. Дакле, 50 значи да је играч завршио игру са 0 звездица, 40 са једном звездом, ... 0 да је завршио са свих 5 звездица. За сваку од палих звездица добија X кредита.

	42	32	22	12	0
52	0.947539	0.933482	0.955717	0.505577	0.000110712
42	0	0.938648	0.956448	0.506126	0.000081445

Табела 3.2: Вероватноће стицања у стања са 2 живота.

	50	40	30	20	10	0
52	0.000979	0.001361	0.001668	0.490309	0.505572017	0.000110711
42	0	0.001436	0.001677	0.490684	0.506121062	0.000081445

Табела 3.3: Вероватноће завршавања у сваком од апсорбујућих стања.

Вредности у овим табелама су добијене тако што су се сумирале вероватноће свих могућих путања. Прикажимо како се рачунају неке вредности из табеле, а остале се раде аналогно.

$$P_{52 \rightarrow 42} = F4 + D4 \cdot F5,$$

$$P_{52 \rightarrow 32} = I4 + D4 \cdot I5 + C22 \cdot D23,$$

$$P_{52 \rightarrow 22} = L4 + D4 \cdot L5 + D22 \cdot L10 \\ + D22 \cdot J10 \cdot L11 + C22 \cdot L7 + C22 \cdot G7 \cdot L8,$$

$$P_{52 \rightarrow 12} = O4 + D4 \cdot O5 + C22 \cdot O7 + C22 \cdot G7 \cdot O8 \\ + D22 \cdot O10 + D22 \cdot J10 \cdot O11 \\ + E22 \cdot O13 + E22 \cdot M13 \cdot O14.$$

Када сумирамо производ броја звездица са којим је играч завршио и вероватноће тог исхода, добијамо

$$E(X) = 0 \cdot 0.000979 + 1 \cdot 0.001361 + 2 \cdot 0.001668 \\ + 3 \cdot 0.490309 + 4 \cdot 0.505572017 \\ + 5 \cdot 0.000110711 \\ = 3.498465623.$$

Пошто желимо да је $E(X) = 500$, из једначине $500 = 3.498465758 \cdot X$ добијамо $X = 143$.

Некада су бонуси компликовани за рачунање аналитички, па очекивану вредност добијамо симулацијом великог броја игара.

У наредна 2 примера применићемо закон великих бројева: ако симулирамо довољан број независних игара, просечан добитак ће конвергирати очекиваној вредности бонуса.

Пример 8: Заврти точак

Играч креће са 10 кредита. Он има точак који врти све док не добије вредности 2, 3 или 4 које му умножавају тренутну вредност. Ако добије вредности 40, 250, 10, 20, 75 или 35, оне му се додају на тренутну вредност.

Свака вредност има своју тежину која се мења у зависности од редног броја вртења точка.

Вероватноћа одређеног добитка се добија тако што се одређена тежина подели са збиром свих тежина. Ово се може решити аналитички, али је могуће потврдити резултат и симулацијом.

Награда	4. и наредна	3. вртење	2. вртење	1. вртење
40	17	27	1800	1784
250	55	780	554	296
10	132	126	1320	48428
2	2641	135	22804	1
3	533	208	20800	1
4	2641	35	228	1
20	118	50	2114	125096
75	948	97	1000	65514
35	1750	30	2190	186101

Табела 3.4: Тежине и награде за сваки симбол по вртењу

Аналитичко решење очекиваног добитка је 500.0444. Резултат након милион симулација је 500.427, а након 100 милиона је 500.041. Рапччлањено по томе након колико вртења смо завршили игру добијамо удео очекивања за 1,2,3,4 и 5 или више да износе 0.000210663, 30.6295036, 354.2686324, 69.30741286, 45.83859569 кредита.

Пример 9: Матрица са звездицама

Имамо матрицу димензија $n \times n$ и на свако поље са вероватноћом p пада звезда. Играч има 3 живота: ако ни на једно поље не падне звезда, губи живот, ако падне бар једна, број живота се враћа на 3.

Кад изгубимо све животе, врши се оцењивање: за сваки ред који је скроз испуњен звездицама добија се W кредита.

Параметри који утичу на добитак:

- Ако p расте, расте и шанса да имамо све звезде и добијемо награду.

- Повећање броја живота повећава шансу за добитак.
- Повећање n повећава могући добитак.

Могуће модификације:

1. Живот се не враћа на 3, него остаје онолико колико је тренутно.
2. Оцењују се и врсте и колоне.
3. Добитак W_2 се добија ако у реду имамо $n - 1$ звездицу.

Пример матрице након одигравања:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Овде су се 2 реда сасвим попунила тако да би играч освојио $2W$ кредита.

Резултати добијени симулацијом за $p=0.1$, $d=5$ и $W=240$:

Број редова	Вероватноћа
5	0.04686
4	0.133314
3	0.209233
2	0.238012
1	0.214734
0	0.157847

Табела 3.5: Вероватноће по броју редова

У том случају је очекивање

$$\begin{aligned} E(X) &= 240 \cdot (5 \cdot 0.04686 + 4 \cdot 0.133314 + 3 \cdot 0.209233 + 2 \cdot 0.238012 \\ &\quad + 1 \cdot 0.214734 + 0 \cdot 0.157847) = 500.643. \end{aligned}$$

Примећујемо да се максимална награда ретко освоја, док су остале равномерније распоређене. Ентропија ове игре је

$$\begin{aligned} H &= - \sum_{i=1}^6 p_i \log_2 p_i \\ &= - \left(0.04686 \log_2 0.04686 + 0.133314 \log_2 0.133314 \right. \\ &\quad \left. + 0.209233 \log_2 0.209233 + 0.238012 \log_2 0.238012 \right. \\ &\quad \left. + 0.214734 \log_2 0.214734 + 0.157847 \log_2 0.157847 \right) \\ &\approx 2.456551. \end{aligned}$$

Слично очекивање можемо даобити за много разних комбинација параметара, на пример за $p=0.2$, $d=5$ и $W=130$ се добија 500.634 кредита.

3.3 Игре са стратегијом

Било би занимљиво да се у слот игре уведе и неки фактор избора играча. Тако компанија може да каже да је РТП игре онај који би се добио при игрању оптималном стратегијом, али пошто има играча који ће играти лошије, тај теоретски РТП се смањује, па компанија може зарадити више на игри.

Игра До 2025

Игра почиње тако што играч први бира позитиван цео број мањи или једнак 28. Затим машина додаје свој број (такође мањи или једнак 28). Игра се наставља наизменично све док неко достигне број 2025, чиме тај играч побеђује.

Оптимална стратегија:

$$2025 \bmod 29 = 24.$$

То значи да играч има загарантовану победу ако први каже број 24 и потом игра оптимално. Који год број x да машина изабере у свом потезу, играч увек каже $29 - x$, што му омогућава да наизменичним потезима дође до бројевне секвенце:

$$24, 53, 82, \dots, 1996.$$

У последњој рунди, машина може доћи само до 1997–2024, па не може победити.

Ако машина игра прва: када би циљ био 88, а дозвољени бројеви су од 1 до 5, не би имало смисла да машина прва игра ако игра оптимално, јер играч нема шансу да победи.

Ако би машина играла прва, морало би да се подеси да за први број може да каже било који други број сем оног који јој доноси победу, а после да настави оптимално, како невешти играчи не би победили.

Ако машина каже било који број x мањи од 4, онда играч треба да каже $4 - x$ и онда се игра наставља као да је он играо први, а у супротном играч треба да каже број $6 + 4 - x$.

Уопштимо, нека је циљани број N , а бирају се произвољни бројеви од 1 до m . Да би први играч победио, он мора рећи број:

$$N \bmod (m + 1).$$

Игра *Найџуни ђуџи*

У ђуџу се налазе 3 новчића. У сваком потезу играч бира колико новчића ће додати, дозвољене вредности су од 1 до $n - 1$, где је n тренутни број новчића у ђуџу. Циљ је напунити ђуџ са 100 или више новчића.

Оптимална стратегија: Крећемо уназад када је $n = 100$ да правимо низ

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

- Изгубиће онај који игра након што се у ђуџу налази $n = 50$ новчића, јер након њега укупан број може да буде или $n + 1 = 51$ или $2n - 1 = 99$.
- Настављајући даље да тражимо губитничке позиције, добијамо 25, 12, 6, 3.
- Значи, да би играч победио, он мора да пусти машину да игра прва и онда да увек додаје онолико колико фали до наредног члана у губитничком низу.

Иако ове две игре немају стохастичку компоненту, оне представљају комбинаторне стратегијске игре. Ако машина не игра оптимално, већ насумично, онда би постојала и стохастичка компонента. Ако играч који победи осваји 500 кредита, а у супротном ништа, РТП игре са овим бонусом би био мањи него у осталим бонусима које смо правили са очекивањем 500, јер не можемо да гарантујемо да ће сви играчи играти оптимално.

Игра *Прихвати или одбиј*

Играчу су приказане следеће награде:

$$1000, 600, 500, 300, 200, 100, 80, 60, 40, 30.$$

Насумично му се додељује једна од њих. Играч може да је задржи или да тражи поновно извлачење, а ако дође до треће понуде, њу мора да прихвати.

Оптимална стратегија: Кренимо уназад:

1. **Трећа понуда:** очекивани добитак је

$$\bar{X} = \frac{1000 + 600 + 500 + 300 + 200 + 100 + 80 + 60 + 40 + 30}{10} = \frac{2910}{10} = 291.$$

2. **Друга понуда:** ако је вредност већа од 291, прихватамо; ако је мања, одбијамо.

$$\bar{X}_2 = \frac{1000 + 600 + 500 + 300 + 6 \cdot 291}{10} = \frac{4146}{10} = 414.6.$$

3. **Прва понуда:** вредности веће од 414.6 се прихватају, остале се одбијају.

Тада је укупно очекивање ове игре

$$E = \frac{1000 + 600 + 500 + 7 \cdot 414.6}{10} \approx 500.22.$$

Игра *Ковчеџ*

Играч има 5 затворених ковчега, у 4 се налази утешна награда од 10 кредита, а у једном је велика награда. Играч бира један ковчег, а затим се отвара n ковчега са утешном наградом. Играчу је дозвољено да промени избор.

Примери:

- **Отварање 3 ковчега:** Вероватноћа да велика награда буде у првобитно изабраном ковчегу је $1/5$. Вероватноћа да је у другом преосталом ковчегу је $4/5$.

$$500 = 0.2 \cdot 10 + 0.8 \cdot N \implies N = 623.$$

- **Отварање 2 ковчега:** Вероватноћа да је велика награда у првобитно изабраном ковчегу је опет $1/5$, што значи да је вероватноћа у неком од остала 4 једнака $4/5$. Када се отворе 2 од та преостала 4, друга 2 деле ту вероватноћу, тако да ако изаберемо неки од њих, вероватноћа да је ту велика награда је

$$\frac{\frac{4}{5}}{2} = \frac{2}{5}.$$

То значи да је онда вероватноћа да не освојимо велику награду $3/5$.

$$500 = 0.6 \cdot 10 + 0.4 \cdot N \implies N = 1235.$$

- **Отварање 1 ковчега:** Овде 3 преостала неотворена ковчега која нисмо изабрали деле вероватноћу $4/5$. Ако променимо наш избор, вероватноћа да је награда у неком од њих јесте

$$\frac{\frac{4}{5}}{3} = \frac{4}{15}.$$

$$500 = \frac{11}{15} \cdot 10 + \frac{4}{15} \cdot N \implies N = 1850.$$

У сваком од примера је оптимално променити избор.

Напомена: Играч који не следи оптималну стратегију има много мање очекивање

$$0.8 \cdot 10 + 0.2 \cdot N.$$

Игра Коцкице

Имамо 3 коцкице са следећим бројевима на странама:

Коцка 1: 6, 6, 2, 2, 2, 2

Коцка 2: 3, 3, 3, 3, 3, 3

Коцка 3: 5, 4, 4, 4, 1, 1

Машина бира једну коцку, а играч од преостале две бира своју. Затим свако баца 5 пута. За сваки пут када играч добије већи број, осваја 159 кредита.

Очекујемо вредност коцкица:

$$E_1 = \frac{6 + 6 + 2 + 2 + 2 + 2}{6} = 3.33, \quad E_2 = 3, \quad E_3 = 3.17.$$

Одавде може деловати да је коцка 1 најјача и да треба бирати њу ако је слободна, па коцка 3 следећа, док коцку 2 не треба бирати. Заправо овде избор играча игра кључну улогу јер коју год коцку машина узела, једна од преосталих је јача, а друга слабија. Коцка 2 је јача од коцке 1, коцка 3 јача од коцке 2, а коцка 1 јача од коцке 3.

Јача у овом контексту значи да има више случајева кад ћемо победити него изгубити. На слици је приказано како има 20 исхода у којима 1 побеђује 3, а 16 где 1 губи од 3, што значи да кад се бацају 1 и 3, чешће је победник 1. Аналогно се разматрају друге 2 комбинације коцкица.

I \ III	5	4	4	4	1	1
6						
6						
2						
2						
2						
2						

Слика 3.8: Наранџасто је победа коцке 1, а плаво коцке 3

Ако машина узме 1, а играч 2, победићемо у случају да машина добије 2, а изгубити ако добије 6, значи

$$\frac{2}{6} \text{ за губитак, а } \frac{4}{6} \text{ за добитак, вероватноћа за победу је } \frac{2}{3}.$$

Ако машина узме 2, а играч 3, победићемо у случају да добијемо 5 или 4, а изгубити ако добијемо 1, значи опет

$$\frac{2}{6} \text{ за губитак, а } \frac{4}{6} \text{ за добитак, вероватноћа за победу је } \frac{2}{3}.$$

Ако машина узме 3, а играч 1, победићемо у случају да добијемо 6, а машина било шта или ако ми добијемо 2, а машина 1, у супротном губимо, значи

$$\frac{16}{36} \text{ за губитак, а } \frac{20}{36} \text{ за добитак, вероватноћа за победу је } \frac{5}{9}.$$

Када знамо вероватноћу добитка у једном бацању, можемо израчунати укупан очекивани добитак. Број бацања у којима ћемо победити има биномну расподелу са параметрима (n, r) и њено очекивање је nr .

Укупно очекивање за 5 бацања је узимајући у обзир да машина бира сваку коцку с вероватноћом $\frac{1}{3}$ једнако:

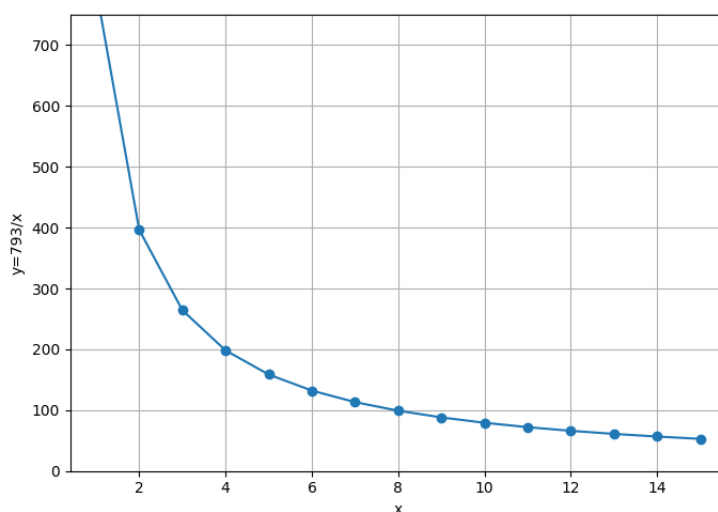
$$E[X] = \left(\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{5}{9} \right) \times 159 = 3.15 \times 159 = 500.85.$$

Изабрали смо да награда буде баш 159 кредита, како би очекивање за 5 бацања било око 500 и уклопило се у бонус игру. Можемо да мењамо број бацања n и величину награде S да видимо остале могућности:

$$500 = 0.63 \cdot n \cdot S,$$

$$n \cdot S = 500/0.63 = 793.65.$$

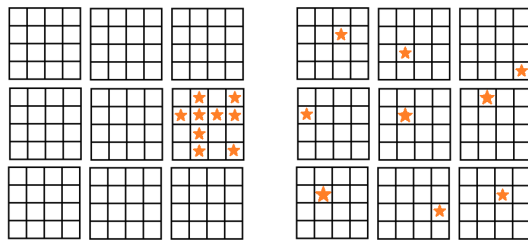
Са графика видимо кад се n креће од 0 до 15 колика награда треба да буде. Избор од 8 бацања и награда од 99 кредита делује као добар избор, јер ако има премало бацања, играчи могу да остану без награде, а желимо да бар нешто зараде, а превише бацања може да постане досадно.



Слика 3.9: Награда y у зависности од броја игара x

Игра $x \times 1$ или $1 \times x$

Играч добија x табли димензија $m \times m$ и x звездица. Он бира да ли ће све звездице ставити на једну таблу или по једну на сваку таблу. Након тога, машина насумично изабере по једно поље на свакој табли. Ако је изабрано бар једно поље са звездом, играч осваја награду.



Слика 3.10: Пример обе опције

Стратегија када је важно да се погоди бар једна звезда:

$$P_{\text{једна табла}} = \frac{x}{n}, \quad P_{\text{по једној звездици на } x \text{ табли}} = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^x,$$

где је $n = m^2$ број поља по табли, а x број звездица. Према Бернулијевој неједнакости:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^x \geq 1 - \frac{x}{n}, \quad 1 < x < n.$$

Оптималан избор: У примеру на слици је $n = 16$ и $x = 9$, па је:

$$P_{\text{оптимално}} > 0.5, \quad P_{\text{неоптимално}} < 0.5.$$

Ако би на пример одабрали $x = 9$ и $n = 16$, очекивана награда треба да буде:

$$U = \frac{500}{0.5625} \approx 889.$$

Тада би очекивање за неповољан избор било:

$$E = 889 \cdot 0.4406 \approx 392.$$

x	x/n	$1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^x$
2	0.1250	0.121094
3	0.1875	0.176025
4	0.2500	0.227524
5	0.3125	0.275804
6	0.3750	0.321066
7	0.4375	0.363499
8	0.5000	0.403281
9	0.5625	0.440575
10	0.6250	0.475540
11	0.6875	0.508318
12	0.7500	0.539048
13	0.8125	0.567858
14	0.8750	0.594867

Табела 3.6: Вредности за x , $\frac{x}{n}$ и $1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^x$

Варијација игре са наградом за сваку погођену звездицу Пошто је у претходном примеру било битно само да је погођена бар једна звездица и награда остаје иста иако смо погодили више од једне, размотримо сад случај где се добија онолико награда колико је погођених звездица. Тада је очекивани број погођених звездица при другом избору такође $\frac{x}{n}$ као биномна расподела са вероватноћом $\frac{1}{n}$ и бројем погађања x . У овом случају РТП на дуге стазе остаје исти, али играчи би вероватно бирали другу опцију јер ако су све на истој табли, може да погоди само једну, а ако стави на сваку, има прилику да освоји више награда. Приметимо да

$$P(\text{све звездице}) = \left(\frac{1}{16}\right)^9 \approx \text{тежи нули},$$

$$P(2 \text{ звездице}) = \binom{9}{2} \left(\frac{1}{16}\right)^2 \left(\frac{15}{16}\right)^7 = 36 \cdot \frac{1}{256} \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^7 \approx 0.185.$$

Дакле, ако се добија само једна награда и за више погођених, очекивање је веће за прву опцију, а ако се добија награда за сваки погодак очекивање је исто, али друга игра има већу волатилност, ентропију и шансу за велики добитак, па би вероватно играчи бирали ту опцију. Ентропија је

$$H_1 = - \left[\frac{9}{16} \log_2 \frac{9}{16} + \frac{7}{16} \log_2 \frac{7}{16} \right] \approx 0.989,$$

$$H_2 = - \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \left(\frac{1}{16}\right)^k \left(\frac{15}{16}\right)^{9-k} \log_2 \left[\binom{9}{k} \left(\frac{1}{16}\right)^k \left(\frac{15}{16}\right)^{9-k} \right] \approx 1.409,$$

$$\sigma_1 = 889\sqrt{\frac{9}{16} \cdot \frac{7}{16}} = 889\sqrt{\frac{63}{256}} \approx 889 \cdot 0.496 \approx 441,$$
$$\sigma_2 = 889\sqrt{9 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{15}{16}} = 889\sqrt{\frac{135}{256}} \approx 889 \cdot 0.726 \approx 645.$$

Глава 4

Закључак

У овом раду разматрани су комбинаторни проблеми у стохастичким играма са акцентом на примену теорије вероватноће, комбинаторике и случајних процеса у анализи игара на срећу. Основни циљ рада био је да се прикаже на који начин се сложени стохастички системи, као што су слот и разне друге игре, могу формално моделовати и анализирати коришћењем математичких алата.

У првом делу рада уведени су основни теоријски појмови неопходни за даљу анализу. Централни део рада био је посвећен конструкцији и математичкој анализи слот игре. Израчунати су релевантни параметри као што су вероватноће појединих исхода, очекивани добитак и ентропија, што је омогућило да се види, на пример, како мењањем величина појединачних награда можемо да имамо игре са већом/мањом волатилношћу и ентропијом, а да очекивање остане исто. Поред основне игре, анализиране су и бонус игре, како аналитичким методама, тако и помоћу симулација, чиме је потврђена сагласност теоријских резултата са нумеричким експериментима.

На крају су обрађене и игре у којима стратегија играча утиче на исход. Ту је као очекивани добитак рачуната вредност која би се добила ако играч игра оптималном стратегијом, док ако прави лоше изборе може да заради знатно мање. Оваква анализа наглашава везу између стохастичких игара и теорије одлучивања.

Примећујемо и ситуације када ентропија узима екстремне вредности. Минимална вредност ентропије постиже се у случају потпуне извесности, односно када један од исхода има вероватноћу једнаку 1, а сви остали вероватноћу 0. У том случају важи $H = 0$, што одговара ситуацији у којој је исход игре

унапред познат и не постоји никаква случајност. Такви примери због предвидљивости нису занимљиви, па их нисмо обрађивали. Са друге стране, максимална вредност ентропије постиже се када су сви исходи једнако вероватни, односно када је

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}.$$

У том случају ентропија износи

$$H_{\max} = \log_2 n,$$

што одговара ситуацији максималне неизвесности. Овакве игре су занимљиве јер указују на максималан степен случајности и минималну могућност предвиђања исхода. Примећујемо и да у овом случају ентропија расте, како број исхода n расте, јер је то број већи од 1. Такве игре смо имали у примерима 2 и 3.

Код основне игре нема много простора за усложњавање, док се бонус игре могу неограничено проширивати, отежавати и осмишљавати потпуно нове.

Слот игре разматране у овом раду нису повезане само са вероватноћом и комбинаториком већ и са другим областима математике, као што је проблем оптимизације РТП-а, а више о томе се може наћи у раду под бројем [8].

Глава 5

Кодови

```
1 #include <iostream>
2 #include <ctime>
3 #include <cstdlib>
4 #include <chrono>
5 #include <random>
6
7 using namespace std;
8 using namespace chrono;
9
10
11 int profit = 0, a1 = 0, a2 = 0, a3 = 0, a4 = 0, a5 = 0,
    bankrot = 0, n = 1000000, d=5, prize =240;
12 bool m[5][5] = { false };
13 double p = 0.1;
14 unsigned seed =
    high_resolution_clock::now().time_since_epoch().count();
15 default_random_engine generator(seed);
16 uniform_real_distribution<double> distribution(0, 1);
17
18 bool play() {
19     bool rez(false);
20     for (int i(0); i != d; ++i)
21         for (int j(0); j != d; ++j)
22             if (!m[i][j] && distribution(generator) < p) {
```

```

23             m[i][j] = true;
24             rez = true;
25         }
26     return rez;
27 }
28
29 int evaluation() {
30     /*for (int i(0); i != d; ++i)
31         for (int j(0); j != d; ++j)
32
33             cout<< m[i][j];*/
34
35     int win(0), s(0), t(0);
36
37     for (int i(0); i != d; ++i){
38         t=0;
39         for (int j(0); j != d; ++j) if (m[i][j] ) ++t;
40         if (t==d) ++s;}
41     win = prize * s;
42     return win;
43 }
44
45 int f() {
46     int life = 3;
47     for (int i(0); i < d; ++i)
48         for (int j(0); j < d; ++j) m[i][j] = false;
49     while (life) {
50         if (!play()) --life;
51         else life = 3;
52     }
53     int rez = evaluation();
54     if (rez == d*prize) ++a5;
55     if (rez == prize*(d-1)) ++a4;
56     if (rez == (d-2)*prize) ++a3;
57     if (rez == (d-3)*prize) ++a2;

```

```

58     if (rez == (d-4)*prize) ++a1;
59     if (!rez) ++bankrot;
60     return rez;
61 }
62
63 int main() {
64     //auto start = high_resolution_clock::now();
65     for (int i(0); i != n; ++i) profit += f();
66     cout << "win: " << (profit / (double)n) << endl;
67     cout << "Verovatnoca max win: " << a5 / (double)n <<
        endl;
68     cout << "Verovatnoca 4 reda: " << a4 / (double)n <<
        endl;
69     cout << "Verovatnoca 3 reda: " << a3 / (double)n <<
        endl;
70     cout << "Verovatnoca 2 reda: " << a2 / (double)n <<
        endl;
71     cout << "Verovatnoca 1 red: " << a1 / (double)n <<
        endl;
72     cout << "Verovatnoca da nista nije osvojeno: " <<
        bankrot / (double)n << endl;
73     //auto stop = high_resolution_clock::now();
74     //auto duration = duration_cast<seconds>(stop - start);
75     //cout << duration.count() << endl;
76     return 0;
77 }

1 #include <iostream>
2 #include <vector>
3 #include <string>
4 #include <unordered_map>
5 #include <random>
6 #include <ctime>
7 #include <iomanip>
8 using namespace std;
9

```

```

10 const int NUM_REELS = 5;
11 const int NUM_POSITIONS = 30;
12 const int WINDOW_HEIGHT = 3;
13 const int SIMULATIONS = 10000000;
14
15 // Reel configuration
16 vector<vector<string>> reels = {
17     {"L1", "H2", "L3", "H3", "L1", "L2", "L3", "H1", "H2", "L2", "H3", "L1",
18      "L2", "L3", "L1", "H2", "H2", "L3", "H1", "H2", "L3", "L1", "H2", "H1",
19      "H3", "SC", "H1", "H2", "L1", "L3"},
20     {"L3", "L1", "L2", "L3", "H1", "W", "L1", "L2", "W", "H1", "W", "H1", "L2",
21      "L3", "W", "H2", "W", "L3", "L1", "W", "L3", "W", "H2", "W", "H3", "L3",
22      "SC", "H3", "H3", "W"},
23     {"H2", "W", "H3", "L1", "L2", "L3", "H1", "H2", "SC", "W", "H2", "W", "H3",
24      "L1", "L2", "L3", "H1", "W", "W", "H3", "L2", "L3", "H1", "L2", "W", "H2",
25      "H2", "H2", "L2", "L3"},
26     {"H3", "L1", "L2", "L3", "H1", "L3", "L1", "L2", "L3", "H1", "H3", "L1", "L2",
27      "L3", "H1", "H2", "SC", "L3", "L1", "L2", "L3", "H1", "H2", "W", "L3",
28      "L3", "W", "H3", "L1", "H3"},
29     {"L3", "L3", "L2", "L2", "L1", "L1", "H3", "H3", "H1", "L1", "H3", "L1",
30      "L2", "L3", "H1", "H2", "W", "SC", "L3", "L2", "L1", "H3", "H2", "H1",
31      "H3", "W", "L2", "L2", "L1", "L3"}
32 };
33
34 // Payout table
35 unordered_map<string, unordered_map<int, double>> payouts =
36     {
37         {"H1", {{5, 100}, {4, 20}, {3, 5}, {2, 0.5}}},
38         {"H2", {{5, 80}, {4, 18}, {3, 4}, {2, 0.5}}},
39         {"H3", {{5, 60}, {4, 16}, {3, 3}, {2, 0.5}}},
40         {"L1", {{5, 50}, {4, 10}, {3, 2}}},
41         {"L2", {{5, 40}, {4, 8}, {3, 1}}},
42         {"L3", {{5, 30}, {4, 6}, {3, 1}}},
43         {"SC", {{5, 500}}}
44     };

```

```

44
45 mt19937 rng(time(0));
46 uniform_int_distribution<int> dist(0, NUM_POSITIONS - 1);
47
48 // Wild substitution
49 bool matchSymbol(const string& sym, const string& target) {
50     if (sym == target) return true;
51     if (sym == "W" && target != "SC") return true;
52     return false;
53 }
54
55 // Calculate line win and return count
56 pair<double, int> calculateLineWin(const vector<string>&
    line) {
57     string firstSym = line[0];
58     int count = 1;
59     for (int i = 1; i < NUM_REELS; i++) {
60         if (matchSymbol(line[i], firstSym)) count++;
61         else break;
62     }
63     double win = 0.0;
64     if (payouts.count(firstSym) &&
        payouts[firstSym].count(count)) {
65         win = payouts[firstSym][count];
66     }
67     return {win, count};
68 }
69
70 // Calculate scatter win
71 double calculateScatterWin(const vector<vector<string>>&
    window) {
72     int scatterCount = 0;
73     for (auto& reel : window) {
74         for (auto& sym : reel) {
75             if (sym == "SC") scatterCount++;

```

```

76         }
77     }
78     if (scatterCount >= 5) return payouts["SC"][5];
79     return 0.0;
80 }
81
82 // Simulate one
83 tuple<double,int,bool,string> simulate      () {
84     vector<vector<string>> window(NUM_REELS,
85         vector<string>(WINDOW_HEIGHT));
86     for (int r = 0; r < NUM_REELS; r++) {
87         int start = dist(rng);
88         for (int h = 0; h < WINDOW_HEIGHT; h++) {
89             int pos = (start + h) % NUM_POSITIONS;
90             window[r][h] = reels[r][pos];
91         }
92     }
93     // Middle line
94     vector<string> line;
95     for (int r = 0; r < NUM_REELS; r++)
96         line.push_back(window[r][1]);
97
98     auto [lineWin, count] = calculateLineWin(line);
99     double scatterWin = calculateScatterWin(window);
100     double totalWin = lineWin + scatterWin;
101
102     return {totalWin, count, scatterWin > 0, line[0]};
103 }
104
105 // Print reel symbol counts
106 void printReelStats() {
107     cout << "=== Reel Symbol Counts ===\n";
108     for (int r = 0; r < NUM_REELS; r++) {
109         unordered_map<string,int> counts;
110         for (auto& sym : reels[r]) counts[sym]++;
111     }
112 }

```

```

109         cout << "Reel " << r+1 << " (positions: " <<
            reels[r].size() << "): ";
110         for (auto& kv : counts) {
111             cout << kv.first << "=" << kv.second << " ";
112         }
113         cout << "\n";
114     }
115     cout << "\n";
116 }
117
118 int main() {
119     printReelStats();
120
121     double totalWin = 0.0;
122     double bet = 1.0;
123     unordered_map<int, long long> lineCounts; // for 2,3,4,5
124     unordered_map<int, double> payoutSum; //      per
        category
125     long long scatterCount = 0;
126     double scatterPayoutSum = 0.0;
127
128     for (int i = 0; i < SIMULATIONS; i++) {
129         auto [win, count, scatterWin, firstSym] =
            simulate ();
130         totalWin += win;
131
132         if (count >= 3) {
133             lineCounts[count]++;
134             payoutSum[count] += win;
135         } else if (count == 2 && firstSym.rfind("H", 0) ==
            0) {
136             lineCounts[2]++;
137             payoutSum[2] += win;
138         }
139         if (scatterWin) {

```

```

140         scatterCount++;
141         scatterPayoutSum += payouts["SC"][5];
142     }
143 }
144
145 double          = (totalWin / SIMULATIONS) / bet * 100;
146
147 cout << fixed << setprecision(4);
148 cout << "Simulirano " << SIMULATIONS << "
        s      .\n";
149 cout << "Ukupni dobitak: " << totalWin << "\n";
150 cout << "          : " <<          << "%\n\n";
151
152 cout << "=== Statistika ===\n";
153 for (int i = 2; i <= 5; i++) {
154     double prob = (double)lineCounts[i] / SIMULATIONS;
155     cout << i << " u redu: " << lineCounts[i] << "
        outa (" << prob*100 << "%), ";
156     if (prob > 0) cout << "Ocekivano      ova      : " <<
        1.0/prob << ",          udeo: " <<
        (payoutSum[i]/SIMULATIONS)*100 << "%\n";
157     else cout << "Ocekivano      ova      : N/A\n";
158 }
159
160 double scatterProb = (double)scatterCount /
        SIMULATIONS;
161 cout << "\nScatter (=5 SC): " << scatterCount << "
        puta (" << scatterProb*100 << "%), ";
162 if (scatterProb > 0) cout << "Ocekivano      ova      : "
        << 1.0/scatterProb << ",          udeo: " <<
        (scatterPayoutSum/SIMULATIONS)*100 << "%\n";
163 else cout << "Ocekivano      ova      : N/A\n";
164
165 return 0;
166 }

```

```

1 #include <iostream>
2 #include <vector>
3 #include <random>
4 #include <numeric>
5
6 int main() {
7     std::vector<int> symbol_values = {
8         40, 250, 10, 2, 3, 4,
9         20, 75, 35
10    };
11
12    std::vector<std::vector<int>> weights_by_stage = {
13        {1784, 296, 48428, 1, 1, 1, 125096, 65514, 186101},
14        {27, 780, 126, 135, 208, 35, 50, 97, 30},
15        {1800, 554, 1320, 22804, 20800, 228, 2114, 1000,
16         2190},
17        {17, 55, 132, 2641, 533, 2641, 118, 948, 1750}
18    };
19
20    std::random_device rd;
21    std::mt19937 gen(rd());
22
23    auto run_simulation = [&](std::mt19937& gen) {
24        int credits = 10;
25        int pick_count = 0;
26        while (true) {
27            int stage = std::min(pick_count, 3);
28            std::discrete_distribution<>
29                dist(weights_by_stage[stage].begin(),
30                    weights_by_stage[stage].end());
31            int symbol_index = dist(gen);
32            int value = symbol_values[symbol_index];
33            if (value >= 2 && value <= 5) {
34                credits -= value;
35                break;
36            }
37        }
38    };
39
40    run_simulation(gen);
41
42    return 0;
43 }
```

```
33         }
34         else {
35             credits += value;
36             pick_count++;
37         }
38     }
39     return credits;
40 };
41
42 uint64_t total = 0;
43 for (uint64_t i = 0; i < 1000; ++i) {
44     total += run_simulation(gen);
45 }
46
47 std::cout << "Average final credit value over 100000
48     simulations: " << (total / 1000.0) << std::endl;
49
50
51 return 0;
52 }
```

Библиографија

- [1] Fermat, P. and Pascal, B. (1654). Correspondence on the Problem of Points (преписка). Превод писама доступан на: <https://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/pascal.pdf>.
- [2] Madden, R. J. (2026). Probability in the Pleistocene: Origins and Antiquity of Native American Dice, Games of Chance, and Gambling. *American Antiquity*. Cambridge University Press. DOI: 10.1017/aaq.2025.10158.
- [3] Ore, O. (1953). *Cardano: The Gambling Scholar*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [4] Huygens, C. (1714). *Libellus de Ratiociniis in Ludo Aleae*. London.
- [5] Ethier, S. N. (2010). *The Doctrine of Chances: Probabilistic Aspects of Gambling*. Wiley, Hoboken, NJ.
- [6] Младеновић, П. (2010). *Вероватноћа и статистику*. Математички факултет Универзитета у Београду, Београд.
- [7] Norris, J. R. (1997). *Markov Chains*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [8] Kamanas, P.-A., Sifaleras, A., and Samaras, N. (2021). Slot Machine RTP Optimization Using Variable Neighborhood Search. *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2021, Article ID 8784065, 8 pages. DOI: 10.1155/2021/8784065.

Биографија аутора

Ана Антић је рођена у Београду 14. 12. 1996, где је завршила основну школу и након тога Математичку гимназију. Завршила је основне студије на Математичком факултету у Београду, смер статистика, финансијска и актуарска математика. Радила је као математичар у Мајкрософт дивелопмент центру Србија годину дана, потом две године као професор математике и информатике у школи, затим две године као квантитативни аналитичар и од јуна 2024. је запослена као математичар у компанији ИГТ.