

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Павле Касом

УВОД У ГKM ТЕОРИЈУ

мастер рад

Београд, 2026.

Ментор:

др Владимир ГРУЛИЋ, редован професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Александра МАРИНКОВИЋ, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Божидар ЈОВАНОВИЋ, научни саветник
Српска академија наука и уметности

...сѣрицу Јовану

Садржај

Предговор	1
1 Еквиваријантна кохомологија	3
1.1 Дејства група	3
Еквиваријанта категорија	5
1.2 Раслојења	6
1.3 Главна раслојења	8
Класификујући простори	10
1.4 Дефиниција еквиваријантне кохомологије	11
1.5 Својства еквиваријантне кохомологије	14
2 ГKM теорија	17
2.1 Момент граф	17
Примери момент графова	20
2.2 Придружени торусни простор полиедра	22
Дигресија: Симплектичка топологија и момент пресликавање	24
2.3 Кохомолошки прстен линеарних графова	25
2.4 Однос између еквиваријантне кохомологије и кохомологије линеарних графова	28
3 Одређивање еквиваријантне кохомологије	31
3.1 Комплексна пројективна раван	32
Реконструкција обичне кохомологије $H^*(\mathbb{CP}^2)$	33
3.2 Многострукост комплетних застава $Fl(1, 2, 3; \mathbb{C}^3)$	33
3.3 Грасманијан $Gr(2, 4)$	39
Библиографија	43

Предговор

Многострукости с дејством турса се јављају као централни објекти у пресеку комбинаторике, еквиваријантне топологије, алгебарске и симплектичке геометрије. Године 1998. Горески, Котвиц и Макферсон су успоставили теоријски оквир који обједињује две до тада независно развијене струје изучавања G -простора. Једна се бавила обрадом комбинаторних својстава орбита датог дејства, док се друга бавила изучавањем тополошких својстава G -простора користећи непокретне тачке и динамику самог дејства групе G . Ова теорија данас носи име по иницијалима претходно поменутих истраживача (ГКМ) и нуди нам елегантне комбинаторне описе еквиваријантног кохомолошког прстена у случају многострукости с дејством турса!

Циљ овог рада је да се представе основне идеје, технике и главни резултати ГКМ теорије, али и да подстакне читаоца на даље истраживање и упознавање с младом и актуелном облашћу *турсне топологије*.

У првом поглављу ћемо навести неке од основних појмова који су нам неопходни да бисмо дефинисали еквиваријантну кохомологију G -простора: дефиниције дејства група и раслојења, с посебним освртом на теорију главних G -раслојења која је пропраћена и са доста примера. Поред тога ћемо да изведемо и нека од најважнијих својстава функтора еквиваријантне кохомологије $H_G^*(-)$ која ће нам бити од користи касније у раду.

У другом поглављу ћемо увести појмове и конструкције које су суштинске у ГКМ теорији, с посебним фокусом на појам момент графа $\mathcal{G}(T \curvearrowright M)$ који је придодељен простору M с дејством турса $T \curvearrowright M$, на примере истог и на главну теорему ГКМ теорије, која нам даје елегантан опис еквиваријантне кохомологије $H_T^*(M)$ преко кохомолошког прстена $\mathcal{H}^*(\mathcal{G}(T \curvearrowright M))$ момент графа.

У последњем поглављу уводимо комплексне Грасманијане $Gr(k, n)$, многострукости застава $Fl(d_1, d_2, \dots, d_k; \mathbb{C}^n)$ и све што нам је корисно за оперативни рад с овим просторима. Затим ћемо, користећи теорију коју смо изложили у претходне две главе рада, дати опис еквиваријантне кохомологије у случају пар једноставних примера претходно поменутих простора.

Захваљујем се свом ментору, професору др. Владимиру Грујићу, на свом уложеном труд, на свим драгоценим саветима и сугестијама које ми је упутио и на томејџ што ми је отворио врата ка једној прелепој и актуелној области топологије. Такође бих се захвалио осталим члановима комисије на исто тако драгоценим саветима и сугестијама након читања рада.

На самом крају, дубоко се захваљујем свим својим пријатељима и породици који су ме од самог старта бодрили и пружали ми безусловну и топлу подршку. ***Хвала вам!***

Глава 1

Еквиваријантна кохомологија

Тако је тешко пронаћи почетак. Или боље: тешко је почети од почетка, и не покушавати ићи даље у прошлост.

Лудвиг Витгенштајн, *О извесности*.

1.1 Дејства група

Дефиниција 1.1.1. Нека је X тополошки простор и G тополошка група. Кажемо да група G *непрекидно дејствује слева* на простор X (у ознаци $G \curvearrowright X$), односно да је X један G -простор, ако нам је дат хомоморфизам група $G \xrightarrow{\varphi} \text{Homeo}(X)$ такав да је пресликавање

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \longmapsto \varphi(g)(x)$$

непрекидно. У случају када је јасно које дејство је у питању, користићемо и ознаку $\varphi(g)(x) = g \cdot x$, односно $\varphi(g) = g$.

Коментар. Аналогно можемо дефинисати и непрекидно дејство групе G *здесна* (у ознаци $X \curvearrowleft G$) као лево дејство $G^{\text{op}} \curvearrowright X$, где је група $(G^{\text{op}}, \cdot^{\text{op}})$ скуповно исто што и група G , али с измењеном операцијом групе $g \cdot^{\text{op}} h := hg$.

Дефиниција 1.1.2. Нека је X један G -простор и $x \in X$.

- *Орбита* тачке x је $\mathcal{O}_x := \{g \cdot x \mid g \in G\} \subseteq X$.
- *Стабилизатор*, или *група изопроије*, тачке x је подгрупа

$$\text{Stab}_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \leq G.$$

Може лако да се покаже да је релација $x \sim y \Leftrightarrow x \in \mathcal{O}_y$ једна релација еквиваленције, па можемо и да дефинишемо *простор орбита* као $X/G = X/\sim$. У случају када постоји

тачка $x \in X$ за коју важи $X = \mathcal{O}_x$, онда кажемо да G дејствује *транзитивно* на простор X , односно да је X један G -*хомогени* простор.

Дефиниција 1.1.3. Кажемо да је дејство $G \xrightarrow{\varphi} \text{Homeo}(X)$ *слободно* ако важи да, за свако $g \in G \setminus \{e\}$, хомеоморфизам $\varphi(g)$ нема фиксних тачака. Еквивалентно, имамо да је $\text{Stab}_x = 1$ тривијална група, за свако $x \in X$.

Дефиниција 1.1.4. Кажемо да је дејство $G \xrightarrow{\varphi} \text{Homeo}(X)$ *ефективно*, или *верно*, ако имамо да је φ инјективно пресликавање, односно да важи импликација

$$(\forall x \in X) g \cdot x = x \implies g = \text{id}_X.$$

Коментар. Све наведене дефиниције могу да се формулишу и у глаткој категорији, где би простор X био глатка многострукост, група G би била Лијева група и где би пресликавање $G \times X \rightarrow X$ из дефиниције дејства било глатко. Заправо, најзначајнији примери дејства ће нам управо бити дејства Лијевих група на глатким многострукостима.

Пример 1.1.1. Ми знамо да постоји природно лево дејство $\text{GL}(n, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ задано матричним множењем¹. Ако узмемо у обзир и стандардни скаларни производ на $\mathbb{R}^n$, ми добијамо дејства група $\text{O}(n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$, односно $\text{SO}(n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$, где прво дејство чува норму вектора, а друго додатно чува и оријентацију². Код ова два дејства се лако може проверити да је орбита тачке $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ заправо $\mathcal{O}_x = \mathbb{S}^{n-1}(\|x\|)$ сфера димензије $n - 1$ с центром у координатном почетку 0 и полупречником $\|x\|$. Посебно, добијамо да је јединична сфера $\mathbb{S}^{n-1}$ орбита јединичног вектора $e_n = (0, 0, \dots, 1)$. У случају дејства $\text{SO}(n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$, стабилизатор $\text{Stab}_{e_n} \cong \text{SO}(n - 1)$, где је изоморфизам дат са

$$\text{SO}(n - 1) \ni A \mapsto \left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right) \in \text{Stab}_{e_n},$$

док је у случају дејства $\text{O}(n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$, $\text{Stab}_{e_n} \cong \text{O}(n - 1)$, где је изоморфизам дат истим правилом доделе.

Пример 1.1.2. Аналогно претходном примеру, можемо посматрати дејство $\text{GL}(n, \mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^n$, односно, ако узмемо у обзир стандардну Ермитску форму на $\mathbb{C}^n$, дејства $\text{U}(n, \mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^n$ и $\text{SU}(n, \mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^n$. И код дејства групе $\text{U}(n)$ (односно групе $\text{SU}(n)$) имамо да је $\mathcal{O}_{e_n} = \mathbb{S}^{2n-1} \subseteq \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, док је $\text{Stab}_{e_n} \cong \text{U}(n - 1)$ (односно $\text{Stab}_{e_n} \cong \text{SU}(n - 1)$).

¹Групу $\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ можемо да видимо као тополошку, јер је отворена као подскуп у $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Може и једноставно да се провери да су операције матричног множења и узимања инверза непрекидне. Штавише, $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ је једна отворена подмногострукост, а претходно поменуте операције су и глатке, па је $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ једна Лијева група.

²Како матрице $A \in \text{O}(n)$ задовољавају релацију $A^T A = I$, видимо да, када распишемо претходну релацију, координате ортогоналних матрица задовољавају систем *полиномијалних* једначина, па ће група $\text{O}(n) \leq \text{GL}(n, \mathbb{R})$ бити једна тополошка група, као затворена подгрупа тополошке групе. Аналогно се може показати да је и $\text{SO}(n)$ једна тополошка група.

У овим примерима смо видели да неке просторе можемо елегантно да опишемо преко дејства групе које делује на исти. Наредна теорема нам говори прецизније о поменутом опису.

Теорема 1.1.1 (О орбити и стабилизатору [17]). Нека је G Лијева група и многострукост X један G -простор. Тада је, за сваку тачку $x \in X$, стабилизатор Stab_x једна затворен Лијева подгрупа групе G и пресликавање

$$G/\text{Stab}_x \longrightarrow X, \quad g \cdot \text{Stab}_x \longmapsto g \cdot x$$

је инјективна имерзија чија је слика баш орбита $\mathcal{O}_x$. Посебно у случају када G дејствује транзитивно, имамо да је простор X дифеоморфан са G/Stab_x .

Пример 1.1.3. Ако рестрикујемо дејство групе G на своју орбиту $\mathcal{O}_x$, јасно добијамо да је дејство $G \curvearrowright \mathcal{O}_x$ транзитивно. Посебно, из примера 1.1.1 добијамо да $\text{O}(n)$ (односно $\text{SO}(n)$) транзитивно дејствује на $\mathbb{S}^{n-1}$. То по теорему 1.1.1 значи да је

$$\mathbb{S}^{n-1} \approx \text{O}(n)/\text{O}(n-1) (\approx \text{SO}(n)/\text{SO}(n-1)).$$

Аналогно, из примера 1.1.2 видимо да је $\mathbb{S}^{2n-1} \approx \text{U}(n)/\text{U}(n-1) (\approx \text{SU}(n)/\text{SU}(n-1))$.

Коментар. Ова теорема може да нам буде доста корисна у случају када имамо да је многострукост X један G -хомогени простор, где је G Лијева група. Из опште теорије Лијевих група је познато да, за сваку затворену Лијеву подгрупу $H \leq G$, количник G/H има канонску глатку структуру такву да природна пројекција $G \xrightarrow{\pi} G/H$ има поједина корисна својства која ћемо поменути убрзо (видети теорему 2.11 у [17]). Самим тим, по претходној теорему, можемо глатку структуру многострукости X да поистоветимо с јединственом глатком структуром која се лепо слаже с дејством групе G . Тако ћемо дати доста једноставне описе разних глатких хомогених простора који ће се јављати даље у тексту.

Еквиваријанта категорија

Дефиниција 1.1.5. Нека су нам дата дејства $G \curvearrowright X$, $H \curvearrowright Y$, пресликавање $X \xrightarrow{f} Y$ и хомоморфизам група $G \xrightarrow{\varphi} H$. Тада кажемо да је пар (f, φ) *морфизам дејства*

$$G \curvearrowright X \xrightarrow{(f, \varphi)} H \curvearrowright Y$$

ако важи $f(g \cdot x) = \varphi(g) \cdot f(x)$, за $g \in G$ и $x \in X$, односно, ако комутира наредни дијаграм.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow \varphi(g) \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

У случају када је $H = G$ и $\varphi = \text{id}_G$, онда кажемо да је $X \xrightarrow{f} Y$ G -еквиваријантно пресликавање. Другим речима, за $x \in X$ и $g \in G$ важи $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$. Надаље ћемо често говорити да је пресликавање само *еквиваријантно*, уместо G -еквиваријантно, када год је јасно из контекста која је група у питању.

Пример 1.1.4. За свако дејство $G \curvearrowright X$ имамо морфизам дејства $G \curvearrowright X \xrightarrow{(\pi, \varepsilon)} \mathbb{1} \curvearrowright X/G$, где је $X \xrightarrow{\pi} X/G$ природна пројекција на простор орбита, а $G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{1}$ јединствен хомоморфизам у тривијалну групу.

Можемо да приметимо да, са овако дефинисаним морфизмима, колекција свих (левих) дејстава $G \curvearrowright X$ чине једну категорију. Ако додатно фиксирамо групу G , добијамо поткатегорију G -простора коју означавамо с $\mathcal{C}_G$. Ово опажање ће нам бити корисно када касније будемо увели концепт *еквиваријантне* кохомологије.

1.2 Раслојења

Дефиниција 1.2.1. Нека су E, B и F тополошки простори. За непрекидно пресликавање $E \xrightarrow{p} B$ кажемо да је *раслојење са слојем F* ако важи да, за свако $b \in B$, постоји отворена околина $U \in \mathcal{T}_B$ тачке b и хомеоморфизам $p^{-1}(U) \xrightarrow{h} U \times F$ такав да наредни дијаграм комутира

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ & \searrow p \quad \swarrow \text{proj}_1 & \\ & U & \end{array} \quad (1.1)$$

Простор E називамо *локалним простором* раслојења, док простор B називамо *базом* раслојења.

За раслојење $E \xrightarrow{p} B$ ћемо користити и ознаку

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow p \\ & & B \end{array}$$

и за пар (U, h) кажемо да је *локална тривијализација* раслојења. За скуп $(U_i, h_i)_{i \in I}$ свих локалних тривијализација кажемо да је *атлас раслојења*, док за елементе (U_i, h_i) кажемо да су и *карте* раслојења.

Из дефиниције видимо да, за било који подскуп $C \subseteq U$, комутира наредни дијаграм.

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(C) & \xrightarrow{h|_C} & C \times F \\ & \searrow p \quad \swarrow \text{proj}_1 & \\ & C & \end{array}$$

Посебно, за $C = \{b\}$, имамо идентификацију $p^{-1}(\{b\}) \approx F$. У случају када је F дискретан простор, за раслојење $E \xrightarrow{p} B$ кажемо да је *нашкривање*.

Дефиниција 1.2.2. Раслојења $E \xrightarrow{p} B$ и $T \xrightarrow{q} B$ су *еквивалентна* (или *изоморфна*) ако постоји хомеоморфизам $E \xrightarrow{\varphi} T$ такав да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & T \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & B & \end{array}$$

Често, за еквивалентна раслојења пишемо и $E \cong T$.

Пре него што дамо неке једноставне примере раслојења, навешћемо још дефиницију повлачења раслојења која ће нам бити корисна касније.

Дефиниција 1.2.3. Нека је $E \xrightarrow{p} B$ раслојење са слојем F и нека је $M \xrightarrow{h} B$ непрекидно пресликавање. *Повлачење раслојења* h^*E је раслојење чији је тотални простор

$$h^*E = \left\{ (m, e) \in M \times E \mid h(m) = p(e) \right\},$$

базни простор M и $h^*E \xrightarrow{\text{proj}_1} M$ одговарајуће пресликавање раслојења.

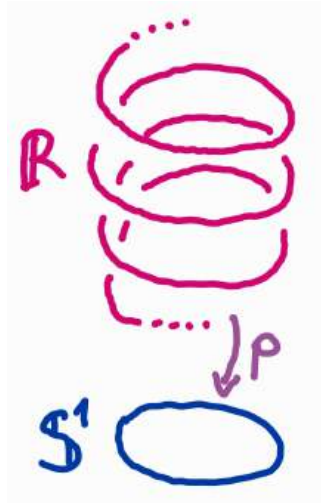
Ако су $h^*E \xrightarrow{\text{proj}_1} M$ и $h^*E \xrightarrow{\text{proj}_2} E$ одговарајуће пројекције на M и E , јасно се види да наредни дијаграм комутира.

$$\begin{array}{ccc} h^*E & \xrightarrow{\text{proj}_2} & E \\ \text{proj}_1 \downarrow & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Одавде можемо закључити да је $h^*E \xrightarrow{\text{proj}_1} M$ раслојење с истим слојем F као и у почетном раслојењу $E \xrightarrow{p} B$. Као и у случају дејства група, све наведене дефиниције можемо аналогно да формулишемо и у глаткој категорији.

Пример 1.2.1. Најједноставнији пример раслојења је *тривијално раслојење* $B \times F \xrightarrow{\text{proj}_1} B$. Свако раслојење које је еквивалентно тривијалном раслојењу исто зовемо тривијалним.

Пример 1.2.2. Један важан пример раслојења је намотавање реалне праве $\mathbb{R}$ на круг $\mathbb{S}^1$. Тотални простор је $E = \mathbb{R}$, база је $B = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, а пресликавање $\mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1$ је дато са $p(t) = \exp(2\pi it)$ (слика 1.1). У овом случају, слој је $F = \mathbb{Z}$ са дискретном топологијом.



Слика 1.1: Наткривање кнужнице

Пример 1.2.3. Нека је глатка многострукост X и G Лијева група која транзитивно дејствује на X . Познато је да количник G/H (где је $H \leq G$ затворена Лијева подгрупа) има канонску глатку структуру такву да је природна пројекција $G \xrightarrow{\pi} G/H$ једно раслојење³ са слојем H (опет видети теорему 2.11 у [17]). У комбинацији с теоремом 1.1.1, за $x \in X$, добијамо раслојење

$$\begin{array}{ccc} \text{Stab}_x & \longrightarrow & G \\ & & \downarrow \pi \\ & & G/\text{Stab}_x \xrightarrow{\approx} X. \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow p \\ \searrow \end{array}$$

Посебно, из примера 1.1.1 и 1.1.2 добијамо раслојења

$$\begin{array}{ccccccc} \text{O}(n-1) \longrightarrow \text{O}(n) & \text{SO}(n-1) \longrightarrow \text{SO}(n) & \text{U}(n-1) \longrightarrow \text{U}(n) & \text{SU}(n-1) \longrightarrow \text{SU}(n) \\ \downarrow p & \downarrow p & \downarrow p & \downarrow p \\ \mathbb{S}^{n-1}, & \mathbb{S}^{n-1}, & \mathbb{S}^{2n-1}, & \mathbb{S}^{2n-1}. \end{array}$$

1.3 Главна раслојења

Дефиниција 1.3.1. Нека је G тополошка група и $E \xrightarrow{p} B$ раслојење са слојем G . Кажемо да је раслојење $E \xrightarrow{p} B$ *главно G -раслојење* ако важи:

- 1) Да група G слободно дејствује на E здесна;
- 2) Да је, за сваку тривијализацију (U, h) датог раслојења, пресликавање h фигурирано у дијаграму 1.1 G -еквиваријантно, где је (десно) дејство $(U \times G) \curvearrowright G$ дато са $(b, h) \cdot g = (b, hg)$.

³Ово је једно од лепих својстава које смо претходно најавили.

Као и код глатких раслојења, можемо да дефинишемо глатко главно G -раслојење, где је G додатно и Лијева група.

Пример 1.3.1. Нека је G Лијева група и $H \leq G$ затворен Лијева подгрупа. Тада се лако проверава да је десно дејство $G \curvearrowright H$ задано множењем здесна глатко и слободно. Додатно, за све тривијализације (U, h) раслојења $G \xrightarrow{\pi} G/H$ се може проверити да је дифеоморфизам h једно H -еквиваријантно пресликавање, односно да је $G \xrightarrow{\pi} G/H$ пример једног H -главног раслојења. Као последица овог разматрања, добијамо да су сва наведена раслојења у примеру 1.2.3 заправо глатка главна раслојења.

Наведимо још један користан став који нам даје још примера глатких главних раслојења (доказ можете наћи у [23]).

Став 1.3.1. Нека је G компактна Лијева група која глатко и слободно дејствује на многострукости X . Тада је $X \xrightarrow{\pi} X/G$ једно глатко главно G -раслојење.

Пример 1.3.2. Нека је $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ јединични круг, тада постоји глатко и слободно дејство $S^1 \curvearrowright \mathbb{C}^{n+1}$ дато скаларним множењем $\lambda \cdot (z_0, z_1, \dots, z_n) = (\lambda z_0, \lambda z_1, \dots, \lambda z_n)$. Ово дејство не помера сферу $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, па по ставу 1.3.1 добијамо да је пројекција $S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}/S^1 = \mathbb{CP}^n$ једно главно S^1 -раслојење. Одавде можемо да конструишемо и наредно главно S^1 -раслојење.

Наиме, како имамо низ канонских инклузија,

$$\mathbb{C}^1 \subseteq \mathbb{C}^2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{C}^n \subseteq \dots,$$

то имамо и низ инклузија сфера непарних димензија

$$S^1 \subseteq S^3 \subseteq \dots \subseteq S^{2n+1} \subseteq \dots$$

Како се дејство круга S^1 на сфере непарних димензија слаже с дотичним инклузијама, добијамо наредни комутативни дијаграм главних S^1 раслојења

$$\begin{array}{ccccccc} S^1 & \hookrightarrow & S^3 & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & S^{2n+1} \hookrightarrow \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathbb{CP}^0 & \hookrightarrow & \mathbb{CP}^1 & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \mathbb{CP}^n \hookrightarrow \dots \end{array}$$

одакле можемо да закључимо да постоји изведено дејство групе S^1 на $S^\infty = \varinjlim S^{2n+1}$ које је уједно и слободно. Иако је S^∞ бесконачнодимензионалан простор, па самим тим није глатка многострукост у класичном смислу речи, може се показати да је пројекција на простор орбита $S^\infty \rightarrow S^\infty/S^1 = \mathbb{CP}^\infty$ једно тополошко S^1 -раслојење (видети [23]).

Корисно је напоменути да, за пресликавање $M \xrightarrow{h} B$ из одговарајуће категорије, имамо да је повлачење h^*E главног G -раслојења $E \xrightarrow{p} B$ (виђено само као раслојење) такође главно G -раслојење, где је десно дејство групе G дато са $(m, e) \cdot g = (m, e \cdot g)$. Такође

је јасно да можемо и да пренесемо концепт изоморфних раслојења у контекст главних G -раслојења, где би хомеоморфизам φ у дефиницији 1.2.2 додатно био G -еквиваријантан.

Наведимо још наредну теорему која нам говори како се хомотопија пресликавања лепо слаже с повлачењем главног раслојења (доказ можете наћи у [22]).

Теорема 1.3.1 (Својство хомотопије за главна раслојења). Нека је $E \longrightarrow B$ главно G -раслојење, X $\mathcal{CW}$ -комплекс и пресликавања $X \xrightarrow{h_0, h_1} B$ хомотопна. Тада су повлачења h_0^*E и h_1^*E изоморфна главна раслојења над X .

Класификујући простори

Да бисмо заобишли поједине техничке услове, у овом делу рада ћемо се фокусирати на главна раслојења над $\mathcal{CW}$ -комплексима.

Дефиниција 1.3.2. За главно G -раслојење $EG \xrightarrow{p} BG$ кажемо да је универзално G -раслојење ако важе наредни услови:

- 1) Ако за свако главно G -раслојење $P \longrightarrow B$ над $\mathcal{CW}$ -комплексом B , постоји непрекидно пресликавање $B \xrightarrow{h} BG$ такво да су раслојења $P \longrightarrow B$ и $h^*EG \longrightarrow B$ изоморфна;
- 2) Ако су пресликавања $B \xrightarrow{h_0, h_1} BG$ таква да су одговарајућа повлачења h_0^*EG и h_1^*EG изоморфна, онда су h_0 и h_1 хомотопна, тј. $h_0 \simeq h_1$.

За простор BG често кажемо да је и *класификујући простор* групе G , а сам разлог зашто лежи у наредном опажању. Ако са $[X, BG]$ обележимо класе хомотопије пресликавања из $\mathcal{CW}$ -комплекса X у BG и са $\mathcal{P}_G(X)$ обележимо класе изоморфизама главних G -раслојења над X , тада нам теорема 1.3.1 говори да је пресликавање

$$[X, BG] \xrightarrow{\varphi} \mathcal{P}_G(X), \quad h \mapsto h^*EG$$

добро дефинисано. Из дела 1) дефиниције универзалног G -раслојења, видимо да је φ „на”, док из дела 2) дефиниције следи да је φ „1 – 1”. То ће рећи да је $EG \longrightarrow BG$ универзално G -раслојење ако и само ако постоји бијекција

$$[X, BG] \xleftrightarrow{\varphi} \mathcal{P}_G(X)$$

за сваки $\mathcal{CW}$ -комплекс X . Другим речима, функтор $\mathcal{P}_G(-)$ (из категорије $\mathcal{CW}$ -комплекса) је *репрезентован* функтором $[-, BG]$. Због ове чињенице, можемо да *класификујемо* сва главна G -раслојења над простором X преко класа хомотопије $[X, BG]$.

Мада није очигледно да претходно поменуто раслојење $EG \longrightarrow BG$ уопште постоји за сваку тополошку групу G , Милнор је 1956. дао експлицитну конструкцију универзалног G -раслојења (видети [23]). Такође је лепа вежба проверити да је класификујући простор BG јединствен до на хомотопију.

Наредна теорема нам даје једну доста једноставну карактеризацију универзалних G -раслојења (доказ можете наћи у [22]).

Теорема 1.3.2 (Карактеризација универзалног G -раслојења). Нека је $E \longrightarrow B$ главно G -раслојење у тополошкој категорији. Ако је E слабо контрактибилно, онда је $E \longrightarrow B$ универзално G -раслојење. С друге стране, ако је $E \longrightarrow B$ универзално G -раслојење и B је CW -комплекс, онда је простор E слабо контрактибилан⁴.

Пример 1.3.3. Ако се вратимо на пример 1.2.2, лако се види да је дато раслојење једно $\mathbb{Z}$ -главно раслојење. Како је $\mathbb{R}$ контрактибилно, оно је и слабо контрактибилно, па по карактеризацији 1.3.2 добијамо да је $E\mathbb{Z} = \mathbb{R}$ и $B\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1$.

Пример 1.3.4. Овај пут се враћамо на пример 1.3.2. Ту смо видели да је $\mathbb{S}^\infty \longrightarrow \mathbb{CP}^\infty$ једно главно $\mathbb{S}^1$ -раслојење. Поред тога, познато је и да је бесконачнодимензионална сфера $\mathbb{S}^\infty$ контрактибилна, па по карактеризацији 1.3.2 добијамо да је $E\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^\infty$ и $B\mathbb{S}^1 = \mathbb{CP}^\infty$.

Пример 1.3.5. Претходни пример можемо и да уопшtimo, односно да одредимо класификујући простор BT турса $T = (\mathbb{S}^1)^n$. Од користи ће нам бити једноставна чињеница да више хомотопске групе пролазе кроз производ простора, тј. да важи

$$\pi_q(X \times Y) \cong \pi_q(X) \times \pi_q(Y), \quad \text{за } q \in \mathbb{N}_0.$$

Наиме, имамо да је $\prod_{i=1}^n E\mathbb{S}^1 \longrightarrow \prod_{i=1}^n B\mathbb{S}^1$ очигледно једно главно $(\mathbb{S}^1)^n$ -раслојење над CW -комплексом. Како је $\pi_q(\prod_{i=1}^n E\mathbb{S}^1) \cong \prod_{i=1}^n \pi_q(E\mathbb{S}^1)$ тривијална, по карактеризацији 1.3.2 следи да је $BT = \prod_{i=1}^n B\mathbb{S}^1 = \prod_{i=1}^n \mathbb{CP}^\infty$.

1.4 Дефиниција еквиваријантне кохомологије

У овом делу текста, навешћемо конструкцију која ће на функторијалан начин доделити било ком главном G -раслојењу и левом G -простору M једно раслојење са слојем M . У литератури се ова конструкција често назива *Бореловом конструкцијом* или *Каршановом конструкцијом мешања*⁵.

Ако су нам дати десни G -простор P и леви G -простор M , можемо да приметимо да производ $P \times M$ можемо да опремимо десним дијагоналним дејством $P \times M \curvearrowright G$, које је дато са

$$(p, m) \cdot g = (pg, g^{-1}m).$$

⁴За непрекидно пресликавање $X \xrightarrow{f} Y$ кажемо да је *слаба хомотопска еквиваленција* ако је, за свако $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}_0$, изведено пресликавање $\pi_n(X, x) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y, f(x))$ изоморфизам. Посебно, када је $Y = pt$, кажемо да је X *слабо контрактибилан*.

⁵Cartan mixing construction.

Дефиниција 1.4.1. Нека је P десни G -простор, M леви G -простор и дејство $P \times M \curvearrowright G$ претходно поменуто десно дијагонално дејство производа. Тада кажемо да је простор обита $P \times_G M := (P \times M)/G$ *Картанов њросџор мешања* додељен просторима P и M . Класе еквиваленције тачке (p, m) обележавамо са $[p, m]$.

Ако је $P \xrightarrow{f} P'$ G -еквиваријантно пресликавање између десних G -простора P и P' , онда овом пресликавању можемо да доделимо изведено пресликавање

$$\mathcal{F}_M(f) := f_M : P \times_G M \longrightarrow P' \times_G M, \quad [p, m] \xrightarrow{f_M} [f(p), m].$$

Лако се проверава да је f_M добро дефинисано и непрекидно пресликавање. Такође се једноставно види да је

$$\mathcal{F}_M(\text{id}_P) = \text{id}_{P \times_G M}, \quad \mathcal{F}_M(f \circ g) = \mathcal{F}_M(f) \circ \mathcal{F}_M(g),$$

односно да је Картанова конструкција мешања $\mathcal{F}_M(P) = P \times_G M$ *коваријантни* функтор из категорије десних G -простора у категорију тополошких простора. Штавише, можемо и прецизније да одредимо категорију у коју функтор $\mathcal{F}_M$ шаље објекте из категорије главних G -раслојења.

Ако је $P \xrightarrow{\pi} B$ главно G -раслојење, тада можемо да дефинишемо пресликавање

$$P \times_G M \xrightarrow{\tau_1} B, \quad [p, m] \xrightarrow{\tau_1} \pi(p).$$

Ово пресликавање ће нам бити раслојење чије смо постојање најавили.

Став 1.4.1. Нека је $P \xrightarrow{\pi} B$ главно G -раслојење и M леви G -простор, тада је $P \times_G M \xrightarrow{\tau_1} B$ раслојење са слојем M .

Доказ. Како је $P \xrightarrow{\pi} B$ раслојење, имамо локалну тривијализацију $\pi^{-1}(U) \stackrel{h}{\approx} U \times G$, за отворену околинУ $U \ni b$ произвољне тачке $b \in B$. Довољно је показати да постоји тривијализација $\tau_1^{-1}(U) \approx U \times M$ која комутира с одговарајућим пресликавањима као у дијаграму 1.1. То можемо закључити из наредног низа једнакости и хомеоморфизама:

$$\begin{aligned} \tau_1^{-1}(U) &= \left\{ [p, m] \in P \times_G M \mid \tau_1([p, m]) = \pi(p) \in U \right\} \\ &= \left\{ [p, m] \in P \times_G M \mid p \in \pi^{-1}(U) \right\} \\ &= \pi^{-1}(U) \times_G M \\ &\stackrel{h_M}{\approx} (U \times G) \times_G M \quad (\text{следи из функторијалности } \mathcal{F}_M(-)) \\ &\stackrel{\varphi}{\approx} U \times M, \end{aligned}$$

где је φ пресликавање дато са $[(u, g), m] \xrightarrow{\varphi} (u, gm)$. Једноставно се може проверити да је инверз φ^{-1} дат са $(u, m) \xrightarrow{\varphi^{-1}} [(u, e_G), m]$ и да наредни дијаграм⁶

$$\begin{array}{ccccc} \tau_1^{-1}(U) & \xrightarrow{h_M} & (U \times G) \times_G M & \xrightarrow{\varphi} & U \times M \\ & \searrow \tau_1 & \downarrow \tilde{\tau}_1 & \swarrow \text{proj}_1 & \\ & & U & & \end{array}$$

комутира, што значи да је $\varphi \circ h_M$ тражена тривијализација. $\square$

Често се овај став формулише преко *Картиановог дијаграма мешања*⁷. Наиме, ако је $P \xrightarrow{\pi} B$ главно G -раслојење и ако је M леви G -простор, онда наредни дијаграм

$$\begin{array}{ccccc} P & \xleftarrow{\text{proj}_1} & P \times M & \xrightarrow{\text{proj}_2} & \boxed{M} \\ \pi \downarrow & & \rho \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \boxed{B} & \xleftarrow{\tau_1} & \boxed{P \times_G M} & \xrightarrow{\tau_2} & M/G \end{array}$$

комутира (где је пресликавања $P \times_G M \xrightarrow{\tau_2} M/G$ дато са $[p, m] \mapsto Gm$). Претходни став нам говори да је, под наведеним претпоставкама, доње лево пресликавање $P \times_G M \xrightarrow{\tau_1} B$ раслојење са слојем M (који се налази у горњем десном углу дијаграма).

Занимљиво је и напоменути да, из симетрије дијаграма, следи да је доње десно пресликавање $P \times_G M \xrightarrow{\tau_2} M/G$ једно раслојење са слојем P (под условом да је канонска пројекција $M \xrightarrow{\sigma} M/G$ главно G -раслојење). Прецизније, знамо да важи:

Став 1.4.2 (4.6 и 4.7, [23]). Ако је $m \in M$, онда је слој над Gm , при пресликавању $P \times_G M \xrightarrow{\tau_2} M/G$, заправо $\tau_2^{-1}(\{Gm\}) = P/\text{Stab}_m$. Штавише, ако G дејствује слободно на M , онда је слој пресликавања τ_2 баш P .

Дефиниција 1.4.2 (Дефиниција еквиваријантне кохомологије). Нека је M леви G -простор и EG тотални простор универзалног G -раслојења $EG \rightarrow BG$. Тада дефинишемо *еквиваријантну кохомологију простора M при дејству групе G* као сингуларну кохомологију

$$H_G^*(M; R) := H^*(EG \times_G M; R),$$

где је R дати прстен. У овом раду ћемо се највише фокусирати на случај када је $R = \mathbb{Z}$ и на случај када је $R = \mathbb{R}$.

Коментар. Некад се у литератури и наводи општија дефиниција еквиваријантне кохомологије где је, уместо простора EG , фигурисан *било који* слабо контрактибилан простор E где G дејствује слободно. Испоставља се да таква дефиниција еквиваријантне кохомологије *не зависи* од одабира таквог простора, али за наше сврхе је ова једноставнија дефиниција довољна за оперативни рад.

⁶Пресликавање $\tilde{\tau}_1$ је дато са $\tilde{\tau}_1([p, m]) = p$.

⁷Cartan's mixing diagram.

1.5 Својства еквиваријантне кохомологије

При изучавању својстава $H_G^*(-; \mathbb{Z})$, корисно је издвојити конструкцију $M_G := EG \times_G M$ и видети како се понаша. Простор M_G се често и назива *хомотопским количником* простора M .

Функторијалност

Како је $M_G = EG \times_G M$ један Картанов простор мешања, када год имамо еквиваријантно пресликавање $M \xrightarrow{f} N$ између два G -простора, има смисла посматрати и пресликање

$$M_G \xrightarrow{f_G} N_G, \quad [e, m] \mapsto [e, f(m)].$$

Рутинском провером видимо да је $(\text{id}_M)_G = \text{id}_{M_G}$, и $(f \circ h)_G = f_G \circ h_G$, где су $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{h} K$ одговарајућа еквиваријантна пресликавања између G -простора, тј. видимо да је хомотопски количник $(-)_G$ један *коваријантан* функтор из категорије (левих) G -простора у категорију тополошких простора.⁸ Као директну последицу, видимо да је $H_G^*(-; \mathbb{Z})$ *контраваријантни* функтор из категорије (левих) G -простора у категорију прстена.

Битно напоменути је да, поред тога што $H_G^*(M; \mathbb{Z})$ има структуру прстена, еквиваријантна кохомологија има и структуру алгебре. Наиме, ако уочимо константно пресликавање $M \xrightarrow{p} \text{pt}$, јасно је да је оно уједно и G -еквиваријантно и због тога можемо да посматрамо пресликавање $M_G \xrightarrow{p_G} \text{pt}_G = EG \times_G \text{pt} = BG$. Самим тим, из функторијалности обичне кохомологије, видимо да постоји хомоморфизам прстена

$$\begin{array}{ccc} H^*(\text{pt}_G; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{p_G^*} & H^*(M_G; \mathbb{Z}) \\ \parallel & & \parallel \\ H^*(BG; \mathbb{Z}) & & H_G^*(M; \mathbb{Z}). \end{array}$$

Због овога, прстен $H_G^*(M; \mathbb{Z})$ можемо да доживимо и као једну $H^*(BG; \mathbb{Z})$ алгебру, где је множење скаларом дато са

$$u \cdot x := p_G^*(u)x, \quad \text{где је } u \in H^*(BG; \mathbb{Z}) \text{ и } x \in H_G^*(M; \mathbb{Z}).$$

Такође се из комутативности наредних дијаграма једноставно види да је изведено пресликавање $H_G^*(N; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_G^*} H_G^*(M; \mathbb{Z})$ еквиваријантног пресликавања $M \xrightarrow{f} N$ уједно и морфизам $H^*(BG; \mathbb{Z})$ алгебри.

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & N & & H_G^*(M; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{f_G^*} & H_G^*(N; \mathbb{Z}) \\ & \searrow p & \swarrow q & \nearrow H_G^*(-; \mathbb{Z}) & & \nwarrow p_G^* & \nearrow q_G^* \\ & & \text{pt} & & & & H^*(BG; \mathbb{Z}). \end{array}$$

⁸То ће рећи да је $(-) \times_G (-)$ бифунктор који је коваријантан по обема променљивама.

Еквиваријантна кохомологија простора са слободним дејством

У случају када имамо простор M с слободним дејством групе G , еквиваријантна кохомологија $H_G^*(M; \mathbb{Z})$ се значајно једноставније одређује.

Лема 1.5.1. Нека је E слабо контрактибилан G -простор и $P \rightarrow P/G$ главно G -раслојење. Тада су $(E \times P)/G$ и P/G слабо хомотопски еквивалентни⁹.

Доказ. Посматрајмо наредни Картанов дијаграм мешања.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{E} & \longleftarrow & E \times P & \longrightarrow & P \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ E/G & \longleftarrow & \boxed{(E \times P)/G} & \longrightarrow & \boxed{P/G} \end{array}$$

Како је $P \rightarrow P/G$ главно G -раслојење, тада је по ставу 1.4.2, $(E \times P)/G \rightarrow P/G$ раслојење са слојем E . По теореме о дугом тачном низу хомотопских група за раслојења, знамо да је низ

$$\dots \rightarrow \pi_q(E) \rightarrow \pi_q((E \times P)/G) \rightarrow \pi_q(P/G) \rightarrow \pi_{q-1}(E) \rightarrow \dots$$

тачан¹⁰. Одавде видимо да из слабе контрактибилности простора E добијамо изоморфизам

$$\pi_q((E \times P)/G) \xrightarrow{\cong} \pi_q(P/G), \quad \text{за све } q \in \mathbb{N}_0,$$

што је требало доказати. □

Као директна последица претходне леме, важи:

Последица 1.5.1. Нека је $G \curvearrowright M$ слободно лево дејство такво да је $M \rightarrow M/G$ главно G -раслојење. Тада су $EG \times_G M$ и M/G слабо хомотопски еквивалентни.

За крај, наводимо (без доказа) наредни технички став из алгебарске топологије.

Став 1.5.1 (4.21, [14]). Нека је R произвољан прстен. Слаба хомотопска еквиваленција $X \xrightarrow{f} Y$ индукује изоморфизам $H^n(Y; R) \xrightarrow{\cong} H^n(X; R)$ у кохомологији, за свако $n \in \mathbb{N}_0$.

Када укомбинујемо претходна два става, добијамо да је

$$H_G^*(M; \mathbb{Z}) \cong H^*(M/G; \mathbb{Z}).$$

⁹За простор орбита $(E \times P)/G$ се подразумева да је простор орбита десног дијагоналног дејства $E \times P \curvearrowright G$.

¹⁰Овде имплицитно претпостављамо да су сви поменути простори путно повезани, али како нас надале само такви простори и занимају, ову претпоставку прихватамо здраво за готово.

Однос између $H_G^*(M; \mathbb{Z})$ и $H_G^*(\text{pt}; \mathbb{Z})$

Видели смо да $H_G^*(M; \mathbb{Z})$ има структуру једне $H^*(BG; \mathbb{Z})$ алгебре, али за разлику од обичне кохомологије, постоје примери где се прстен $H_G^*(\text{pt}; \mathbb{Z}) = H^*(BG; \mathbb{Z})$ не уклапа у алгебру $H_G^*(M; \mathbb{Z})$.

Пример 1.5.1. Нека је дејство $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^1$ дато левим множењем. Како је ово дејство очигледно слободно, по ставу 1.5.1 имамо да је простор $(\mathbb{S}^1)_{\mathbb{S}^1} = \mathbb{S}^\infty \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{S}^1$ слабо хомотопски еквивалентан тачки $\mathbb{S}^1/\mathbb{S}^1 = \text{pt}$ и да је

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = H^*(\mathbb{S}^1/\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = H^*(\text{pt}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

С друге стране, познато је (видети [14]) да је одговарајући прстен скалара

$$H^*(B\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = H^*(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[t], \quad \deg(t) = 2,$$

па видимо да се прстен $H^*(B\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})$ не утапа у прстен $H_{\mathbb{S}^1}^*(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})$.

Кључан детаљ претходног примера је тај да посматрано дејство *није имало фиксних тачака*. У случају када постоје фиксне тачке, наредни став нам говори да заиста постоји улагање $H^*(BG; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_G^*(M; \mathbb{Z})$, што ћемо видети касније да је од великог значаја у процесу одређивању еквиваријантне кохомологије.

Став 1.5.2. Нека дејство $G \curvearrowright M$ има фиксну тачку m . Тада важи:

- 1) Да је изведено пресликавање $BG \xrightarrow{i_G} M_G$ инклузије $\{m\} \xrightarrow{i} M$ заправо сечење раслојења $M_G \xrightarrow{p_G} BG$;
- 2) Да пресликавање $M \xrightarrow{p} \{m\}$ индукује мономорфизам $H^*(BG; \mathbb{Z}) \xrightarrow{p_G^*} H_G^*(M; \mathbb{Z})$ између два прстена.

Доказ. 1) Како је m фиксна тачка, то је инклузија $\{m\} \xrightarrow{i} M$ једно еквиваријантно пресликавање. Применом функтора $(-)_G$ на $p \circ i = \text{id}_{\{m\}}$, добијамо $p_G \circ i_G = \text{id}_{BG}$, што тачно значи да је $BG \xrightarrow{i_G} M_G$ тражено сечење.

- 2) Из функторијалности следи једнакост

$$i_G^* \circ p_G^* = \text{id}_{H^*(BG; \mathbb{Z})},$$

односно да p_G^* има леви инверз, што је и оно што је требало показати.

□

Глава 2

ГКМ теорија

Тако треба да буде, кажеш

Реч равнотежа расклапа се на дужу и краћу
страну

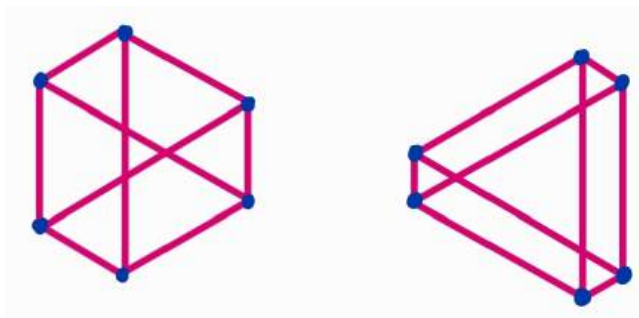
Јасмина Топић, *Нови поглед, стара вриједност*

2.1 Момент граф

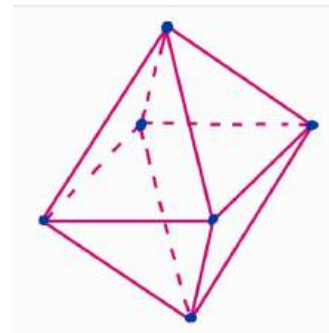
Дефиниција 2.1.1. Линеарни граф $\mathcal{G}$ у векторском простору $\mathbb{V}$ је уређени пар (G, f) , где је G тополошки граф, а пресликавање $G \xrightarrow{f} \mathbb{V}$ такво да се ивице графа G реализују као дужи у (реалном) векторском простору $\mathbb{V}$.

Битно је напоменути да два линеарна графа могу да имају исти тополошки граф у својој основи, али да су другачије реализовани у векторском простору $\mathbb{V}$. С тиме на уму, ми ћемо поистоветити линеарне графове који имају, грубо речено, „исти облик”.

Дефиниција 2.1.2. Кажемо да су два линеарна графа $\mathcal{G}_1 = (G_1, f_1)$ и $\mathcal{G}_2 = (G_2, f_2)$ у $\mathbb{V}$ *еквивалентни* ако су одговарајући тополошки графови G_1 и G_2 исти и ако, за сваку ивицу e тополошког графа $\Gamma = G_1 = G_2$, важи да су дужи $f_1(e), f_2(e) \subseteq \mathbb{V}$ паралелне.



(а) Два еквивалентна линеарна графа у $\mathbb{R}^2$.



(б) Линеарни граф у $\mathbb{R}^3$.

Слика 2.1

Због овог поистовећивања ћемо надаље радити с класама еквиваленција линеарних графова. У случајевима где нема простора за забуну, једноставности ради ћемо рећи за овакву класу да је линеарни граф.

Да би се одредила класа еквиваленције линеарног графа, потребан нам је тополошки граф и скуп података који нам говори о *усмерењу* ивица. Ти подаци ће заправо бити колекција ненула вектора $v \in \mathbb{V}$ који су додељени ивицама тополошког графа G . Ове векторе називамо *векторима усмерења* јер они одређују класе паралелности одговарајућих ивица¹.

Сада ћемо видети какву улогу линеарни графови имају у описивању динамике простора M који је опремљен с дејством n -димензионалног торуса T . Знамо да се M разлаже на дисјунктну унију орбита $\mathcal{O}(p) = Tp$, а користећи мало елементарне теорије Лијевих група², може се показати да су ове орбите опет торуси димензије не веће од n . Због тога има смисла да уведемо појам *k -скелеџа* дејства $T \curvearrowright M$ као унију свих орбита у M димензије не веће од k . Видећемо убрзо да ће нама од највећег значаја бити заправо 1-скелет простора M .

Коментар. Ако није наглашено другачије, у овом поглављу ће нам T бити ознака за торус димензије n . Њега ћемо често доживети или као производ $(\mathbb{S}^1)^n$ или као количник $\mathbb{T}/\mathbb{L}$, где је $\mathbb{T}$ реални n димензионални векторски простор, а $\mathbb{L}$ решетка унутар $\mathbb{T}$.

Дефиниција 2.1.3. За сферу $B = \mathbb{S}^2 (\subseteq \mathbb{R}^3)$ кажемо да је *балон* ако је додатно опремљена с дејством торуса $T = \mathbb{T}/\mathbb{L}$, које је дато са

$$T \ni t + \mathbb{L} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi D_B(t)) & -\sin(2\pi D_B(t)) & 0 \\ \sin(2\pi D_B(t)) & \cos(2\pi D_B(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(3),$$

где је $\mathbb{T} \xrightarrow{D_B} \mathbb{R}$ линеарни функционал такав да $\mathbb{L}$ шаље у $\mathbb{Z}$.

Коментар. Како је експоненцијално пресликавање $\mathfrak{t} \xrightarrow{\exp} T$ хомоморфизам Лијеве алгебре у Лијеву групу³, функционал $\mathbb{T} \xrightarrow{D} \mathbb{R}$ можемо и да доживимо као диференцијал $\mathfrak{t} \xrightarrow{d_*\chi} \mathbb{R}$ карактера група $T \xrightarrow{\chi} \mathbb{S}^1$. Ова чињеница ће нам бити од користи јер је познато из теорије Лијевих група да се сваки карактер $T = (\mathbb{S}^1)^n \xrightarrow{\chi} \mathbb{S}^1$ може представити као

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) \xrightarrow{\chi} z_1^{d_1} z_2^{d_2} \dots z_n^{d_n},$$

где је вектор $d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{Z}^n$, тј. можемо поистоветити функционале $D \in \mathbb{T}^*$ и $\langle d, - \rangle \in \mathbb{T}^*$.

¹Тачније, само су нам битни вектори $v \in \mathbb{V}$ до на скалирање ненула скаларом $\lambda \in \mathbb{R}$.

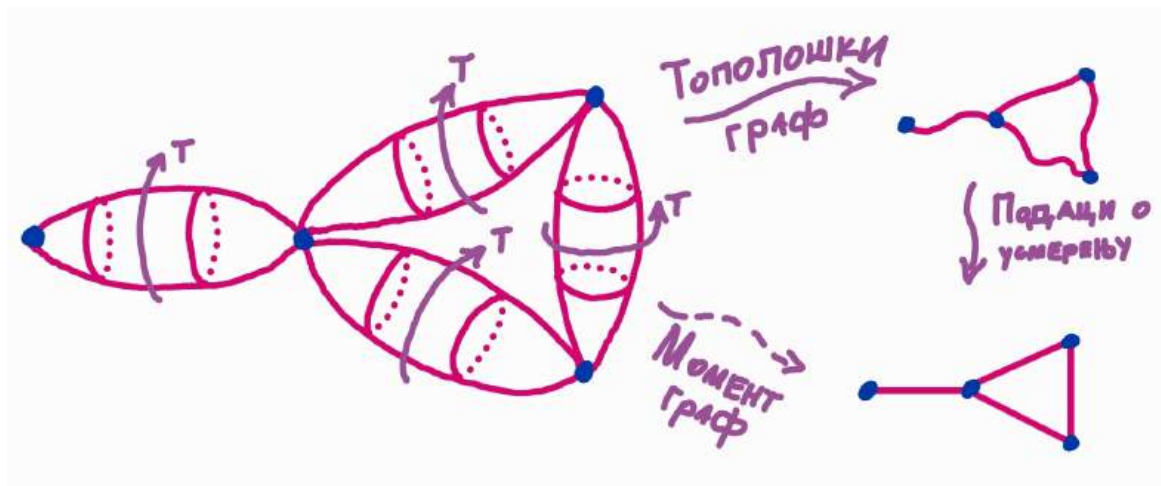
²Орбита $\mathcal{O}(p) \approx T/\mathrm{Stab}_p$ је уједно компактна, као слика пресликавања $T \ni z \mapsto z \cdot p \in M$ и Абелова Лијева група, као количник двају Абелових Лијевих група. Самим тиме мора бити торус.

³Лијеву алгебру $\mathfrak{t}$ овде доживљавамо као Абелову групу у односу на сабирање.

Дефиниција 2.1.4. *Балонска структура* је простор X с дејством турса T који је коначна унија балона B_j који су или дисјунктни или се секу у једној фиксној тачки дејства $T \curvearrowright X$.

Појам балонске структуре уводимо на овом месту јер ћемо надаље у раду проучавати дејства $T \curvearrowright M$ код којих су **1-скелети еквиваријантно еквивалентни балонским структурама!** Ова претпоставка је суштинска у развијању ГKM теорије и о томе можете даље прочитати у [10], [11] и [19]⁴. При истој, простору M можемо да придружимо линеарни граф који нам доста говори о динамици датог торусног дејства.

Ако са X обележимо 1-скелет дејства $T \curvearrowright M$, видимо да ће, при претходно поменутом услову, простор орбита X/T бити један тополошки граф, где темена одговарају фиксним тачкама, а ивице одговарају балонима. Корисно је приметити да сваком балону B_j одговара један вектор $D_{B_j} \in \mathbb{V} = \mathbb{T}^*$, односно постоји „леп” начин на који се свакој ивици графа X/T могу доделити вектори усмерења у $\mathbb{T}^*$. Овако ћемо дефинисати линеарни граф који се зове **моментни граф**.



Слика 2.2: Балонска структура (и њој придружени момент граф).

Дефиниција 2.1.5. *Моментни граф* $\mathcal{G}(T \curvearrowright M)$ придружен простору M опремљен с дејством $T \curvearrowright M$ је линеарни граф у $\mathbb{T}^*$ чији је тополошки граф X/T , где је X 1-скелет дејства, а вектори усмерења су функционали D_{B_j} који одговарају балонима B_j .

Коментар (Постојање и јединственост момент графа). Момент граф неће увек постојати⁵, али ће постојати у већини „занимљивих” случајева. У духу претходно поменутог коментара, како је момент граф задан само преко вектора усмерења, он је добро дефинисан до на еквиваленцију линеарних графова.

Такође је битно напоменути да, како радимо под претпоставком да су 1-скелети наших дејства еквиваријантно еквивалентни балонској структури, вектори усмерења D_{B_j}

⁴Изучавани су и случајеви где ова претпоставка није испуњена, али о томе такође можете прочитати у [19].

⁵Једноставне примере оваквих простора можете опет наћи у [19].

зависе од ове идентификације. Ипак, може да се покаже да при промени идентификације добијамо само рескалиране векторе усмерења, што нам не мења класу паралелности самих ивица момент графа.

Наиме, ако су $B \stackrel{\phi}{\approx} \mathbb{S}^2$ и $B' \stackrel{\phi'}{\approx} \mathbb{S}^2$ два различита еквиваријантна дифеоморфизма који идентификују балоне B и B' с $T \curvearrowright \mathbb{S}^2$ и нека су $\mathbb{T} \xrightarrow{D} \mathbb{R}$ и $\mathbb{T} \xrightarrow{D'} \mathbb{R}$ одговарајући вектори усмерења из дефиниције балона. Тада $t + \mathbb{L} \in T$ дејствује тривијално на B ако и само ако дејствује тривијално на B' . Одавде следи је $\langle d, t \rangle \in \mathbb{Z}$ и $\langle d', t \rangle \in \mathbb{Z}$, где су $d, d' \in \mathbb{Z}^n$ вектори фигурисани у претходном коментару. Користећи ове релација можемо показати да су d и d' линеарно зависни, односно да су функционали D и D' линеарно зависни.

Примери момент графова

Пример 2.1.1 (Комплексна пројективна права $\mathbb{CP}^1$). Дводимензионални торус $T = (\mathbb{S}^1)^2$ глатко дејствује на $\mathbb{CP}^1$ тако што елемент торуса $(z_1, z_2) \in (\mathbb{S}^1)^2$ дејствује по правилу

$$(x_1 : x_2) \xrightarrow{z} (z_1 x_1 : z_2 x_2).$$

Овде нам је корисно доживети $\mathbb{CP}^1$ као Риманову сферу $\widehat{\mathbb{C}}$. При стереографској пројекцији из северног пола $(0 : 1)$, можемо да идентификујемо $\mathbb{CP}^1 \setminus (0 : 1)$ с $\mathbb{C}$ тако што шаљемо $(x_1 : x_2) \mapsto \frac{x_2}{x_1}$. Ова идентификација нам заправо преводи ротације сфере око z -осе за угао φ у ротације у равни око координатног почетка за исти угао φ .

Сада можемо да покажемо да ће $\mathbb{CP}^1$ с претходно поменути дејством $T \curvearrowright \mathbb{CP}^1$ бити један *балон* с вектором усмерења $e_1 - e_2 \in \mathbb{T}^*$ (где су нам функционали e_i дати са $\mathbb{T} \ni (t_1, t_2) \mapsto t_i$, за $i = 1, 2$). Наиме, у координатама стереографске пројекције имамо

$$\frac{z_2}{z_1} \frac{x_2}{x_1} = \frac{e^{2\pi i t_2}}{e^{2\pi i t_1}} \frac{x_2}{x_1} = e^{2\pi i(t_1 - t_2)} \frac{x_2}{x_1} = e^{2\pi i(e_1 - e_2)(t_1, t_2)} \frac{x_2}{x_1},$$

што значи да торус T дејствује на $\mathbb{CP}^1$ ротацијом која је дата као у дефиницији 2.1.3.

Одавде можемо да закључимо да је момент граф $\mathcal{G}(T \curvearrowright \mathbb{CP}^1)$ заправо дуж која је паралелна вектору $e_2 - e_1 \in \mathbb{T}^*$ и чији крајеви одговарају фиксним тачкама $F_1 = (1 : 0)$ и $F_2 = (0 : 1)$.

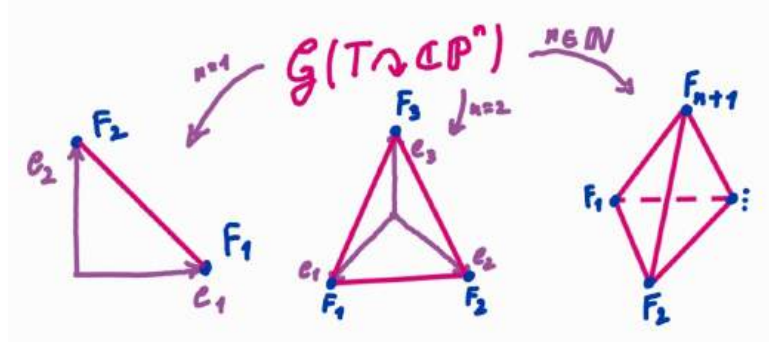
Пример 2.1.2 (Комплексан пројективни простор $\mathbb{CP}^n$). Претходни пример можемо и да генерализујемо. Овде $(n + 1)$ -димензионални торус $T = (\mathbb{S}^1)^{n+1}$ дејствује на $\mathbb{CP}^n$ тако што елемент $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \in T$ дејствује по правилу

$$(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}) \xrightarrow{z} (z_1 x_1 : z_2 x_2 : \dots : z_{n+1} x_{n+1}).$$

Фиксне тачке дејства ће бити тачке $F_i = (0 : \dots : 1 : \dots : 0)$, где се 1 налази на i -тој координати и $i = \overline{1, n+1}$. Остаје нам да видимо шта ће нам бити 1-скелет овог дејства. За то ће нам послужити чињеница да, ако имамо тачку $x \in \mathbb{CP}^n$ с тачно k

ненула хомогених координата, онда је димензија орбите Tx заправо $k - 1$.⁶ Због овога је довољно посматрати шта се дешава на скуповима B_{ij} тачака чије су све координате нула сем i -те или j -те, где су $i, j = \overline{1, n+1}$ и $i \neq j$. Сличном анализом као у примеру 2.1.1, видимо да су B_{ij} заиста балони који спајају фиксне тачке F_i и F_j , с векторима усмерења $e_i - e_j \in \mathbb{T}^*$.

Све ово нам говори да је момент граф $\mathcal{G}(T \curvearrowright \mathbb{CP}^n)$ ништа друго до 1-скелет *сџан-дaрднoг* n -симплекса $\Delta_n \subseteq \mathbb{T}^*$.



Слика 2.3: Момент графови $\mathcal{G}(T \curvearrowright \mathbb{CP}^n)$ за различито $n \in \mathbb{N}$.

Пример 2.1.3 (Квадрика у $\mathbb{CP}^{2n-1}$). Још један леп пример момент графа потиче од проучавања $(2n - 2)$ -димензионалне квадрике $Q_{2n-2} \subseteq \mathbb{CP}^{2n-1}$ која је хиперповрш дата као

$$Q_{2n-2} = \left\{ (x_1 : x_2 : \cdots : x_n : y_1 : y_2 : \cdots : y_n) \in \mathbb{CP}^{2n-1} \mid x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = 0 \right\}.$$

Торус $T = (\mathbb{S}^1)^n$ дејствује на Q_{2n-2} тако што $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in T$ дејствује по правилу

$$(x_1 : x_2 : \cdots : x_n : y_1 : y_2 : \cdots : y_n) \xrightarrow{z} (z_1 x_1 : z_2 x_2 : \cdots : z_n x_n : z_1^{-1} y_1 : z_2^{-1} y_2 : \cdots : z_n^{-1} y_n).$$

Једноставно се може проверити да су фиксне тачке тачно оне које имају једну ненула координату. Обележимо са F_i тачку чија је координата x_i различита од нуле, односно са F'_i тачку чија је координата y_i различита од нуле.

Слично као у примери 2.1.2, ако издвојимо било који пар хомогених координата (с изузетком „дијагоналних” парова $\{x_i, y_i\}$)⁷, онда су балони скупови тачака чије су све координате, сем тог издвојеног пара координата, нула, тј. то су једни од наредних

⁶Без умањења општости, можемо претпоставити да је првих k координата ненула. Због тога можемо представити тачку x као $(\underbrace{* : * : \cdots : *}_{k-1} : 1 : 0 : \cdots : 0)$, где са $*$ обележавамо ненула координате. Одавде

се једноставно види да ће стабилизатор бити $\text{Stab}_x = \mathbb{1}^{k-1} \times (\mathbb{S}^1)^{(n+1)-(k-1)}$, па имамо да је $\dim(Tx) = \text{codim}(\text{Stab}_x) = k - 1$.

⁷Искључујемо „дијагоналне” тачке $(0 : \cdots : x_i : \cdots : 0 : \cdots : y_i : \cdots : 0)$ јер оне не припадају квадрици Q_{2n-2} .

скупова

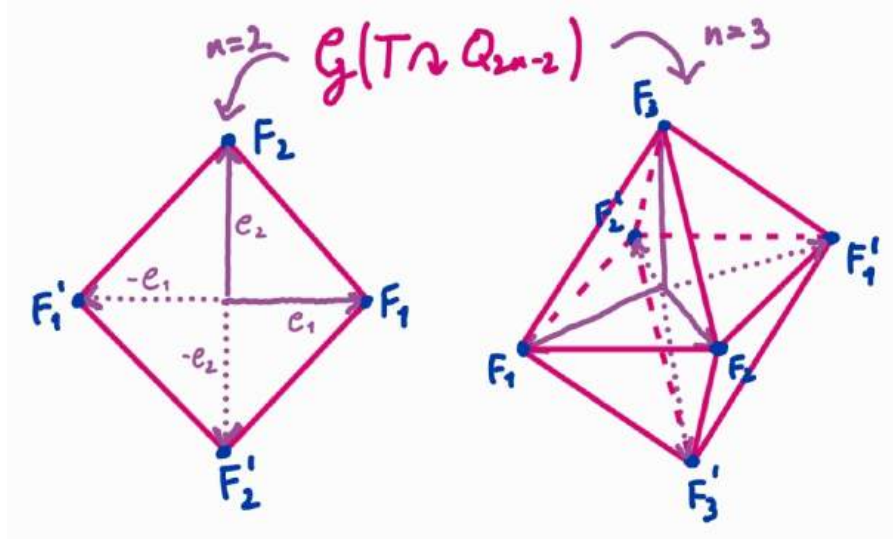
$$B_{x_i x_j} = \left\{ (0 : \dots : x_i : \dots : 0 : \dots : x_j : \dots : 0 : \dots : 0) \in Q_{2n-2} \mid x_i x_j \neq 0 \right\}$$

$$B_{y_i y_j} = \left\{ (0 : \dots : 0 : \dots : y_i : \dots : 0 : \dots : y_j : \dots : 0) \in Q_{2n-2} \mid y_i y_j \neq 0 \right\}$$

$$B_{x_i y_j} = \left\{ (0 : \dots : x_i : \dots : 0 : \dots : y_j : \dots : 0) \in Q_{2n-2} \mid x_i y_j \neq 0 \right\}$$

Како искључујемо тачке чије су координате x_i и y_i ненула, број оваквих балона је $\binom{2n}{2} - n$. Такође се једноставно показује да је вектор усмерења $e_i - e_j$ ако балон спаја таче F_i и F_j , односно $-e_i + e_j$ ако балон спаја таче F'_i и F'_j , док у случају када балон спаја тачке F_i и F'_j , за $i \neq j$, имамо да је вектор усмерења $e_i + e_j$. Можемо приметити да је момент граф $\mathcal{G}(T \curvearrowright Q_{2n-2})$ 1-скелет *хипероктаедра*

$$O_n = \left\{ (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{T}^* \mid |v_1| + \dots + |v_n| \leq 1 \right\}.$$



Слика 2.4: Момент графови $\mathcal{G}(T \curvearrowright Q_{2n-2})$ за различито $n \in \mathbb{N}$.

До сада смо видели да су момент графови лепих простора заправо у тесној вези с комбинаторно значајним политопима, и то није случајност. Убрзо ћемо видети и порекло самог имена момент графа, које ће нас додатно упутити на дубок однос између динамике дејства торуса и комбинаторике конвексних политопа. Поред тога, у последњој глави ћемо се сусрести с још две занимљиве фамилије политопа које се јављају при одређивању момент графа *комплексног Грасманијана* $Gr(k, n)$ и *комплексне мнојосиру-коси* *комплексних засјава* $Fl(1, 2, \dots, n; \mathbb{C}^n)$.

2.2 Придружени торусни простор полиедра

У претходном делу смо видели како можемо простору с дејством торуса да доделимо линеарни граф и успут видели примере где се дотични графови могу реализовати као

1-скелети конвексних политопа. У наредном поглављу ћемо видети како можемо да конструишемо занимљиве просторе с торусним дејством *почевши од конвексних полиедара*.

Коментар. Ради једноставности излагања, користимо ознаку $\mathbb{V}$ за n -димензионални реални векторски простор, $\mathbb{T} = \mathbb{V}^*$, а решетку $\mathbb{L}$ ћемо поистоветити са $\mathbb{Z}^n$.

Дефиниција 2.2.1. Кажемо да је n -димензионални конвексни полиедар P у $\mathbb{V}$ *рационалан* ако сва темена политопа имају рационалне координате, тј. живе у $\mathbb{Q}^n$.

Дефиниција 2.2.2. Кажемо да је n -димензионални полиедар P у $\mathbb{V}$ *прости* ако, за свако теме $v \in P$ важи да су ивице које садрже v , виђене као вектори у $\mathbb{V}$, линеарно независне.

Дефиниција 2.2.3.

- Нека је F страна полиедра $P \subseteq \mathbb{V}$, са $F^\perp \leq \mathbb{T}$ ћемо обележити векторе који су ортогонални на F , тј. скуп функционала

$$F^\perp = \left\{ t \in \mathbb{T} \mid t(v - v') = 0, v, v' \in F \right\}.$$

- Нека је $p \in P$ тачка унутар полиедра P , са F_p ћемо обележити најмању страну полиедра P која садржи тачку p .

Дефиниција 2.2.4. Нека је P полиедар у n -димензионалном векторском простору $\mathbb{V}$ и нека је $T = \mathbb{T}/\mathbb{L}$ n -димензионални торус. Придружени *торусни простор полиедра* P дефинишемо као $\mathbf{T}(P) = (P \times \mathbb{T})/\sim$, где је релација еквиваленције $\sim$ дата са

$$(p, t) \sim (p', t') \iff (p = p' \wedge t = t' \bmod (F_p^\perp + \mathbb{L})).$$

Класу еквиваленције ћемо често обележавати са $[p, t]$.

Простор $\mathbf{T}(P)$ долази опремљен с природним дејством $T \curvearrowright \mathbf{T}(P)$, где елемент $t + \mathbb{L} \in T$ дејствује по правилу

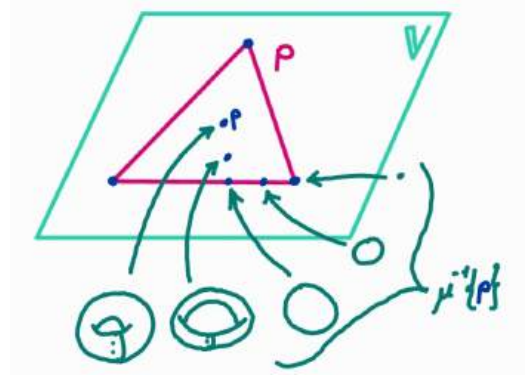
$$[p, t'] \xrightarrow{t+\mathbb{L}} [p, t' + t].$$

Поред дејства $T \curvearrowright \mathbf{T}(P)$, торусни простор $\mathbf{T}(P)$ је опремљен с пресликавањем $\mathbf{T}(P) \xrightarrow{\mu} P$, који потиче од пројекције $P \times \mathbb{T} \xrightarrow{\text{proj}_1} P$.⁸ Пресликавање μ називамо *момент пресликавањем*. Наведимо наредно доста лепо и кључно својство момент пресликавања без доказа.

Став 2.2.1 ([19]). Слој $\mu^{-1}(\{p\})$ момент пресликавања $\mathbf{T}(P) \xrightarrow{\mu} P$ је торус димензије $\dim(F_p)$.

⁸Како релација $\sim$ идентификује тачке унутар истог слоја при пројекцији proj_1 , пресликавање μ је добро дефинисано.

Како је димензија орбите $\mu^{-1}(\{p\})$ баш $\dim(F_p)$, 1-скелет дејства $T \curvearrowright \mathbf{T}(P)$ ће бити инверзна слика 1-скелета полиедра P . Штавише, ако са e обележимо ивицу полиедра P , испоставиће се да је $\mu^{-1}(e)$ један балон чији је вектор усмерења паралелан с ивицом e (опет, видети [19]). То ће рећи да је моментни граф придруженог торусног простора $\mathbf{T}(P)$ управо 1-скелет полиедра P .



Слика 2.5: Фибре моментног пресликавања $\mathbf{T}(P) \xrightarrow{\mu} P$

Дигресија: Симплектичка топологија и момент пресликавање

Порекло имена и концепта момент пресликавања $\mathbf{T}(P) \xrightarrow{\mu} P$ лежи у области *симплектичке топологије*. У овом контексту, крећемо од тога да имамо дејство

$$T \xrightarrow{\varphi} \text{Symp}(M, \omega) \subseteq \text{Diff}(M)$$

n -димензионалног торуса T на симплектичкој многострукости (M^{2n}, ω) које је Хамилтоново. То значи да важи следеће: ако са $t_1, t_2, \dots, t_n$ обележимо базу простора $\mathfrak{t}$ и са $t_1^\#, t_2^\#, \dots, t_n^\#$ обележимо векторска поља на M која одговарају једнопараметарским подгрупама $\{\exp(st_i) \mid s \in \mathbb{R}\} \leq T$, онда су поља $t_i^\#$ Хамилтонова векторска поља, тј. таква да постоји глатко пресликавање $M \xrightarrow{\mu_i} \mathbb{R}$ за које важи $d\mu_i = t_i^\# \lrcorner \omega$.

Коментар. У случају произвољне Лијеве групе G која дејствује на (M, ω) путем симплектоморфизама, кажемо да је дејство $G \curvearrowright M$ Хамилтоново ако постоји пресликавање $M \xrightarrow{\mu} \mathfrak{g}^*$, које називамо **момент пресликавањем** и које задовољава наредне услове:

- Ако са $M \xrightarrow{\mu^X} \mathbb{R}$ обележимо пресликавање дато са $p \mapsto \mu(p)(X)$, где је $X \in \mathfrak{g}$, и ако са $X^\#$ обележимо векторско поље на M које одговара једнопараметарској подгрупи $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\} \leq G$, онда важи да је, за свако $X \in \mathfrak{g}$, пресликавање μ^X Хамилтонијан векторског поља $X^\#$, тј. да важи $d\mu^X = X^\# \lrcorner \omega$.
- Пресликавање $M \xrightarrow{\mu} \mathfrak{g}^*$ је G -еквиваријантно, где је $G \curvearrowright \mathfrak{g}^*$ коадјунговано дејство.

У случају када је $G = T$, момент пресликавање $M \xrightarrow{\mu} \mathfrak{t}^*$ ће бити дато са

$$p \mapsto \langle (\mu_1(p), \dots, \mu_n(p)), - \rangle$$

па се ова уопштена дефиниција Хамилтоновог дејства поклапа с почетном.

Симплектичке многострукости (M^{2n}, ω) које су опремљене ефективним и Хамилтоновим дејством називамо *симплектичким торусним многострукостима* и често их

обележавамо као уређену четворку (M, ω, T, μ) , где је μ момент пресликавање дејства $T \curvearrowright M$. Оне су нам од посебног значаја јер постоји класификација истих преко комбинаторних података које читамо из момент пресликавања μ . Конкретно, ове многострукости су у тесној вези с *Делзановим политопима*, тј. простим и рационалним политопима који су уз то и глатки (што значи да, за свако теме, ивице које га садрже чине једну $\mathbb{Z}$ -базу решетке $\mathbb{Z}^n$).

Теорема 2.2.1 (Делзанова теорема). Повезане и затворене симплектичке торусне многострукости су класификоване преко Делзанових политопи. Тачније, постоји бијективна кореспонденција

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Повезане и затворене} \\ \text{симплектичке торусне} \\ \text{многострукости} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Делзанови} \\ \text{политопи} \end{array} \right\}$$

$$(M, \omega, T, \mu) \longmapsto \mu(M).$$

Доказ. Видети поглавља 28 и 29 у [4]. □

Томас Делзан је 1988. године доказао ову дубоку теорему и она је једна у низу резултата из алгебарске геометрије и симплектичке топологије 70-их и 80-их година прошлог века који су поставили камен темељац за изучавање торусних многострукости и *торусних варијететима* преко придружених комбинаторних објеката (такозваних *лејеза*). Више о овом приступу, који припада области *торусне теорије*, можете прочитати у [3], [2] и [5].

2.3 Кохомолошки прстен линеарних графова

У овом поглављу ћемо са $\nu, \nu', \dots$ обележити темена линеарног графа $\mathcal{G}$, односно, са $l_{\nu\nu'}$ ћемо обележити ивицу графа $\mathcal{G}$ која повезује темена ν и ν' . Слично као и у претходном поглављу, нама ће $\mathcal{G}$ живети у n -димензионалном векторском простору $\mathbb{V}$, $\mathbb{T} = \mathbb{V}^*$ ће бити одговарајући дуал, а $l_{\nu\nu'}^\perp \leq \mathbb{T}$ ће бити ортогонал ивице $l_{\nu\nu'}$. Додатно, прстен реалних полиномијалних функција $\mathbb{T} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ћемо гледати као градуисан прстен $\text{Sym}(\mathbb{T}^*)$, где је степен градуације два пута стандардни степен полиномијалне функције.

Дефиниција 2.3.1 ([9]). Посматрајмо прво прстен

$$\bigoplus_{\nu} \text{Sym}(\mathbb{T}^*),$$

чији су елементи низови $(f_\nu, f_{\nu'}, \dots)$ полиномијалних функција $\mathbb{T} \xrightarrow{f_\nu} \mathbb{R}$ који су индексирани теменима ν линеарног графа $\mathcal{G}$. *Кохомолошки прстен линеарног графа $\mathcal{G}$* је прстен

$$\mathcal{H}^*(\mathcal{G}) = \left\{ (f_\nu, f_{\nu'}, \dots) \in \bigoplus_{\nu} \text{Sym}(\mathbb{T}^*) \mid f_\nu|_{l_{\nu\nu'}^\perp} = f_{\nu'}|_{l_{\nu\nu'}^\perp}, \text{ за сва темена } \nu, \nu' \right\}. \quad (2.1)$$

Геометријски, ове релације нам само говоре да, за сваку ивицу $l_{\nu\nu'}$, имамо да се полиноми f_ν и $f_{\nu'}$ одговарајућих темена поклапају на ортогоналу $l_{\nu\nu'}^\perp$.

На прстен $\mathcal{H}^*(\mathcal{G})$ можемо и да уведемо градуацију

$$\mathcal{H}^*(\mathcal{G}) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{H}^i(\mathcal{G}),$$

где је $\mathcal{H}^{2k+1}(\mathcal{G}) = 0$, док је $\mathcal{H}^{2k}(\mathcal{G})$ скуп свих низова $(f_\nu, \dots)$ чији су чланови f_ν сви степена k . Овде је производ такав да, за $\alpha \in \mathcal{H}^i(\mathcal{G})$ и $\beta \in \mathcal{H}^j(\mathcal{G})$, имамо да је $\alpha\beta \in \mathcal{H}^{i+j}(\mathcal{G})$. Поред тога, прстен $\mathcal{H}^*(\mathcal{G})$ има и структуру једног $\text{Sym}(\mathbb{T}^*)$ модула, где је множење скаларом $g \in \text{Sym}(\mathbb{T}^*)$ дато са $g \cdot (f_\nu, f_{\nu'}, \dots) = (gf_\nu, gf_{\nu'}, \dots)$.

Оправдање зашто се $\mathcal{H}^*(\mathcal{G})$ зове *кохомолошки* прстен линеарног графа лежи у наредној чињеници: ако имамо инклузију $\mathcal{G}' \xhookrightarrow{\iota} \mathcal{G}$ линеарних графова, онда постоји природна пројекција

$$\bigoplus_{\nu} \text{Sym}(\mathbb{T}^*) \xrightarrow{\iota^\#} \bigoplus_{\nu'} \text{Sym}(\mathbb{T}^*),$$

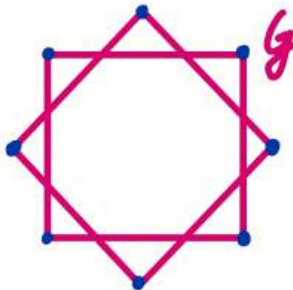
где је прва сума индексирана теменима ν графа $\mathcal{G}$, док је друга индексирана (потенцијално мањим скупом) теменима ν' графа $\mathcal{G}'$. Како је $\mathcal{G}'$ линеарни граф чије су ивице део ивица графа $\mathcal{G}$, то је добро дефинисан морфизам $\text{Sym}(\mathbb{T}^*)$ модула

$$\mathcal{H}^*(\mathcal{G}) \xrightarrow{\iota^*} \mathcal{H}^*(\mathcal{G}'),$$

који поштује и градуацију.

Мада је дефиниција доста елементарна, рад с кохомолошким прстеном $\mathcal{H}^*(\mathcal{G})$, за произвољни линеарни граф $\mathcal{G}$, може да буде доста захтеван. Зато ћемо навести само пар једноставних и занимљивих чињеница, неке од којих су нам важне за даљи рад. Више о кохомолошком прстену линеарних графова можете прочитати у [13], [11] и [19].

Интерпретација $\mathcal{H}^i(\mathcal{G})$ за мале индексе i



$\mathcal{H}^0(\mathcal{G})$: Низ $(f_\nu, f_{\nu'}, \dots) \in \mathcal{H}^0(\mathcal{G})$ је заправо низ константних функција $\mathbb{T} \xrightarrow{f_\nu} \mathbb{R}$ које задовољавају релације из 2.1. То значи да су, за два суседна темена ν и ν' , функције f_ν и $f_{\nu'}$ једнаке. Овако добијамо да су $f_\nu = f_{\nu'}$, за свака два темена из исте компоненте повезаности линеарног графа $\mathcal{G}$, па ће димензија простора $\mathcal{H}^0(\mathcal{G})$ одговарати броју компоненти повезаности.

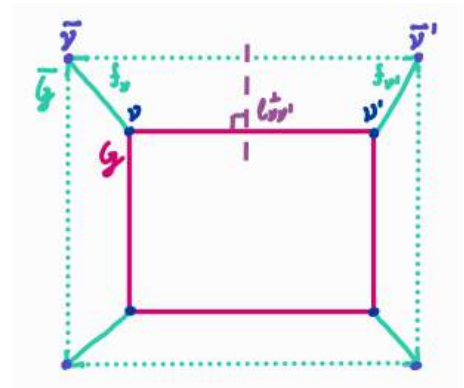
$\mathcal{H}^2(\mathcal{G})$: Овај пут је низ $(f_\nu, f_{\nu'}, \dots) \in \mathcal{H}^2(\mathcal{G})$ један низ *линеарних* функција $\mathbb{T} \xrightarrow{f_\nu} \mathbb{R}$ које задовољавају релације из 2.1. Како нам $\mathcal{G}$ живи у $\mathbb{V} = \mathbb{T}^*$, ми можемо сваки функцинал f_ν да видимо као вектор који је постављени на одговарајуће теме ν . Одавде можемо да конструишемо нови линеарни граф $\bar{\mathcal{G}}$. Скуп темена $\bar{\nu}$ графа $\bar{\mathcal{G}}$ је скуп „врхова” вектора f_ν , док ћемо темена $\bar{\nu}$ и $\bar{\nu}'$

повезати ивицом ако су одговарајућа темена у графу $\mathcal{G}$ повезана ивицом.

Слика 2.6: $\mathcal{H}^0(\mathcal{G}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

Испоставиће се да су линеарни графови $\mathcal{G}$ и $\bar{\mathcal{G}}$ еквивалентни. Ако уочимо ивице $l_{\nu\nu'}$ и $l_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}$, ми видимо да су оне паралелне ако и само ако вектори f_ν и $f_{\nu'}$ имају исту пројекцију на ортогонал $l_{\nu\nu'}^\perp$, али то је еквивалентно с тиме да важи релација $f_\nu|_{l_{\nu\nu'}^\perp} = f_{\nu'}|_{l_{\nu\nu'}^\perp}$ (видети слику 2.7).

Тиме смо суштински показали да је димензија $\mathcal{H}^2(\mathcal{G})$ уједно и димензија конфигурационог простора свих линеарних графова који су еквивалентни с графом $\mathcal{G}$.



Слика 2.7

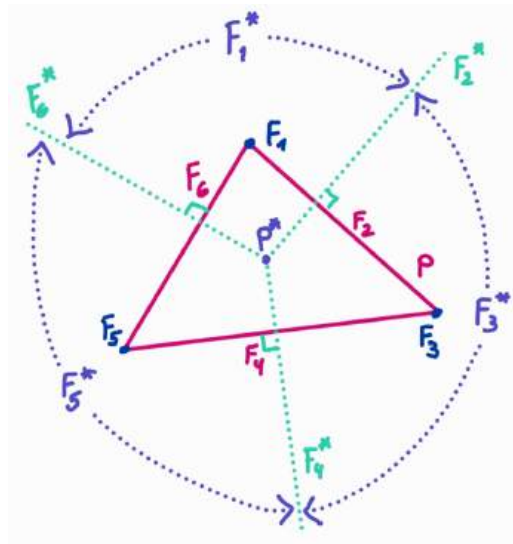
Део-по-део полиномијалне функције

Овде ћемо дати интерпретацију $\mathcal{H}^*(\mathcal{G})$ у случају када је $\mathcal{G}$ 1-скелет политопа P . Ако је $P \subseteq \mathbb{V}$, тада можемо да разложимо $\mathbb{T}$ преко његове нормалне лепезе.

Дефиниција 2.3.2. Нормална лепеза N_P политопа P је колекција $\{F^*\}$ (полиедарних) конуса⁹

$$F^* = \left\{ t \in \mathbb{T} \mid F \subseteq \operatorname{argmax}_{v \in P} t(v) \right\},$$

где је F страна политопа P .

Слика 2.8: Разлагање $\mathbb{T}$ преко нормалне лепезе политопа P .

Познато је из конвексне анализе да линеарни функционали $\mathbb{V} \xrightarrow{t} \mathbb{R}$ достижу свој максимум на конвексном скупу P баш у екстремним тачкама (видети [24]). У случају

⁹Подскуп C реалног векторског простора V је конус ако је затворен за множење с позитивним скаларима $\lambda > 0$. Конус C је додатно полиедаран ако се може представити као конусни омотач $C = \operatorname{Cone}(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_i > 0 \right\}$, за неке векторе $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Ово је чак еквивалентно с тиме да се конус C може реализовати као полиедар.

политопа, то су тачно темена политопа P , па се F^* може релативно једноставно одредити геометријски (видети слику 2.8).

Такође видимо да можемо да разложимо $\mathbb{T}$ на унију $\mathbb{T} = \bigcup_F F^*$, где је унија индексираних странама F политопа P .

Коментар. Занимљиво је приметити да нормална лепеза N_P задовољава наредна својства:

- 1) Свака страна τ конуса $\sigma \in N_P$ припада нормалној лепези N_P ;
- 2) Пресек два конуса $\sigma_1, \sigma_2 \in N_P$ такође припада нормалној лепези N_P .

Ово ће нам бити основа за уопштење дефиниције нормалне лепезе N_P политопа P . Кажемо да је колекција полиедарних конуса $\Sigma \subseteq \mathbb{T}$ *лепеза* ако важе претходно наведена својства 1) и 2).

Претходно смо најавили да су нам лепезе битни комбинаторни објекти преко којих можемо да изучавамо тополошке особине торусних варијетета¹⁰. Наиме постоји бијективна кореспонденција између (нормалних) торусних варијетета и лепеза строго конвексних конуса. Више о овој теорему можете наћи у [3].

Дефиниција 2.3.3. За непрекидну функцију $\mathbb{T} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ кажемо да је *део-по-део полиномијална* на $\mathbb{T}$ (наспрам нормалне лепезе N_P) ако је рестрикција $f|_{F^*}$ полиномијална функција, за све стране F политопа P .

Једноставно може да се провери да је f део-по-део полиномијална функција ако и само ако је рестрикција $f|_{V^*}$ полиномијална за сва *темена* V политопа P . Због ове чињенице можемо да приметимо да је кохомолошки прстен $\mathcal{H}^*(\mathcal{G})$, у случају када је линеарни граф $\mathcal{G}$ 1-скелет политопа P , *уједно и* прстен део-по-део полиномијалних функција на $\mathbb{T}$ (наспрам нормалне лепезе N_P).¹¹

2.4 Однос између еквиваријантне кохомологије и кохомологије линеарних графова

У овом поглављу ћемо коначно повезати теорију коју смо развили у овој глави с теоријом из претходне главе. За разлику од прве главе, овде и у наредној глави подразумевамо да је прстен коефицијената $R = \mathbb{R}$, тј. да је $H_T^*(M) = H_T^*(M; \mathbb{R})$.

Наведимо сада две битне претпоставке за простор M и дејство $T \curvearrowright M$:

¹⁰Кажемо да је алгебарски варијетет X *торусни варијетет* ако садржи алгебарски торус $(\mathbb{C}^*)^n = \text{Spec}(\mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}])$ као отворен, свуда густ подскуп (у топологији Зариског) и ако важи да се природно дејство $(\mathbb{C}^*)^n \curvearrowright (\mathbb{C}^*)^n$ може да се продужи на дејство $(\mathbb{C}^*)^n \curvearrowright X$.

¹¹Штавише, ако је политоп P прост, овај прстен може и да се повеже с Стенли-Рајзнеровим прстеном дуалног политопа. Видети поглавље 12.4 у [3].

- 1) Да **моментни граф** $\mathcal{G}(T \curvearrowright M)$ **иосишоји**, односно да је 1-скелет дејства једна балонска структура;
- 2) Да је простор M опремљен с дејством $T \curvearrowright M$ **еквиваријантно формалан**, тј. ако за спектрални низ раслојења

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\iota} & ET \times_T M \\ & & \downarrow p_T \\ & & BT \end{array}$$

важи да је $E^2 = E^\infty$.

У пракси, услов еквиваријантне формалности је испуњен у доста случајева (видети [9],[15] и [18]). Између осталог, услов је испуњен у случају када је простор M :

- Симплектичка многострукост с Хамилтоновим дејством турса T ;
- Такав да су му кохомолошке групе непарних димензија $H^{2k+1}(M)$ тривијалне;
- Гладак комплексан пројективни варијетет¹² (где је $T = (\mathbb{C}^*)^n$ алгебарски торус који дејствује као линеарно-алгебарска група).

Такође је познато да, при услову еквиваријантне формалности, постоји природни изоморфизам $H_T^*(\text{pt})$ модула

$$H_T^*(M) \cong H^*(M) \otimes H_T^*(\text{pt}),$$

а ово је еквивалентно с тиме да је изведено пресликавање $H_T^*(M) \xrightarrow{\iota^*} H^*(M)$ сурјективно (видети [18], односно [6] за контрапример у случају када је $R = \mathbb{Z}$).

Теорема 2.4.1 (2.3, [15]). Кохомологију $H^*(M)$ можемо да реконструиремо преко еквиваријантне кохомологије $H_T^*(M)$. Прецизније, важи

$$H^*(M) \cong \frac{H_T^*(M)}{I \cdot H_T^*(M)},$$

где је I максимални хомогени идеал прстена $H_T^*(\text{pt}) \cong \mathbb{R}[t_1, t_2, \dots, t_n]$, тј. $I = \langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$.

Коментар. Изоморфизам $H_T^*(\text{pt}) \cong \mathbb{R}[t_1, t_2, \dots, t_n]$ није канонски. Наиме, идентификација алгебре $H_T^*(\text{pt}) = \text{Sym}(\mathfrak{t}^*)$ с алгебром $\mathbb{R}[t_1, t_2, \dots, t_n]$ зависи од одабира базних функционала $\langle t_1, - \rangle, \langle t_2, - \rangle, \dots, \langle t_n, - \rangle \in \mathfrak{t}^*$, односно зависи од одабира базних вектора $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathfrak{t}$. Некада се чак у литератури прстен $H_T^*(\text{pt}) = H^*(BT)$ идентификује са прстеном

$$H^*(BT) \cong H^*\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{CP}^\infty\right) \cong \bigotimes_{i=1}^n H^*(\mathbb{CP}^\infty) \cong \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{R}[t_i] \cong \mathbb{R}[t_1, t_2, \dots, t_n],$$

¹²Односно иредуцибилан Зариски затворен подскуп простора $\mathbb{CP}^n$ који је задан системом хомогених полономијалних једначина, такав да нема ни једну сингуларну тачку.

где је други изоморфизам дат преко Кинетове формуле и $\deg(t_i) = 2$, али ни он није канонски јер идентификација у примеру 1.3.5 није канонска. У сваком случају, идеал I може да се дефинише и без ове идентификације, али је уводимо једноставности ради.

Теорема 2.4.2 (Гореског, Котвица и Макферсона, 1.2.2, [9]). Нека је M простор са торусним дејством $T \curvearrowright M$ који задовољава претпоставке с почетка поглавља. Тада је еквиваријантна кохомологија *изоморфна (као $\mathbb{Z}$ -модул)* кохомолошком прстену момент графа, тј. важи

$$H_T^*(M) \cong \mathcal{H}^*(\mathcal{G}(T \curvearrowright M)).$$

Уместо доказа, у наредном поглављу ћемо кроз пар примера илустровати јачину претходне теореме.

Глава 3

Одређивање еквиваријантне кохомологије

Seeing comes before words. The child looks
and recognizes before it can speak.

John Berger, *Ways of Seeing*

Оперативна интерпретација главне теореме

У овом поглављу ћемо, као и у коментару после теореме 2.4.1, поистоветити $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*)$ са $\mathbb{R}[t_1, t_2, \dots, t_n]$, за неки одабир базних вектора $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathfrak{t}$. При тој идентификацији и идентификацији $\mathfrak{t}^* \cong \mathfrak{t} \cong \mathbb{R}^n$, можемо да интерпретирамо релацију

$$f_\nu|_{l_{\nu\nu'}^\perp} = f_{\nu'}|_{l_{\nu\nu'}^\perp} \quad (3.1)$$

која нам одређује еквиваријантну кохомологију $H_T^*(M) \cong \mathcal{H}^*(\mathcal{G}(T \curvearrowright M))$ на један доста оперативан начин.

Нека је e_i ивица момент графа $\mathcal{G}(T \curvearrowright M)$ која одговара балону B_i који повезује фиксне тачке N_i и S_i , односно која је паралелна вектору $D_i \leftrightarrow d_i$, где је $d_i = (d_{i,1}, d_{i,2}, \dots, d_{i,n}) \in \mathbb{Z}^n$. Тада нам релација 3.1 говори да се полином $f_{N_i} - f_{S_i} \in H_T^*(M)$ анулира на линеарном потпростору $\mathfrak{t}_i = \ker(D_i) = \{t \in \mathfrak{t} \mid \langle d_i, t \rangle = 0\}$ ¹. Како је $\mathfrak{t}_i$ задан линеарним полиномом, видимо да важи релација

$$f_{N_i} - f_{S_i} \in \langle d_{i,1}t_1 + d_{i,2}t_2 + \dots + d_{i,n}t_n \rangle.$$

Самим тиме одређивање еквиваријантне кохомологије $H_T^*(M)$ се своди на ишчитавање комбинаторних информација са момент графа $\mathcal{G}(T \curvearrowright M)$.

Слободније речено, *еквиваријантну кохомологију видимо преко момент графа!*

¹Што је заправо Лијева алгебра језгра $\ker(\chi_i)$ карактера $T \xrightarrow{\chi_i} \mathbb{S}^1$ који нам задаје дејство на балону B_i .

Коментар (О ефективним дејствима). Дејства у наведеним примерима из поглавља 2.1 нису ефективна. Ипак, можемо да их „поправимо” на наредни начин: ако нам је дато дејство $T \curvearrowright^\varphi M$, можемо да учимо дејство

$$\widehat{T} = T / \text{Ker}(\varphi) \curvearrowright^{\widehat{\varphi}} M$$

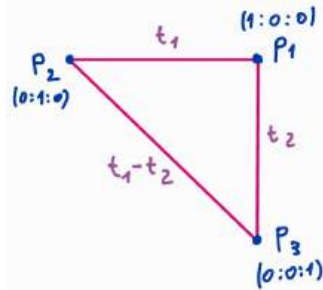
које је (по дефиницији) ефективно. Она ће нам бити од практичне користи јер ће се тиме суштински само² смањити димензија амбијенталног простора у ком ће се наш момент граф налазити, самим тиме ће и претходно поменути релације бити једноставније.

Пре него што кренемо с примерима, треба напоменути да ће сви простори у овом поглављу, опремљени с одговарајућим торусним дејством, задовољавати услове 1) и 2) теореме 2.4.2.

3.1 Комплексна пројективна равна $\mathbb{CP}^2$

Како дејство $(S^1)^3 \curvearrowright^\varphi \mathbb{CP}^2$ из примера 2.1.2 није ефективно (елементи облика (z, z, z) дејствују тривијално), ми ћемо зарад једноставности рачуна посматрати редуковано дејство $\widehat{T} \cong (S^1)^2 \curvearrowright^{\widehat{\varphi}} \mathbb{CP}^2$, где $(z_1, z_2) \in (S^1)^2$ дејствује по правилу

$$(x_1 : x_2 : x_3) \xrightarrow{(z_1, z_2)} (x_1 : z_1 x_2 : z_2 x_3).$$



Видели смо раније да су момент графови комплексних пројективних простора $\mathbb{CP}^n$ заправо симплекси, што ће бити случај и овде. Релације које читамо са момент графа овог „редукованог” дејства можемо видети на слици 3.1.

Сада ћемо и да одредимо релације и генераторе еквиваријантне кохомологије $H_{(S^1)^2}^*(\mathbb{CP}^2)$. Ако су $p_1, p_2, p_3 \in \text{Sym}(t^*) \cong \mathbb{R}[t_1, t_2]$, тада нам теорема 2.4.2 говори да важе релације

Слика 3.1: Момент граф $\mathcal{G}((S^1)^2 \curvearrowright \mathbb{CP}^2)$.

$$p_1 - p_2 \in \langle t_1 \rangle, \quad p_3 - p_1 \in \langle t_2 \rangle, \quad p_3 - p_2 \in \langle t_2 - t_1 \rangle.$$

На основу ових релација, можемо да одаберемо произвољне $p_1, q_1 \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$ и да поставимо да је $p_2 = p_1 + t_1 q_1$. Аналогно, из друге релације видимо да је $p_3 = p_1 + t_2 q_2$, где је $q_2 \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$. Ипак, због треће релације, q_2 ће задовољавати неке додатне услове. Наиме, из претходне дискусије следи да је $t_2 q_2 - t_1 q_1 = p_3 - p_1 \in \langle t_2 - t_1 \rangle$, а како је $\langle t_2 - t_1 \rangle$ идеал, одавде можемо да закључимо да постоји $q \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$ такво да је $q_2 = q_1 + (t_2 - t_1)q$. Самим тиме је

$$H_{(S^1)^2}^*(\mathbb{CP}^2) \cong \left\{ (p_1, p_1 + t_1 q_1, p_1 + t_2(q_1 + (t_2 - t_1)q)) \mid p_1, q_1, q \in \mathbb{R}[t_1, t_2] \right\}. \quad (3.2)$$

²Како елементи из $\text{ker}(\varphi)$ тривијално дејствују на M , 1-скелети дјестава $T \curvearrowright^\varphi M$ и $\widehat{T} \curvearrowright^{\widehat{\varphi}} M$ ће бити исти, па се гране одговарајућег тополошког графа у основи момент графа се неће променити.

Што се структуре множење тиче, знамо да је оно заправо множење по координатама елемената из 3.2, па можемо једноставно да одредимо и структуру прстена $H_{(\mathbb{S}^1)^2}^*(\mathbb{CP}^2)$. Еквиваријантна кохомологија $H_{(\mathbb{S}^1)^2}^*(\mathbb{CP}^2)$ је као $\mathbb{R}[t_1, t_2]$ модул генерисан елементима $(1, 1, 1)$, $u = (0, t_1, t_2)$ и $v = (0, 0, t_2(t_2 - t_1))$. Може да се покаже да важе релације

$$u^2 = t_1 u + v, \quad \text{и} \quad u^3 = (t_1 + t_2)u^2 - t_1 t_2 u,$$

односно, да је

$$H_{(\mathbb{S}^1)^2}^*(\mathbb{CP}^2) \cong \mathbb{R}[t_1, t_2, u] / \langle u(u - t_1)(u - t_2) \rangle, \quad (3.3)$$

где су степени генератора $\deg(t_1) = \deg(t_2) = \deg(u) = 2$.

Реконструкција обичне кохомологије $H^*(\mathbb{CP}^2)$

Сада можемо и једноставно да одредимо кохомолошки прстен $H^*(\mathbb{CP}^2)$. Како је по теорему 2.4.1

$$H^*(\mathbb{CP}^2) \cong \frac{H_{(\mathbb{S}^1)^2}^*(\mathbb{CP}^2)}{I \cdot H_{(\mathbb{S}^1)^2}^*(\mathbb{CP}^2)},$$

генератор $x \in H^*(\mathbb{CP}^2)$ одговара генератору $u \in H_{(\mathbb{S}^1)^2}^*(\mathbb{CP}^2)$, док релације у $H^*(\mathbb{CP}^2)$ читамо из одговарајућих релација у 3.2 тако што поставимо све $t_i = 0$, па добијамо добро познату чињеницу да је

$$H^*(\mathbb{CP}^2) \cong \mathbb{R}[x] / \langle x^3 \rangle, \quad \deg(x) = 2.$$

3.2 Многострукост комплетних застава $Fl(1, 2, 3; \mathbb{C}^3)$

Дефиниција 3.2.1. Нека је V (комплексни) n -димензионални векторски простор. Низ $V_\bullet$ угњеждених векторских потпростора

$$0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_k = V$$

називамо *заставом*. Нека је $d_i = \dim(V_i)$, где је $i = \overline{1, k}$, тада ћемо рећи да је застава $V_\bullet$ *сигнатуре* $(d_1, d_2, \dots, d_k)$. Ако је застава $V_\bullet$ сигнатуре $(1, 2, \dots, n)$, онда кажемо да је *комплетна*, а у супротном кажемо да је *парцијална*.

Један нама добро познат пример парцијалне заставе је застава $l_\bullet = \{l \subseteq \mathbb{C}^n\}$ сигнатуре $(1, n)$. Како је колекција свих таквих застава заправо $\mathbb{CP}^n$, поставља се природно питање да ли колекција свих застава $Fl(d_1, d_2, \dots, d_k; \mathbb{C}^n)$ сигнатуре $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ има структуру глатке многострукости? Одговор је да, и по коментару после теореме о орбити и стабилизатору 1.1.1, моћи ћемо да дамо елегантан опис глатке структуре. Како за сваки векторски потпростор V_i можемо да нађемо ортонормирану базу $v_1, \dots, v_{d_i}$,

где је $d_i = \dim(V_i)$, можемо да уочимо да унитарна група $U(n)$ дејствује (слева) на $Fl(d_1, d_2, \dots, d_k; \mathbb{C}^n)$ тако што матрица $U \in U(n)$ дејствује по правилу

$$V_\bullet = \{\langle v_1, \dots, v_{d_1} \rangle \preceq \langle v_1, \dots, v_{d_2} \rangle \preceq \dots \preceq \langle v_1, \dots, v_{d_k} \rangle\} \xrightarrow{U} \{\langle Uv_1, \dots, Uv_{d_1} \rangle \preceq \langle Uv_1, \dots, Uv_{d_2} \rangle \preceq \dots \preceq \langle Uv_1, \dots, Uv_{d_k} \rangle\} = UV_\bullet.$$

Такође се једноставно види да је дејство $U(n) \curvearrowright Fl(d_1, d_2, \dots, d_k; \mathbb{C}^n)$ транзитивно. Штавише, испоставља се да је ово дејство глатко, па можемо да гледамо многострукости парцијалних застава као хомогене просторе

$$Fl(d_1, d_2, \dots, d_k; \mathbb{C}^n) \approx U(n)/\text{Stab}_{E_\bullet} = U(n)/(U(d_1) \times U(d_2 - d_1) \times \dots \times U(d_k - d_{k-1})),$$

где је $E_\bullet = \{E_{d_1} \preceq E_{d_2} \preceq \dots \preceq E_{d_k} = \mathbb{C}^n\}$, а $E_{d_i} = \langle e_1, \dots, e_{d_i} \rangle$. У случају комплетних застава, добијамо *многострукости комплетних застава* $Fl(1, 2, \dots, n; \mathbb{C}^n)$.

Пре него што преусмеримо пажњу на многострукости комплетних застава, у овом тренутку је добро напоменути да су нам од великог значаја и многострукости застава сигнатуре (k, n) , тј. простор свих k -димензионалних равни у $\mathbb{C}^n$, познатији као комплексни *Грасманијан* $Gr(k, n) = U(n)/(U(k) \times U(n - k))$. О овим просторима ћемо причати детаљније убрзо.

Дејство торуса $T \curvearrowright Fl(1, 2, \dots, n; \mathbb{C}^n)$

Код многострукости комплетних застава $Fl(1, 2, \dots, n; \mathbb{C}^n)$ доста је згодно представљати заставу $V_\bullet = \{\langle v_1 \rangle \preceq \langle v_1, v_2 \rangle \preceq \dots \preceq \langle v_1, \dots, v_n \rangle\}$ преко матрице

$$V = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \in U(n)$$

јер тако можемо да задамо дејство торуса $T = (\mathbb{S}^1)^n$ тако што $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in T$ дејствује по правилу

$$V \xrightarrow{z} \begin{pmatrix} z_1 & & & \\ & z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & z_n \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} z_1^{-1} & & & \\ & z_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & z_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Еквиваријантна кохомологија $H_{(\mathbb{S}^1)^2}^*(Fl(1, 2, 3; \mathbb{C}^3))$

Ако са $(\mathbb{S}^1)^3 \curvearrowright^\varphi Fl(1, 2, 3; \mathbb{C}^3)$ обележимо дејство из претходног дела текста (за $n = 3$), онда ћемо се у овом делу фокусирати на ефективно дејство $(\mathbb{S}^1)^3/\ker(\varphi) \cong (\mathbb{S}^1)^2 \curvearrowright Fl(1, 2, 3; \mathbb{C}^3)$ које нам је дато са

$$V \xrightarrow{z} \begin{pmatrix} z_1 & & \\ & 1 & \\ & & z_2 \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} z_1^{-1} & & \\ & 1 & \\ & & z_2^{-1} \end{pmatrix},$$

где је $z = (z_1, z_2) \in (\mathbb{S}^1)^2$.

Ако је V матрица заставе која је фиксна при дејству торуса, онда може да се покаже да у првој колони матрице V може само да се појави једна ненула координата $v_{w_1,1}$. Како матрица V представља једну заставу, можемо да обезбедимо да су све координате десно од $v_{w_1,1}$ нула, без да мењамо заставу коју представља. Штавише, можемо да аргументујемо да у другој колони постоји само једна ненула координата $v_{w_2,2}$ и да је координата $v_{w_2,3} = 0$. Тиме нам остаје само једна ненула координата $v_{w_3,3}$ у трећој колони. Ова дискусија нам говори да су све заставе које су фиксирани при дејству торуса $(\mathbb{S}^1)^2$ представљене *пермутационим матрицама формата* 3×3 .

Сличним резонам као у претходном пасусу, можемо да закључимо да се сви балони између фиксних тачака дејства $(\mathbb{S}^1)^2 \curvearrowright Fl(1, 2, 3; \mathbb{C}^3)$ могу представити матрицама које су налик пермутационим, с тиме што имају још једну координату $a \in \hat{\mathbb{C}}$ која се налази са леве стране ненула координата пермутационе матрице (видети слику 3.2).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Слика 3.2: Матрице које параметризују све балоне дејства $(\mathbb{S}^1)^2 \curvearrowright Fl(1, 2, 3; \mathbb{C}^3)$, где је $a \in \hat{\mathbb{C}}$.

Намеће се природно питање које ли су фиксне тачке повезане балонима, а које нису. Фиксне тачке унутар балона B добијамо као „северни” и „јужни” пол Риманове сфере $B \approx \hat{\mathbb{C}}$, односно када је $a = 0$ и када пустимо да $a \rightarrow \infty$, па ћемо на примеру једне од матрица из 3.2 илустровати како се одређују. У случају балона који је представљен матрицом

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

када поставимо да је $a = 0$, добијамо пермутациону матрицу

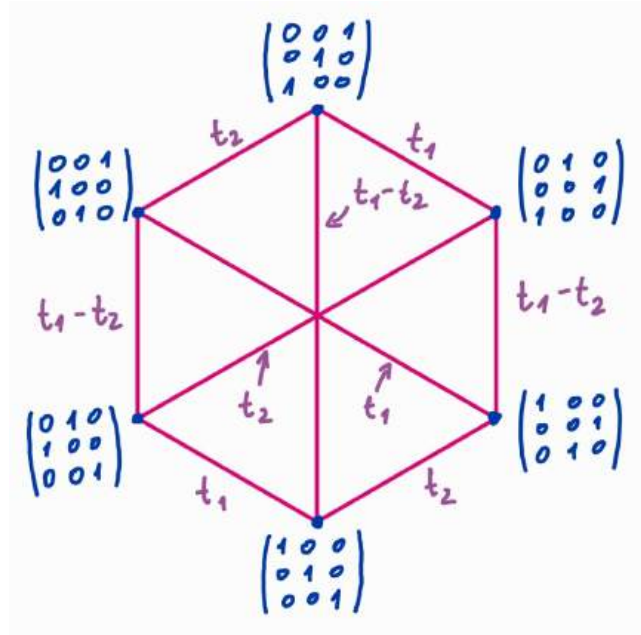
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С друге стране, када пустимо да $a \rightarrow \infty$, добијамо матрицу

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\longleftrightarrow \langle ae_1 + e_3 \rangle \preceq \langle ae_1 + e_3, e_2 \rangle \preceq \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \\ &= \langle e_1 + a^{-1}e_3 \rangle \preceq \langle e_1 + a^{-1}e_3, e_2 \rangle \preceq \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \\ &\xrightarrow{a \rightarrow \infty} \langle e_1 \rangle \preceq \langle e_1, e_2 \rangle \preceq \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Испоставиће се да су две пермутационе матрице P_1 и P_2 повезане балоном ако и само ако можемо да добијемо матрицу P_1 тако што применимо неку транспозицију $[i, j]$ на векторе колоне матрице P_2 .³

Коњуговањем једне од матрица из 3.2 дијагоналном матрицом $\text{diag}(z_1, 1, z_2)$ можемо да одредимо вектор усмерења који одговара дотичном балону (видети 3.3).



Слика 3.3: Момент граф $\mathcal{G}((\mathbb{S}^1)^2) \curvearrowright Fl(1, 2, 3; \mathbb{C}^3)$.

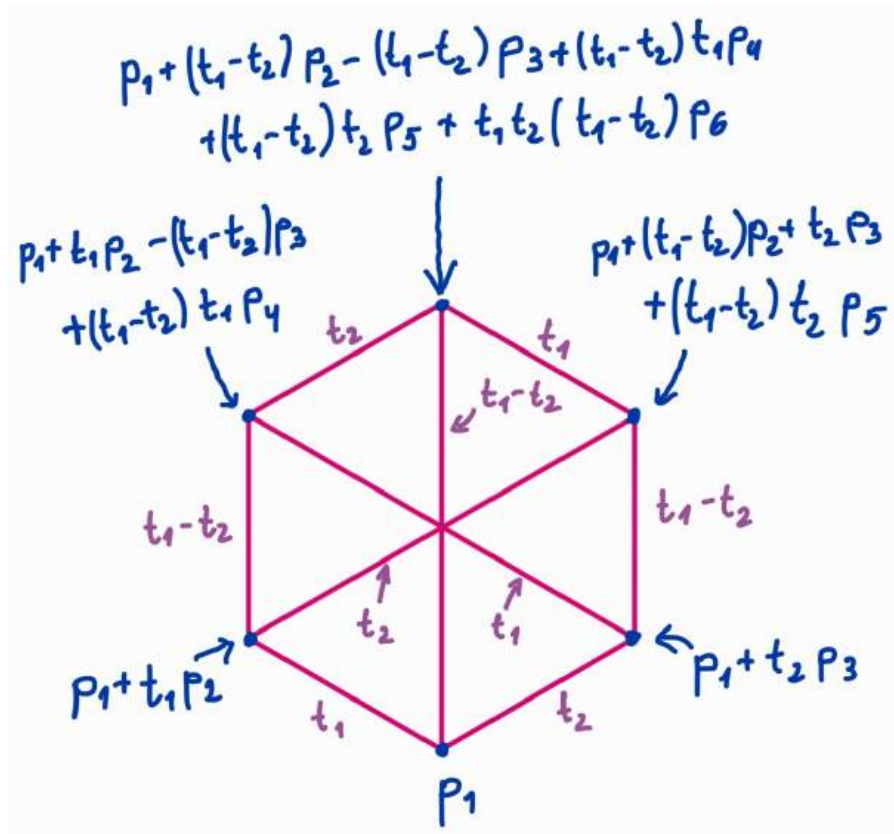
Остаје нам још да одредимо генераторе $H_{(\mathbb{S}^1)^2}^*(Fl(1, 2, 3; \mathbb{C}^3))$, посматраног као модул над $\text{Sym}(\mathfrak{t}^*) \cong \mathbb{R}[t_1, t_2]$. Ако кренемо од најнижег темена на слици 3.3 и обележимо га

³У случају претходног примера, транспозиција вектора колоне је $[1, 3]$.

са произвољним полиномом $p_1 \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$, онда лако можемо да видимо да ће наредна два темена по висини бити обележена полиномима $p_1 + t_1 p_2$ и $p_1 + t_2 p_3$, за неке полиноме $p_2, p_3 \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$ (слика 3.4). Затим, ако посматрамо наредна два темена по висини, оба „затварају циклус”, па ће одговарајући полиноми бити одређени новим двома релацијама. Примера ради, ако посматрамо теме изнад темена обележеног полиномом $p_1 + t_1 p_2$, то теме можемо да обележимо полиномом облика $p_1 + t_1 p_2 + (t_1 - t_2)q$, јер тиме што се „померамо” вертикално дуж ивице обележене са $t_1 - t_2$ намећемо услов да разлика одговарајућих полинома припада идеалу $\langle t_1 - t_2 \rangle$. С друге стране, како ово теме „затвара циклус”, ивица обележена са t_2 нам намеће додатни услов

$$(p_1 + t_1 p_2 + (t_1 - t_2)q) - (p_1 + t_2 p_3) \in \langle t_1 \rangle,$$

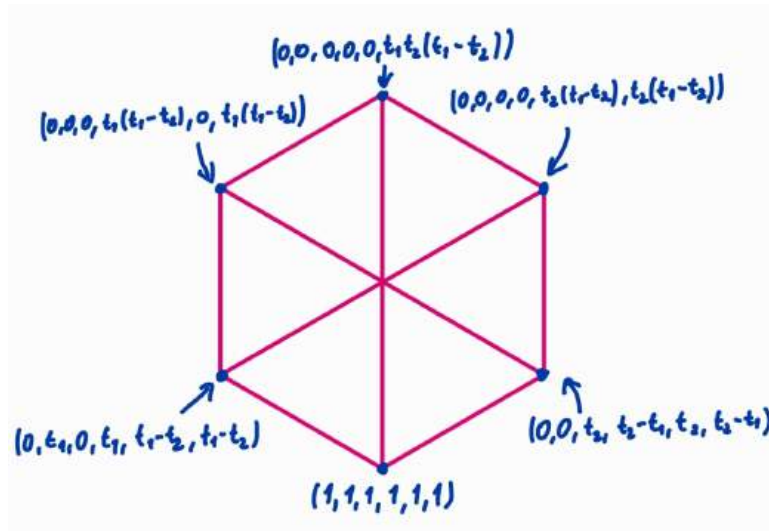
односно да је $t_2(q + p_3) \in \langle t_1 \rangle$. Одавде видимо да је $q = t_1 p_4 - p_3$, за неко $p_4 \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$. Сличним резоним можемо да одредимо и одговарајуће полиноме преостала два темена, с тиме што код највишег темена имамо три релације које нам одређују како изгледа одговарајући полином (видети слику 3.4).



Слика 3.4: „Графички” приказ еквиваријантне кохомологије $H_{(\mathbb{S}^1)^2}^*(Fl(1, 2, 3; \mathbb{C}^3))$.

Листу генератора⁴ кохомолошког *џрсиџена* $H_{(\mathbb{S}^1)^2}^*(Fl(1, 2, 3; \mathbb{C}^3))$ можете видети на слици 3.5.

⁴Наведени генератори се могу добити од генератора са слике 3.4 преко елементарних операција.

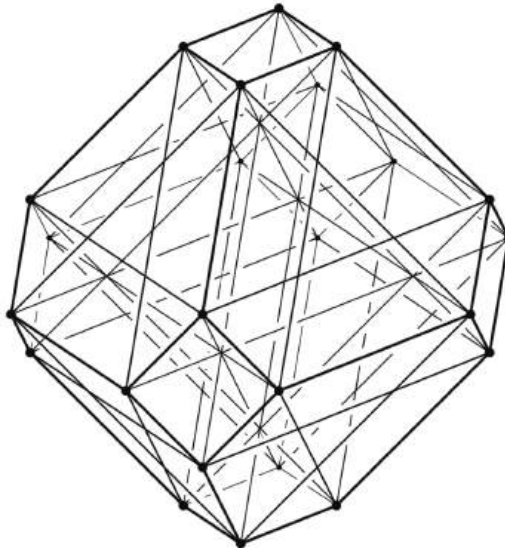
Слика 3.5: Генератори прстена $H_{(\mathbb{S}^1)^2}^*(Fl(1, 2, 3; \mathbb{C}^3))$.

Због рачунске сложености одређивања релација између наведених генератора, нећемо извести експлицитан опис множења у прстену $H_{(\mathbb{S}^1)^2}^*(Fl(1, 2, 3; \mathbb{C}^3))$ (као што смо у поглављу 3.1). О томе можете више прочитати у [16].

Коментар. Испоставиће се да ће момент графови $\mathcal{G}((\mathbb{S}^1)^n \curvearrowright Fl(1, 2, \dots, n; \mathbb{C}^n))$ живети у *пермутоедру*, политопу који се добија као конвексни омотач

$$P_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{conv}(\{(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)}) \mid \sigma \in S_n\}),$$

где су сви $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ међусобно различити.⁵ О овим момент графовима и о пермутоедринама можете више наћи у [19] и [21].

Слика 3.6: Момент граф $\mathcal{G}(T \curvearrowright Fl(1, 2, 3, 4; \mathbb{C}^4))$.

⁵Прецизније, момент граф ће бити 1-скелет пермутоедра с додатним ивицама у унутрашњости пермутоедра. Две темена p_1 и p_2 су повезана ивицом ако и само ако можемо координате темена p_1 да добијемо од координата темена p_2 тако што применимо неку транспозицију $[i, j]$.

3.3 Грасманијан $Gr(2, 4)$

Пликерово улагање Грасманијана $Gr(k, n)$

Елементе Грасманијана $V \in Gr(k, n)$ доживљавамо као k -димензионалне векторске потпросторе унутар простора $\mathbb{C}^n$, па је природно да их представимо као линеарни омотаче $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$, где су v_i , за $i = \overline{1, k}$, линеарно независни вектори унутар простора V . Ово нам је корисно при увођењу *Пликеровог улагања*

$$Gr(k, n) \xrightarrow{\iota} \mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n) \quad V = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle \mapsto [v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k],$$

где нам заграде $[-]$ обележавају класу еквиваленције у $\mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$. Ово пресликавање нам је битно јер може да се покаже да је заиста улагање унутар пројективног простора и да тачке унутар слике $\iota(Gr(k, n))$ задовољавају систем хомогених квадратних полиномијалних једначина зване *Пликерове релације* (видети [7]). Можемо да видимо најједноставнији пример Пликерових релација на делу у случају Грасманијана $Gr(2, 4)$. Ако поистоветимо $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ с правоугаоном матрицом

$$\begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & v_{1,3} & v_{1,4} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & v_{2,3} & v_{2,4} \end{pmatrix}$$

и ако са $\Delta_{ij} = \det \begin{pmatrix} v_{1,i} & v_{1,j} \\ v_{2,i} & v_{2,j} \end{pmatrix}$ обележимо такозване *Пликерове координате* простора V , тада сваком $V \in Gr(2, 4)$ одговара тачка $\iota(V) = (\Delta_{12} : \Delta_{31} : \Delta_{14} : \Delta_{34} : \Delta_{24} : \Delta_{23})$ чије координате задовољавају релацију

$$\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{31}\Delta_{24} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 0.$$

Одавде видимо да можемо да поистоветимо Грасманијан $Gr(2, 4)$ с квадриком $Q_4 \subseteq \mathbb{CP}^5$, што ће нам олакшати рад у одређивању еквиваријантне кохомологије $H_{(\mathbb{S}^1)^3}^*(Gr(2, 4))$.

Дејство торуа $T \curvearrowright Gr(k, n)$

Како је Грасманијан $Gr(k, n)$ многострукост застава сигнатуре (k, n) , дејство торуа $T = (\mathbb{S}^1)^n \curvearrowright^\varphi Gr(k, n)$ је исто оно дејство које смо видели и у 3.2. Како оно није ефективно, ми ћемо се фокусирати на ефективно дејство $(\mathbb{S}^1)^n / \ker(\varphi) \cong (\mathbb{S}^1)^{n-1} \curvearrowright^{\hat{\varphi}} Gr(k, n)$.

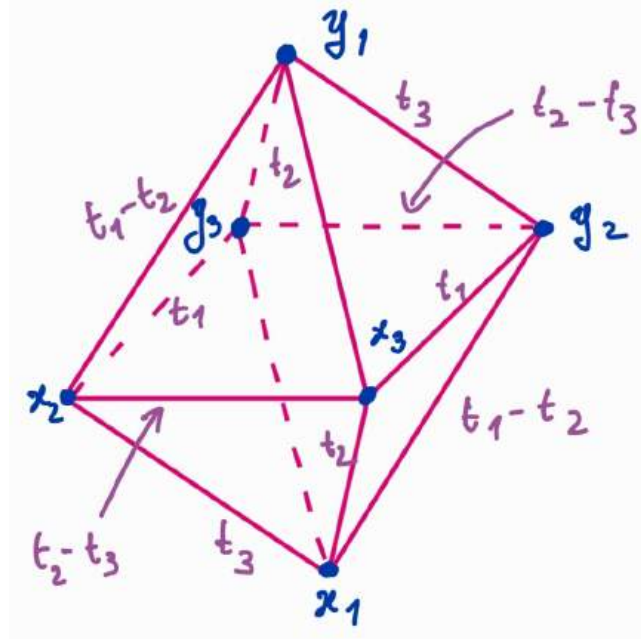
Мада јесте природно, дејство дато у овом облику је доста незахвално за рачун. Ипак, у случају Грасманијана $Gr(2, 4)$, дејство $(\mathbb{S}^1)^3 \curvearrowright Gr(2, 4)$ можемо да запишемо преко Пликерових координата $(x_1 : x_2 : x_3 : y_1 : y_2 : y_3)$ на наредни, релативно једноставан начин:

$$(z_1, 1, 1) \cdot (x_1 : x_2 : x_3 : y_1 : y_2 : y_3) = (z_1 x_1 : z_1 x_2 : z_1 x_3 : y_1 : y_2 : y_3),$$

$$(1, z_2, 1) \cdot (x_1 : x_2 : x_3 : y_1 : y_2 : y_3) = (z_2 x_1 : z_2 x_2 : x_3 : y_1 : y_2 : z_2 y_3),$$

$$(1, 1, z_3) \cdot (x_1 : x_2 : x_3 : y_1 : y_2 : y_3) = (z_3 x_1 : x_2 : z_3 x_3 : y_1 : z_3 y_2 : y_3).$$

Како је резон у одређивању момент графа $\mathcal{G}((\mathbb{S}^1)^3 \curvearrowright Gr(2, 4))$ доста сличан резону код примера 2.1.3, остављамо дотично одређивање као вежбу читаоцу (видети слику 3.7).



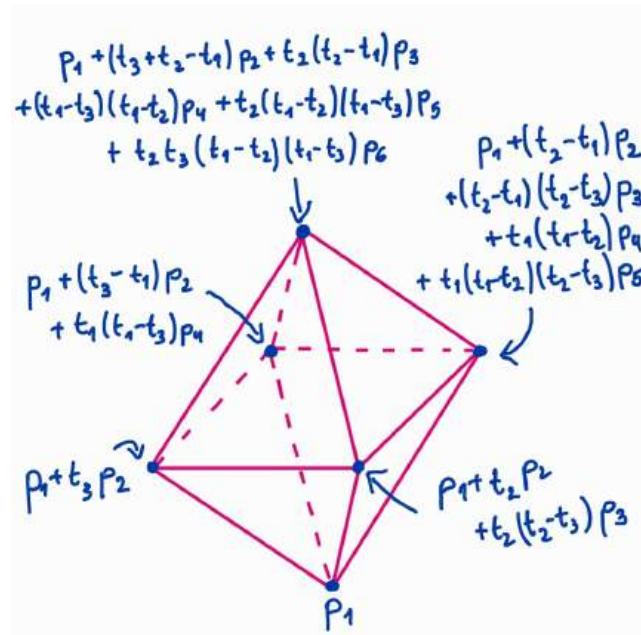
Слика 3.7: Момент граф $\mathcal{G}((\mathbb{S}^1)^3 \curvearrowright Gr(2, 4))$. Темена x_i и y_i одговарају тачкама чија је баш та координата 1, док су све остале 0.

Еквиваријантна кохомологија $H_{(\mathbb{S}^1)^3}^*(Gr(2, 4))$

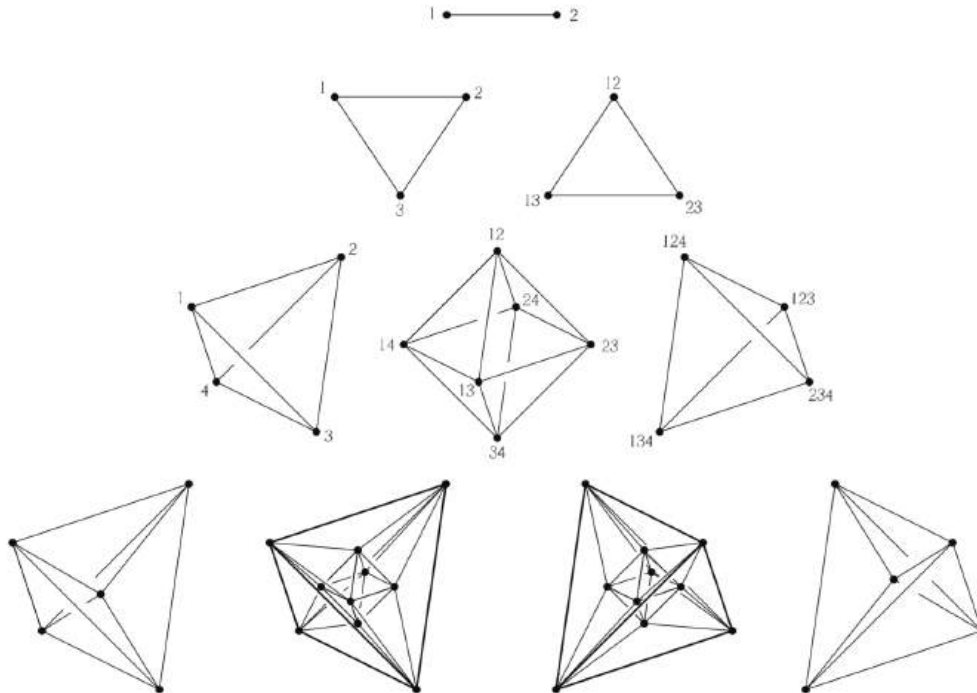
Ако кренемо од најнижег темена x_1 на слици 3.7, можемо да га обележимо са произвољним полиномом $p_1 \in \text{Sym}(\mathfrak{t}^*) \cong \mathbb{R}[t_1, t_2, t_3]$. Слично као у 3.1, тачку x_2 можемо да обележимо са полиномом $p_1 + t_3 p_2$, где је $p_2 \in \mathbb{R}[t_1, t_2, t_3]$. До темена x_3 можемо доћи тако што се, на ивицама момент графа, „померимо” десно дуж ивице обележене са $t_2 - t_3$ почевши од темена $p_1 + t_3 p_2$ или тако што се „померимо” горе дуж ивице обележене са t_2 почевши од темена p_1 . Због прве наведене релације ћемо x_3 обележити са полиномом $p_1 + t_3 p_2 + (t_2 - t_3)q$, где је $q \in \mathbb{R}[t_1, t_2, t_3]$, а због друге знамо да мора да важи $t_3 p_2 + (t_2 - t_3)q \in \langle t_2 \rangle$. То даље повлачи са собом да је $q = p_2 + t_2 p_3$, где је $p_3 \in \mathbb{R}[t_1, t_2, t_3]$.

Ако пажљиво испратимо све које релације су нам наметнуте од стране ивица момент графа на полиноме које придружујемо теменима истог, добићемо наредне генераторе $H_{(\mathbb{S}^1)^3}^*(Gr(2, 4))$, посматраног као модул над $\mathbb{R}[t_1, t_2, t_3]$ (видети слику 3.8).

Као и у случају претходног поглавља 3.2, због велике рачунске сложености нећемо извести експлицитан опис множења у прстену $H_{(\mathbb{S}^1)^3}^*(Gr(2, 4))$. О томе можете више да прочитате у [20].

Слика 3.8: Графички приказ еквиваријантне кохомологије $H_{(\mathbb{S}^1)^3}^*(Gr(2, 4))$.

Коментар. Испоставиће се да ће момент графови $\mathcal{G}((\mathbb{S}^1)^n \curvearrowright Gr(k, n))$ бити 1-скелети хиперсимплекса Δ_k^n , што је фамилија политопа која се добија тако што се посматра пресек између n -димензионалне коцке $[0, 1]^n$ и хиперравни задане једначином $v_1 + v_2 + \dots + v_n = i$, где је $i = \overline{1, n-1}$. Више о овим момент графовима и о хиперсимплексима можете наћи у [19] и [8].

Слика 3.9: „Паскалов троугао” хиперсимплекса, где се хиперсимплекс Δ_k^n се налази на позицији $(k, n-1)$.

*Вода је попила у себе све
што се могло претворити у шалас
Ана Ристовић, Ошчаравање*

Библиографија

- [1] David Anderson and William Fulton. *Equivariant Cohomology in Algebraic Geometry*, volume 210. Cambridge University Press, 2023.
- [2] Victor Buchstaber and Taras Panov. Toric topology. <https://arxiv.org/abs/1210.2368>, 2014.
- [3] David A Cox, John B Little, and Henry K Schenck. *Toric varieties*, volume 124. American Mathematical Society Providence, RI, 2011.
- [4] Ana Cannas da Silva. Lectures on symplectic geometry. *Lecture Notes in Mathematics*, 1764, 2001.
- [5] Ana Cannas da Silva. Symplectic toric manifolds. *Symplectic geometry of integrable Hamiltonian systems (Barcelona, 2001)*, *Adv. Courses Math. CRM Barcelona*, pages 85–173, 2003.
- [6] Matthias Franz and Volker Puppe. Exact cohomology sequences with integral coefficients for torus actions. *Transformation Groups*, 12(1):65–76, 2007.
- [7] William Fulton. *Young tableaux: with applications to Representation theory and Geometry*. Cambridge University Press, 1997.
- [8] Israel M Gelfand and Robert D MacPherson. Geometry in Grassmannians and a generalization of the dilogarithm. *Advances in mathematics*, 44(3):279–312, 1982.
- [9] Mark Goresky, Robert Kottwitz, and Robert MacPherson. Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem. *Inventiones mathematicae*, 131(1):25–84, 1998.
- [10] Victor Guillemin and Catalin Zara. Equivariant de Rham Theory and Graphs. <https://arxiv.org/abs/math/9808135>, 1998.
- [11] Victor Guillemin and Catalin Zara. One-skeleta, Betti numbers and equivariant cohomology. <https://arxiv.org/abs/math/9903051>, 2000.
- [12] Victor Guillemin and Catalin Zara. G-actions on graphs. *International Mathematics Research Notices*, 2001(10):519–542, 2001.

- [13] Victor Guillemin and Catalin Zara. The existence of generating families for the cohomology ring of a graph. *Advances in Mathematics*, 174(1):115–153, 2003.
- [14] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [15] Julianna S. Tymoczko. An introduction to equivariant cohomology and homology, following Goresky, Kottwitz, and MacPherson. <https://arxiv.org/abs/math/0503369>, 2005.
- [16] Shizuo Kaji. Three presentations of torus equivariant cohomology of flag manifolds. <https://arxiv.org/abs/1504.01091>, 2015.
- [17] Alexander A Kirillov. *An introduction to Lie groups and Lie algebras*, volume 113. Cambridge University Press, 2008.
- [18] Shintarô Kuroki. Introduction to GKM theory. *Science and Technology*, 63179:0063179, 2009.
- [19] Robert MacPherson. Equivariant invariants and linear geometry. *Geometric combinatorics*, 13:317–388, 2007.
- [20] Alexandre Minets. Equivariant methods in Representation theory. <https://aminets.me/teaching/notes/equivariant-methods.pdf>, 2025.
- [21] Alexander Postnikov. Permutohedra, associahedra, and beyond. <https://arxiv.org/abs/math/0507163>, 2005.
- [22] Norman Earl Steenrod. *The topology of fibre bundles*, volume 14. Princeton university press, 1999.
- [23] Loring W Tu. *Introductory Lectures on Equivariant Cohomology:(AMS-204)*. Princeton University Press, 2020.
- [24] Siniša Vrećica. *Konveksna analiza*. Matematički fakultet, 1999. Tiraž 300 Bibliografija: str. 127 Registar.
- [25] Frank W Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie groups*, volume 94. Springer Science & Business Media, 1983.