

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Антоније Суботић

ДИСКРЕТНА И АЛГЕБАРСКА ТЕОРИЈА  
МОРСА

мастер рад

Београд, 2026.

**Ментор:**

др Марија Јелић Милутиновић, доцент  
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Чланови комисије:**

проф. др Бранислав Првуловић, редовни професор  
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Ђорђе Баралић, научни саветник  
Математички институт САНУ, Београд

**Датум одбране:** \_\_\_\_\_

# Садржај

|                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Увод</b>                                                        | <b>1</b>  |
| <b>1 Преглед глатке Морсове теорије</b>                            | <b>3</b>  |
| 1.1 Основне дефиниције и тврђења . . . . .                         | 3         |
| 1.2 Псеудо-градијентна векторска поља . . . . .                    | 6         |
| 1.3 Декомпозиција на ручке . . . . .                               | 8         |
| 1.4 Структурне теореме . . . . .                                   | 9         |
| <b>2 Дискретна теорија Морса</b>                                   | <b>11</b> |
| 2.1 Основне дефиниције . . . . .                                   | 11        |
| 2.2 Дискретна векторска поља . . . . .                             | 16        |
| 2.3 Поглед из угла комбинаторне топологије . . . . .               | 20        |
| 2.4 Ћелијска колапсирања . . . . .                                 | 21        |
| 2.5 Тополошке последице . . . . .                                  | 24        |
| 2.6 Морсова хомологија . . . . .                                   | 28        |
| 2.7 Примене . . . . .                                              | 34        |
| <b>3 Веза глатке и дискретне Морсове теорије</b>                   | <b>41</b> |
| 3.1 Симплицијални комплекси . . . . .                              | 42        |
| 3.2 PL-многострукости . . . . .                                    | 44        |
| 3.3 PL-триангулација глатких многострукости . . . . .              | 44        |
| 3.4 Разложиви и ендоколапсибилни симплицијални комплекси . . . . . | 45        |
| 3.5 Индукована дискретна Морсова функција . . . . .                | 46        |
| 3.6 PL-вектори дискретних функција и ручки . . . . .               | 50        |
| <b>4 Алгебарска теорија Морса</b>                                  | <b>52</b> |
| 4.1 Упаривања и расцепљујућа хомотопија . . . . .                  | 52        |
| 4.2 Доказ главне теореме . . . . .                                 | 56        |
| 4.3 Опис граничног оператора . . . . .                             | 59        |
| 4.4 Примене . . . . .                                              | 61        |
| <b>Библиографија</b>                                               | <b>70</b> |

# Увод

Класична теорија Морса представља моћан математички алат који посматрањем реално–вредносних функција на многострукостима пружа информације о њиховим глобалним тополошким карактеристикама. Морсова теорија је коришћена у доказима кључних резултата у области диференцијалне топологије, попут теореме о  $h$ -кобордизму и уопштене Поенкареове хипотезе за димензије веће од четири [28, 36]. Идеје Морсове теорије су прилагођене у контексту CW-комплекса (дискретна теорија Морса) и ланчастих комплекса (алгебарска теорија Морса), што овај рад има за циљ да прикаже.

Прва глава покрива основе глатке теорије Морса и првенствено има улогу да уведе појмове и резултате који мотивишу дискретну и алгебарску теорију. Након основних дефиниција, наводимо везу између критичних тачака Морсове функције и хомотопског типа многострукости, као и њихову улогу у декомпозицији многострукости на ручке.

У другој глави излажемо основе дискретне теорије Морса коју је Форман развио као комбинаторни аналогон класичне теорије у [17]. Дефинишемо дискретне Морсове функције и дискретна градијентна векторска поља, а затим показујемо како критичне ћелије одређују хомотопски тип CW-комплекса. Уводимо и дискретну Морсову хомологију и указујемо на сличност са глатком Морсовом хомологијом. На крају главе илуструјемо примену теорије кроз два примера: одређивање хомотопског типа комплекса неповезаних графова и доказ Даукерове теореме.

Трећа глава има за циљ да повеже глатку и дискретну теорију. Најпре наводимо резултат Галаија [19] који је послужио као мотивација Бенедетију [9] да, у нешто општијем контексту од Галаија, покаже како се полазећи од Морсове функције на глаткој многострукости може на природан начин конструисати дискретна Морсова функција на одређеној триангулацији многострукости. Таква дискретна Морсова функција у свакој димензији има једнак

број критичних ћелија као што полазна Морсова функција има критичних тачака. Након тога детаљно излажемо доказ Бенедетијевог резултата.

У четвртој глави прелазимо на алгебарску теорију Морса. Теорију су независно развили Сколдберг [35] и Јоленбек и Велкер [24]. Уместо CW-комплекса, основни објекти су ланчasti комплекси модула. Уводимо појам Морсовог упаривања помоћу ког дефинишемо критичне модуле – објекте који играју улогу критичних тачака, односно ћелија, у глатком, односно дискретном случају. Показујемо да хомологија ланчастог комплекса зависи само од критичних модула. Значај претходног илуструјемо кроз примере у којима израчунавамо хомологију фамилије одређених ланчastих комплекса.

# Глава 1

## Преглед глатке Морсове теорије

У овој глави уводимо основне појмове и тврђења глатке Морсове теорије. Као главне референце користимо књиге [27] и [32], у којима се налазе детаљни докази резултата које наводимо у наставку.

### 1.1 Основне дефиниције и тврђења

Нека је  $M$  глатка  $n$ -димензионална многострукост, за  $n \in \mathbb{N}$ , и нека је  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  глатка функција.

**Дефиниција 1.1.1.** За тачку  $p \in M$  кажемо да је критична тачка функције  $f$  уколико је  $df(p) = 0$ .

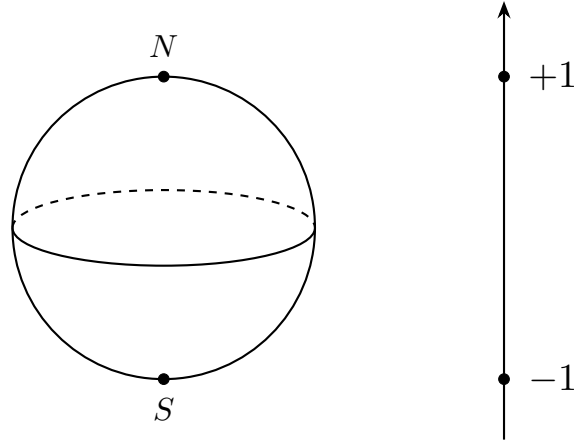
Уколико је  $p$  критична тачка функције  $f$ , а  $(x_1, \dots, x_n)$  локалне координате у околини тачке  $p$ , тада важи:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0, i = 1, \dots, n.$$

Критичној тачки  $p$  придружујемо билинеарну форму  $H_f(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , задату са:

$$H_f(p)(X_p, Y_p) = X_p(Y(f)),$$

где је  $Y$  произвољно глатко векторско поље на  $M$ , такво да је у тачки  $p$  једнако баш  $Y_p$ . Такву форму називамо *хесијаном* функције  $f$  у тачки  $p$ . Лако се може показати да је  $H_f(p)$  симетрична форма, као и да дефиниција не зависи од избора поља  $Y$ .



Слика 1.1: Функција висине на сфери

У локалним координатама  $(x_1, \dots, x_n)$ , у околини тачке  $p$ , хесијан је задат матрицом других парцијалних извода

$$(H_f(p))_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p).$$

**Дефиниција 1.1.2.** За критичну тачку  $p \in M$  кажемо да је недегенерисана уколико је  $H_f(p)$  недегенерисана форма, односно за сваки ненула тангентни вектор  $X_p \in T_p M$  постоји  $Y_p \in T_p M$  тако да важи  $H_f(p)(X_p, Y_p) \neq 0$ .

**Дефиниција 1.1.3.** Функција  $f$  је Морсова уколико јој је свака критична тачка недегенерисана.

**Пример 1.1.1.** Функција висине на сфери, односно  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  дава са  $f(x, y, z) = z$ , јесте Морсова функција (слика 1.1). Критичне тачке функције су северни и јужни пол. На пример, у околини тачке  $N = (0, 0, 1)$  функција се може у карти са координатама  $(x, y)$  задати као

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Матрица хесијана у тачки  $(0, 0, 1)$  је  $-I$ , где  $I$  представља идентичку матрицу, те је  $N$  недегенерисана. Аналогно,  $S = (0, 0, -1)$  је недегенерисана, па је функција  $f$  Морсова.

Услов недегенерисаности критичне тачке еквивалентан је инвертибилности матрице хесијана у локалним координатама. Та матрица је симетрична, због једнакости мешовитих парцијалних извода вишег реда, те су јој све сопствене вредности реалне и различите од 0. Променом локалних координата

мења се база тангентног простора критичне тачке (у локалним координатама  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  подразумевамо базу  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$  на тангентном простору). Ако је  $P$  матрица преласка са једне на другу базу, а  $M_1$  матрица хесијана у првој бази, тада је  $M_2 = P^T M_1 P$  матрица хесијана у другој бази. На основу Силвестеровог закона инерције, број негативних и позитивних сопствених вредности матрица  $M_1$  и  $M_2$  је константан (иако су се сопствене вредности потенцијално промениле). Стога можемо увести следећу дефиницију.

**Дефиниција 1.1.4.** *Индекс критичне тачке  $p$  функције  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , у ознаци  $Ind_f(p)$ , представља број негативних сопствених вредности матрице Хесијана у произвољној бази тангентног простора  $T_p M$ .*

Интуитивно, индекс критичне тачке нам говори дуж колико линеарно независних праваца функција опада. У околини критичне тачке, Морсова функција има леп запис, који непосредно оправдава претходно наведену интерпретацију. Прецизније, важи следеће:

**Лема 1.1.1.** *(Морсова лема) Нека је  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  Морсова функција и  $p$  критична тачка индекса  $k$ . Тада постоји карта  $(U, \varphi)$  таква да важи  $p \in U$ ,  $\varphi(p) = 0$  и*

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(p) - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{j=k+1}^n x_j^2.$$

Карту из претходне леме називамо *Морсова карта*.

**Последица 1.1.1.** *Критичне тачке Морсове функције су изоловане. Додатно, свака Морсова функција на компактној многострукости има коначан број критичних тачака.*

Природно је питање да ли на свакој глаткој многострукости постоји Морсова функција. Одговор је потврдан, али доказ тог тврђења није сасвим једноставан. Штавише, Морсових функција има „много”, јер важи наредна теорема.

**Теорема 1.1.1.** *Скуп Морсових функција на многострукости  $M$  је густ у скупу глатких функција на  $M$ , опремљеним јаком Вишњијевом  $C^2$ -нормом.*

## 1.2 Псеудо-градијентна векторска поља

Псеудо-градијентна векторска поља представљају важан објекат који ће нам омогућити да дефинишемо стабилне и нестабилне многострукости, чиме ћемо направити први корак ка дефиницији Морсове хомологије, коју дефинишемо у наредној глави. Оваква векторска поља представљају уопштење негативног градијентног векторског поља, али не зависе од метрике.

**Дефиниција 1.2.1.** Нека је  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  Морсова функција. Псеудо-традијентно векторско поље асоцирано функцији  $f$  представља векторско поље  $X$  на  $M$  које задовољава следеће услове:

1. За све  $x \in M$ , и криву  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , за коју важи  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma'(0) = X_x$  (за неко  $\varepsilon > 0$ ), имамо

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)) \leq 0.$$

Једнакост важи ако и само ако је  $x$  критична тачка.

2. У Морсовој карти у околини критичне тачке,  $X$  је задато као нестационарно традијентно функције  $f$  у односу на канонску метрику на  $\mathbb{R}^n$ .

Коришћењем разбијања јединице лако се може доказати следећа теорема.

**Теорема 1.2.1.** За сваку Морсову функцију  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  постоји асоцирано псеудо-традијентно векторско поље.

**Дефиниција 1.2.2.** Нека је  $X$  векторско поље на многострукости  $M$  и нека је  $x \in M$ . Уколико крива  $\gamma : I \rightarrow M$  задовољава Кошијев проблем

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = x, \quad \text{за све } t \in I,$$

$\gamma$  називамо интегралном кривом векторског поља  $X$  у тачки  $x$ .

У случају псеудо-градијентних векторских поља, интегралне криве често називамо и традијентне линије.

**Напомена 1.2.1.** За фиксирану метрику, функција  $f$  опада дуж интегралних кривих векторског поља  $-\nabla f$ . Улога услова 1 у дефиницији 1.2.1 је да обезбеди испуњеност тог својства и у случају псеудо-градијентних векторских поља.

Градијентне линије повезују критичне тачке, јер важи

**Теорема 1.2.2.** *Уколико је  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  решење Кошијеве проблеме*

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = x,$$

*тада постоје критичне тачке  $p$  и  $q$  за које важи*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = p \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = q.$$

**Дефиниција 1.2.3.** *Нека је  $M$  компактна многострукост и  $X$  глатко векторско поље на  $M$ . Пресликавање  $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  које за све  $x \in M$  задовољава*

$$\phi(t, x) = \gamma(t),$$

*где је  $\gamma$  интегрална крива векторског поља  $X$  у тачки  $x$ , називамо током векторског поља  $X$ .*

**Напомена 1.2.2.** У претходној дефиницији, будући да векторско поље  $X$  има компактан носач, постоји глобално дефинисан ток, односно  $\phi(t, x)$ , за произвољно  $x \in M$ , је заиста дефинисано за све  $t \in \mathbb{R}$ .

**Дефиниција 1.2.4.** *Нека је  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  Морсова функција и  $X$  псеудоградијентно векторско поље асоцирано  $f$ . Претпоставимо да је  $M$  компактна многострукост, и означимо са  $\phi$  ток векторског поља  $X$ . Нека је  $p$  критична тачка функције  $f$ .*

*Стабилна многострукост у тачки  $p$  је скуп*

$$W^s(p) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = p\}.$$

*Нестабилна многострукост у тачки  $p$  је скуп*

$$W^u(p) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = p\}.$$

Испоставља се да су стабилне и нестабилне многострукости критичне тачке заиста многострукости. Наиме, важи следеће тврђење.

**Теорема 1.2.3.** *Стабилна и нестабилна многострукости критичне тачке  $p$  су подмногострукости од  $M$  дифеоморфне отвореном диску. Штавише, важи*

$$\dim(W^u(p)) = \operatorname{codim}(W^s(p)) = \operatorname{ind}(p).$$

### 1.3 Декомпозиција на ручке

Морсова теорија је блиско повезана са идејом декомпозиције многострукости на низ лопти (дискова), званим ручке, полепљеним на одређен начин. Најпре, наводимо основне дефиниције, а у наставку ћемо видети како Морсова функција задаје такву декомпозицију.

**Дефиниција 1.3.1.** Нека је  $M'$  многострукошћу димензије  $n$ . Простор  $H^{(i)} = D^i \times D^{n-i}$  називамо  $i$ -ручка. Граница  $H^{(i)}$  има следећу декомпозицију

$$\partial H^{(i)} = (S^{i-1} \times D^{n-i}) \cup (D^i \times S^{n-i-1}).$$

Нека је  $\phi : S^{i-1} \times D^{n-i} \rightarrow \partial M'$  дифеоморфно улађање. За многострукошћу  $M$  дајемо са

$$M = M' \cup_{\phi} (D^i \times D^{n-i}),$$

кажемо да је добијена лепљењем  $i$ -ручке на  $M'$ . Ради једноставније нотације, пишемо  $M = M' \cup H^{(i)}$ .

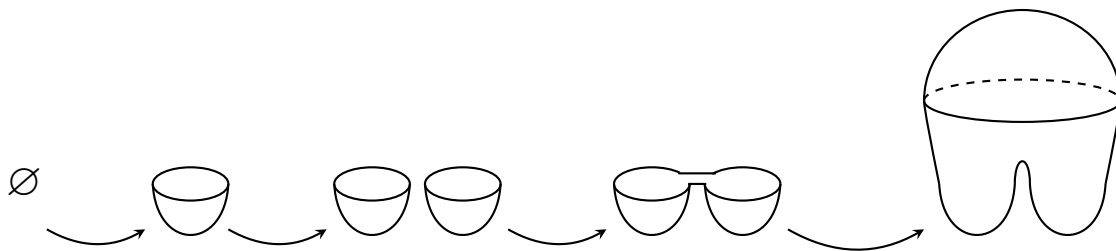
**Напомена 1.3.1.** У претходној дефиницији, под додавањем 0-ручке подразумевамо дисјунктну унију  $M = M' \sqcup H^{(0)}$ .

**Дефиниција 1.3.2.** Декомпозиција компактне многострукошће  $M$  на ручке представља низ многострукошће  $H_0, \dots, H_k$  таквих да важи:

- $H_0 = \emptyset$ ,
- $H_k$  је дифеоморфно  $M$ ,
- $H_i$  је добијено од  $H_{i-1}$  лепљењем једне ручке, за свако  $i$ .

**Дефиниција 1.3.3.** Уколико је  $\dim(M) = n$  и  $M = H_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_k$  декомпозиција на ручке, при чему је  $h_i$  број  $i$ -ручки, тада вектор  $(h_0, h_1, \dots, h_n)$  називамо вектор ручки.

**Пример 1.3.1.** На слици 1.2 можемо видети декомпозицију сфере са вектором ручки  $(2, 1, 1)$ .



Слика 1.2: Декомпозиција сфере на ручке.

## 1.4 Структурне теореме

Индекси критичних тачака Морсових функција имају важну улогу у опису топологије многострукости. Наводимо кључне теореме које илуструју те тополошке феномене.

За глатку функцију  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  и реалан број  $a$ , означимо са  $M_a$  скуп  $\{x \in M : f(x) \leq a\}$ .

**Теорема 1.4.1.** *Дати су реални бројеви  $a$  и  $b$  за које важи  $a < b$ , и Морсова функција на  $M$  без критичних вредности на интервалу  $[a, b]$ . Уколико је  $f^{-1}[a, b]$  компактан, тада су  $M_a$  и  $M_b$  дифеоморфни. Додајно,  $M_a$  је јаки деформациони ретракт од  $M_b$ .*

**Напомена 1.4.1.** Претходно тврђење важи и без претпоставке да је  $f$  Морсова функција. Кључ је само постојање псеудо-градијентног векторског поља, јер је идеја да тачке са  $f^{-1}(b)$  „пустимо” дуж градијентних линија да стигну до тачака са скупа  $f^{-1}(a)$ . Тиме добијамо тражени дифеоморфизам.

**Напомена 1.4.2.** Уколико је  $M$  компактна многострукост, услов компактности скупа  $f^{-1}[a, b]$  у теорему 1.4.1 је аутоматски задовољен.

**Теорема 1.4.2.** *Датa је Морсова функција  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Претпоставимо да је скуп  $f^{-1}[a, b]$  компактан и да садржи само једну критичну тачку  $p$  индекса  $\lambda$ . Тада је  $M_b$  дифеоморфан многострукости добијеној лељењем једне  $\lambda$ -ручке на  $M_a$ .*

Из тополошког угла, често је лакше размишљати само о хомотопском типу многострукости. Стога, наводимо последицу претходне две теореме.

**Теорема 1.4.3.** *Нека је  $M$  компактна мноштрострукост и  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  Морсова функција са критичним тачкама  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Означимо са  $i_j$  индекс критичне тачке  $p_j$ . Тада је  $M$  хомотопски еквивалентна  $CW$ -комплексу са по једном ћелијом димензије  $i_j$  за сваку од критичних тачака  $p_j$ .*

Теорема 1.4.2 нам омогућава да добијемо декомпозицију многострукости на ручке.

**Теорема 1.4.4.** *Нека је  $M$  компактна мноштрострукост. Тада постоји декомпозиција  $M$  на ручке.*

**Доказ.** Одаберимо произвољну Морсову функцију  $f$  на  $M$ . На основу последице 1.1.1,  $f$  има коначно много критичних тачака. Означимо их са  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Такође, малом пертурбацијом функције  $f$ , можемо одабрати Морсову функцију  $\tilde{f}$  која има исте критичне тачке као  $f$  и важи  $\tilde{f}(p_i) \neq \tilde{f}(p_j)$  за  $i \neq j$  (видети [27] за више детаља). Претпоставимо да је  $\tilde{f}(p_1) < \tilde{f}(p_2) < \dots < \tilde{f}(p_k)$ .  $M$  је компактна, те  $\tilde{f}$  достиже минимум у  $p_1$  и максимум у  $p_k$ . Одаберимо реалне бројеве  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  такве да важи

$$\lambda_0 < \tilde{f}(p_1) < \lambda_1 < \tilde{f}(p_2) < \dots < \lambda_{k-1} < \tilde{f}(p_k) < \lambda_k.$$

Имамо да важи  $M_{\lambda_0} = \emptyset$  и  $M_{\lambda_k} = M$ . Применом теореме 1.4.2 на интервале  $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$  добијамо декомпозицију  $M = M_{\lambda_0} \cup M_{\lambda_1} \cup \dots \cup M_{\lambda_k}$ . Тиме је доказ завршен.  $\square$

**Напомена 1.4.3.** Уколико Морсова функција из претходне теореме има  $c_i$  критичних тачака индекса  $i$ , тада, на основу доказа претходне теореме, вектор  $(c_0, c_1, \dots, c_{\dim(M)})$  представља вектор ручки за  $M$ .

Сваки вектор ручки природно долази од неке Морсове функције, што нам каже наредна теорема.

**Теорема 1.4.5.** *Нека је  $(c_0, c_1, \dots, c_{\dim(M)})$  вектор ручки за компактну мноштрострукост  $M$ . Тада постоји Морсова функција  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  са  $c_i$  критичних тачака индекса  $i$ .*

## Глава 2

# Дискретна теорија Морса

Основни циљ ове главе је излагање основа дискретне теорије Морса, коју је Форман развио у свом раду [17], деведесетих година прошлог века. Технике и резултате глатке теорије Морса успео је да прилагоди коначним ћелијским комплексима. Делови теорије су успешно генерализовани и на бесконачне комплексе у [5]. У многим областима математике често немамо привилегију да посматрамо глатке многострукости. На пример, у комбинаторици, геометријски објекти који се често појављују су симплицијални комплекси. Анализа података је још један такав пример у сфери примењене математике. Разумевање топологије комплекса ће бити могуће путем дискретне теорије Морса.

### 2.1 Основне дефиниције

У примени дискретне теорије Морса, углавном је довољно ограничити се на симплицијалне комплексе. Међутим, ради комплетности, изложићемо основе теорије у максималној могућој општости.

У наставку подразумевамо да је читалац упознат са основама теорије CW-комплекса. Систематски преглед ове материје може са видети у [22].

**Дефиниција 2.1.1.** Нека је  $M$  CW-комплекс. За карактеристично пресликавање  $\phi_\alpha: D^n \rightarrow M$ , скуи  $e_\alpha^n := \phi_\alpha(\text{int}(D^n))$  називамо отвореном ћелијом димензије  $n$ , док скуи  $\overline{e}_\alpha^n$ , који представља затворење отворене ћелије  $e_\alpha^n$  у  $M$ , називамо затворена ћелија.

**Напомена 2.1.1.** До краја рада, израз ћелија, уколико није наглашено другачије, користимо искључиво за отворене ћелије. Такође, под карактеристичним пресликавањем отворене ћелије  $\sigma$  подразумевамо карактеристично пресликавање дато претходном дефиницијом.

Нека је  $M$  коначан  $CW$ -комплекс. Уколико не буде наглашено другачије, сви комплекси са којима радимо су подразумевано коначни. Са  $K_p$  означавамо скуп ћелија димензије  $p$  у  $M$ , а са  $K$  унију свих ћелија од  $M$ . Ознака  $\sigma^{(p)}$  представља ћелију димензије  $p$ . За ћелије  $\sigma$  и  $\tau$ , пишемо  $\sigma < \tau$  уколико је  $\bar{\sigma} \subset \bar{\tau}$  и  $\sigma \neq \tau$ , а  $\sigma \leq \tau$  ако је  $\sigma < \tau$  или  $\sigma = \tau$ . Аналогно дефинишемо ознаке  $\tau > \sigma$  и  $\tau \geq \sigma$ . Ако важи  $\sigma < \tau$ ,  $\sigma$  називамо *сврхном* од  $\tau$ .

**Дефиниција 2.1.2.** Нека је  $\sigma^{(p)}$  сврхна од  $\tau^{(p+1)}$  у  $CW$ -комплексу  $M$ . Кажемо да је  $\sigma$  *регуларна сврхна од  $\tau$* , ако је карактеристично пресликавање  $\phi_\tau$  од  $\tau$  ресврховано на  $\phi_\tau^{-1}(\sigma)$  хомеоморфизам и  $\overline{\phi_\tau^{-1}(\sigma)}$  је хомеоморфно  $D^p$ . У суврховном је  $\sigma$  *нерегуларна сврхна*.  $M$  је *регуларан  $CW$ -комплекс* уколико је свака његова сврхна регуларна.

**Пример 2.1.1.** Класичан пример нерегуларног  $CW$ -комплекса је сфера  $S^n$  са  $CW$ -сврховуром која се састави од једне 0-ћелије и једне  $n$ -ћелије. Регуларна сврховура на  $S^n$  се може постићи индуктивно на следећи начин. Кренемо од  $S^0$ , а затим  $S^{k+1}$  добијамо од  $S^k$  догавањем две  $(k+1)$ -ћелије налепљене као северна и јужна хемисфера на екватор  $S^k$ . Добијени  $CW$ -комплекс има по две ћелије у свакој димензији  $0, 1, \dots, n$ .

У наставку рада користимо неке стандардне особине регуларних  $CW$ -комплекса, које су техничког карактера, па их овде наводимо без доказа. У питању су наредне две леме.

**Лема 2.1.1.** Нека је  $M$  регуларан  $CW$ -комплекс. Ако је  $v^{(p-1)}$  регуларна сврхна од  $\sigma^{(p)}$ , и  $\sigma^{(p)}$  регуларна сврхна од  $\tau^{(p+1)}$ , тада постоји сврхна  $\theta^{(p)} \neq \sigma$ , за коју важи  $v < \theta < \tau$ .

**Лема 2.1.2.** Нека је  $M$  регуларан  $CW$ -комплекс и нека су  $\sigma$  и  $\tau$  његове ћелије такве да је  $\sigma < \tau$ . Ако је  $\dim(\tau) - \dim(\sigma) > 1$ , онда постоје бар две различите ћелије  $\mu_1, \mu_2$  димензије  $\dim(\tau) - 1$  такве да важи

$$\sigma < \mu_i < \tau, \quad \text{за } i = 1, 2.$$

**Дефиниција 2.1.3.** Нека је  $M$  коначан  $CW$ -комплекс. Дискретна Морсова функција на  $M$  је пресликавање

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}$$

које за све  $p$  и све  $\sigma \in K_p$  задовољава:

1.

$$|\{\tau^{(p+1)} > \sigma : f(\tau) \leq f(\sigma)\}| \leq 1.$$

Додатно, уколико је  $\sigma$  нерегуларна страна од  $\tau^{(p+1)}$ , важи  $f(\sigma) < f(\tau)$ .

2.

$$|\{v^{(p-1)} < \sigma : f(v) \geq f(\sigma)\}| \leq 1.$$

Додатно, уколико је  $v^{(p-1)}$  нерегуларна страна од  $\sigma$ , важи  $f(v) < f(\sigma)$ .

Из претходне дефиниције видимо да дискретна Морсова функција, у начелу, расте са димензијом ћелије. Прецизније, за сваку ћелију постоји највише једна страна која нема мању вредност функције, и највише једна кострана која нема већу вредност функције.

**Напомена 2.1.2.** Углавном ћемо у наставку, ради лакшег записа, за дискретну Морсову функцију писати  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , без помињања скупа  $K$ .

**Дефиниција 2.1.4.** За дискретну Морсову функцију  $f$  на  $M$ , кажемо да је  $\sigma \in K_p$  критична ћелија индекса  $p$  уколико је

$$|\{\tau^{(p+1)} > \sigma : f(\tau) \leq f(\sigma)\}| = |\{v^{(p-1)} < \sigma : f(v) \geq f(\sigma)\}| = 0.$$

Проанализирајмо дефиницију критичне ћелије. Једноставности ради, претпоставимо да је  $M$  триангулација<sup>1</sup> оријентабилне површи без границе. Нека је  $f$  дискретна Морсова функција на  $M$ . Одаберимо критичну грану  $e$ . На чворовима који припадају  $e$ , вредност функције мора бити мања од  $f(e)$ , док на два троугла којима је  $e$  грана, вредност функције мора бити већа од  $f(e)$ . Дакле, уколико желимо да од гране  $e$  „кренемо“ ка граници, функција ће опадати, а уколико кренемо у ортогоналном правцу (дуж троуглова), функција ће расти. Критична тачка индекса један има сличне особине. Постоји један правац дуж градијентних линија које пролазе кроз ту тачку на ком функција

---

<sup>1</sup>видети дефиницију 3.1.4.

опада, док на осталим, ортогоналним на тај правац, функција расте. Стога, можемо размишљати о критичној ћелији у димензији  $i$  као о дискретном аналогу критичне тачке индекса  $i$  на глаткој многострукости. Ове ствари се заиста могу довести у блиску везу, што ћемо детаљније размотрити у глави 3.

**Пример 2.1.2.** Нека је  $M$   $CW$ -комплекс. Тада је функција задања са

$$f(\sigma) = \dim(\sigma)$$

дискретна Морсова функција на  $M$ . Она представља аналогон константне функције на многострукости чија је свака тачка критична (иако функција, наравно, није Морсова). Дакле, на произвољном  $CW$ -комплексу постоји дискретна Морсова функција. Разлика у односу на тлачку категорију је та да је постојање тлачке Морсове функције на многострукости нешпривијална ствар.

**Пример 2.1.3.** Мање шпривијалан пример можемо добити на следећи начин. Нека је  $M$  регуларан  $CW$ -комплекс. Одаберимо произвољно инјективно пресликавање  $f : K_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Тада за  $p > 0$ , индуктивно дефинишемо

$$f(\sigma^{(p)}) = \sum_{v^{(p-1)} < \sigma} f(v).$$

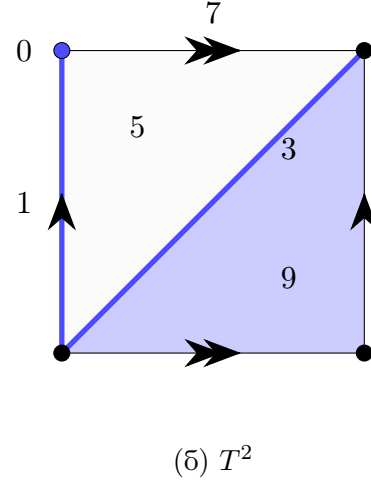
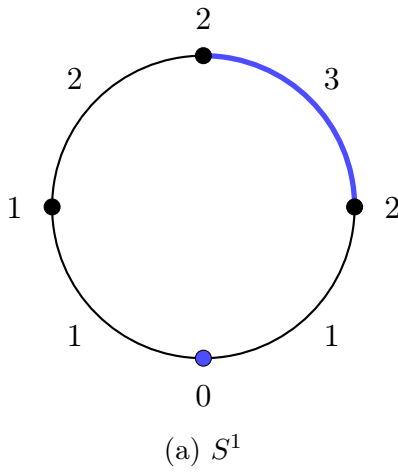
Лако се доказује да је ово заиста дискретна Морсова функција.

**Пример 2.1.4.** На слици 2.1 можемо видети примере дискретних Морсових функција на кружници и торусу. Плавом бојом су означене критичне ћелије.

**Лема 2.1.3.** Нека је  $\sigma^{(p)}$  ћелија која није критична за дискретну Морсову функцију  $f$ . Тада је задовољен тачно један од услова:

1. Постоји  $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)}$  за које важи  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ .
2. Постоји  $v^{(p-1)} < \sigma^{(p)}$  за које важи  $f(v) \geq f(\sigma)$ .

**Доказ.** Како  $\sigma$  није критична ћелија, бар један од услова је задовољен. Претпоставимо супротно, односно да су оба услова испуњена. Тада је  $p \geq 1$  због другог услова. Први услов имплицира да је  $\sigma$  регуларна страна. Уколико је  $\eta^{(p)}$  било која друга страна од  $\tau$ , имамо  $f(\eta) < f(\tau)$ , односно  $f(\eta) < f(\sigma)$ .



Слика 2.1: Примери дискретних Морсових функција.

Телија  $v$  је регуларна страна од  $\sigma$ . Тада, на основу леме 2.1.1, постоји  $\theta^{(p)} \neq \sigma$  за које важи  $v < \theta < \tau$ . Међутим, сада је  $f(v) < f(\theta)$ , јер  $f(v)$  не може истовремено бити веће или једнако од  $f(\sigma)$  и  $f(\theta)$ . Стога, имамо следећи низ неједнакости:

$$f(\sigma) \leq f(v) < f(\theta) < f(\tau) \leq f(\sigma).$$

Ово је контрадикција, те је доказ завршен.  $\square$

Осим тривијалних примера, уопште није јасно како доделити вредности свакој ћелији тако да добијена функција задовољава аксиоме дискретне Морсове функције. Тежина лежи у томе што треба проверити мноштво локалних услова. Наш следећи задатак је решавање овог проблема.

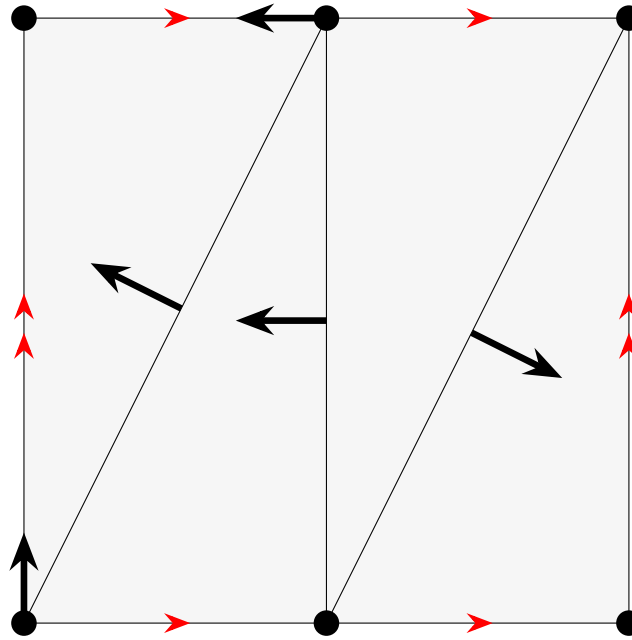
У глаткој категорији, већина фундаменталних теорема, које повезују топологију многострукости са критичним тачкама Морсове функције, у доказима се ослањају на псеудо-градијентно векторско поље, уместо на саму функцију. Стога је идеја да дискретној Морсовој функцији асоцирамо дискретно градијентно векторско поље, које као објекат носи готово исту информацију као функција. У пракси, најчешће, нема потребе за налажењем дискретне Морсове функције, већ само њеног градијентног векторског поља. У следећој секцији дајемо прецизну дефиницију оваквог објекта.

## 2.2 Дискретна векторска поља

Почећемо са генералном дефиницијом дискретног векторског поља, а затим ћемо дати дефиницију и карактеризацију градијентних векторских поља. Основни тополошки простор са којим радимо у овом одељку је регуларан CW-комплекс  $M$ . Дефиниције које ћемо изложити имају генерализацију и на произвољан CW-комплекс, међутим, регуларност је услов који ће задовољити све наше потребе.

**Дефиниција 2.2.1.** *Дискретно векторско поље  $V$  на  $M$  је фамилија парова  $\{\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}\}$  таква да се свака ћелија налази у највише једном пару.*

Дискретно векторско поље визуализујемо тако шта нацртамо стрелицу од  $\alpha^{(p)}$  ка  $\beta^{(p+1)}$ . Пример једног таквог поља на торусу можемо видети на слици 2.2, где црне стрелице одговарају векторском пољу, а црвене идентификацијама у раванском моделу.



Слика 2.2: Дискретно векторско поље на торусу

Услов да се ћелија налази у највише једном од парова у  $V$  имплицира да за сваку ћелију  $\alpha$  важи тачно једно од тврђења:

1.  $\alpha$  је реп тачно једне стрелице;
2.  $\alpha$  је врх тачно једне стрелице;

3.  $\alpha$  није ни реп ни врх нити једне стрелице.

Уколико је испуњен трећи услов, кажемо да је  $\alpha$  *критична ћелија* за  $V$ .

**Теорема 2.2.1.** *Нека је  $V$  дискретно векторско поље на  $M$ . Тада је Ојлерова карактеристика од  $M$  дата са*

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{\dim(M)} (-1)^i \# \{ \text{Критичних ћелија димензије } i \}.$$

**Доказ.** Знамо да је  $\chi(M)$  алтернирајућа сума броја ћелија. Свака некритична ћелија од  $V$  је упарена са ћелијом у суседној димензији, те се у суми за  $\chi(M)$  оне поништавају. Тиме је доказ завршен.  $\square$

Дискретна векторска поља природно долазе од дискретних Морсових функција путем следеће дефиниције.

**Дефиниција 2.2.2.** *Нека је  $M$  регуларан  $CW$ -комплекс и  $f$  дискретна Морсова функција на  $M$ . Градијентно векторско поље од  $f$ , у ознаци  $-\nabla f$ , дефинишемо на следећи начин: Уколико је  $\sigma$  критична ћелија, онда је  $\sigma$  критична и за  $-\nabla f$ . Уколико  $\alpha^{(p)}$  није критична, на основу леме 2.1.3 или постоји  $\tau^{(p+1)} > \alpha$  за које важи  $f(\tau) \leq f(\alpha)$ , или постоји  $v^{(p-1)} < \alpha$  за које важи  $f(v) \geq f(\alpha)$ . У првом случају  $\{\alpha < \tau\} \in -\nabla f$ , а у другом  $\{v < \alpha\} \in -\nabla f$ .*

**Напомена 2.2.1.** У глаткој категорији се углавном посматра негативни градијентни ток, асоциран векторском пољу  $-\nabla f$ , дуж ког функција  $f$  опада. У дискретном случају користимо аналогну нотацију, с обзиром да се стрелице крећу од већих ка мањим или једнаким вредностима.

Сада дефинишемо аналогон интегралних кривих за дискретна векторска поља.

**Дефиниција 2.2.3.** *Нека је  $V$  дискретно поље на  $M$ .  $V$ -пућ је низ ћелија*

$$\alpha_0^{(p)} < \beta_0^{(p+1)} > \alpha_1^{(p)} < \beta_1^{(p+1)} > \dots < \beta_{r-1}^{(p+1)} > \alpha_r^{(p)},$$

где је  $\{\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)}\} \in V$  и  $\alpha_i^{(p)} \neq \alpha_{i+1}^{(p)}$  за  $i = 0, 1, \dots, r-1$ . Пућ је затворен уколико је  $\alpha_0 = \alpha_r$  и  $r \geq 1$ . Дужина пућа је  $r$ . Пућ је нешривијалан уколико је  $r > 0$ .

Присетимо се да у глатком случају функција опада дуж градијентних линија. Слична особина важи и за дискретна векторска поља која су градијенти дискретних Морсових функција.

**Лема 2.2.1.** *Нека је  $V = -\nabla f$  за дискретну Морсову функцију  $f$  на  $M$ . Низ ћелија  $\alpha_0^{(p)} < \beta_0^{(p+1)} > \alpha_1^{(p)} < \beta_1^{(p+1)} > \dots < \beta_{r-1}^{(p+1)} > \alpha_r^{(p)}$  је  $V$ -пута ако и само ако је испуњено*

$$f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots \geq f(\beta_{r-1}) > f(\alpha_r).$$

**Доказ.** Уколико је дати низ  $V$ -пут, тада је по дефиницији  $f(\alpha_i) \geq f(\beta_i)$ , а како  $\beta_i$  и  $\alpha_{i+1}$  нису упарени, то је  $f(\beta_i) > f(\alpha_{i+1})$ . Претходно важи за  $i = 0, 1, \dots, r$ , те је први смер тврђења доказан.

Обратно, уколико имамо низ ћелија које задовољавају дати низ неједнакости, тада, за  $i = 0, 1, \dots, r-1$ , по дефиницији важи  $\{\alpha_i < \beta_i\} \in V$ , док услов  $f(\alpha_i) > f(\alpha_{i+1})$  имплицира  $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ . Дакле, низ је заиста  $V$ -пут.  $\square$

Дакле, градијентни путеви дискретне Морсове функције су баш они дуж којих функција опада. Стога, имамо следећу очигледну последицу.

**Последица 2.2.1.** *Градијентно векторско поље  $V$  за дискретну Морсову функцију не садржи нетривијалне затворене  $V$ -путеве.*

Испоставља се да непостојање затворених  $V$ -путева даје потпуну карактеризацију дискретних градијентних векторских поља.

**Теорема 2.2.2.** *Дискретно векторско поље  $V$  на  $M$  јесте градијентно векторско поље неке дискретне Морсове функције ако и само ако не постоје нетривијални затворени  $V$ -путови.*

**Доказ.** Због последице 2.2.1, потребно је доказати само смер с десна на лево. Претпоставимо да је  $V$  дискретно векторско поље које нема нетривијалне затворене  $V$ -путеве. Уколико  $\{\alpha < \beta\} \in V$ , у наставку доказа, ради лакшег праћења, писаћемо  $V(\alpha) = \beta$  и  $V(\beta) = \alpha$ . Уколико је  $\sigma$  критична ћелија, писаћемо  $V(\sigma) = 0$ . Нека  $M^{(p)}$  означава  $p$ -скелетон од  $M$ . Дефинишимо дискретно векторско поље  $V_p$  на  $M^{(p)}$  као  $V_p(\sigma^{(q)}) = V(\sigma^{(q)})$ , уколико је  $q < p$ , а  $V_p(\sigma^{(q)}) = 0$  за све преостале ћелије димензије  $q = p$ . Идеја доказа је да индуктивно конструишемо дискретну Морсову функцију  $f_p$  на сваком  $M^{(p)}$  чије је градијентно векторско поље баш  $V_p$ , и уколико је  $\sigma^{(q)}$  критична ћелија

за  $f_p$ , да важи  $f_p(\sigma^{(q)}) = q$ . Штавише, слика од  $f_p$  ће припадати интервалу  $[-\frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}]$ .

База индукције јесте  $p = 0$ .  $M^{(0)}$  је 0-скелетон, па је свака 0-ћелија критична за  $V_0$ . Стога, дефинишимо  $f_0(v) = 0$ , за све  $v \in M^{(0)}$ .

Претпоставимо сада да смо дефинисали дискретну Морсову функцију  $f_{p-1}$  на  $M^{(p-1)}$  чије је градијентно векторско поље  $V_{p-1}$  и која задовољава  $f_{p-1}(\sigma^{(q)}) = q$  за све критичне ћелије  $\sigma^{(q)}$  од  $f_{p-1}$ . Такође, можемо претпоставити да је  $M = M^{(p)}$ . Уколико је  $q < p - 1$ , дефинишимо  $f_p(\sigma^{(q)}) := f_{p-1}(\sigma^{(q)})$ . За ћелију  $\sigma^{(p-1)}$ , дефинишимо  $d(\sigma)$  као

$$d(\sigma) := \max\{r : \text{постоји } V_p\text{-пут } \sigma < \tau > \sigma_1 < \tau_1 > \dots > \sigma_r, V_p(\sigma_r) = 0\}.$$

За произвољно  $\sigma$ ,  $d(\sigma)$  је коначан број јер  $V$ , а самим тим ни  $V_p$ , нема затворених путева. Означимо са  $D$  максимум бројева  $d(\sigma)$  по свим  $(p - 1)$ -ћелијама. Сада дефинишемо

$$f_p(\sigma^{(p-1)}) := f_{p-1}(\sigma^{(p-1)}) + \frac{d(\sigma^{(p-1)})}{2D + 1}.$$

Коначно, дефинишемо  $f_p$  на  $p$ -ћелијама. Уколико је  $\sigma^{(p)}$  критична за  $V$ , поставимо  $f_p(\sigma^{(p)}) = p$ . Ако је  $\sigma^{(p)} = V(\alpha^{(p-1)})$ , дефинишемо  $f_p(\sigma) = f_p(\alpha)$ . Приметимо да за било коју другу  $(p - 1)$ -страну од  $\sigma$  важи  $f_p(\beta) < f_p(\sigma)$ . Заиста, на сваки  $V_p$ -пут који почиње у  $\beta$  можемо на почетак додати  $\alpha < \sigma$ , одакле је  $d(\beta) < d(\alpha)$ .

Тврдимо да  $f_p$  има тражена својства. По конструкцији, слика функције  $f_p$  припада скупу  $[-\frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}]$ . За  $p$ -ћелије су аксиоме дискретне Морсове функције очигледно задовољене. Претпоставимо сада да је  $l < p$  и нека су  $\sigma^{(l)}$  и  $\tau^{(l-1)}$  ћелије за које важи  $\tau < \sigma$ . Показаћемо да важи еквиваленција

$$f_p(\sigma) < f_p(\tau) \iff f_{p-1}(\sigma) < f_{p-1}(\tau).$$

Најпре,  $f_{p-1}(\tau) = f_p(\tau)$  јер је  $\dim(\tau) \leq p - 2$ . За  $l \leq p - 2$ , еквиваленција је очигледна. У случају  $l = p - 1$ ,  $f_p(\sigma) \geq f_{p-1}(\sigma)$ , што имплицира да ако важи  $f_p(\sigma) < f_p(\tau)$ , важи и  $f_{p-1}(\sigma) < f_{p-1}(\tau)$ . Обратно, ако важи  $f_{p-1}(\sigma) < f_{p-1}(\tau)$ , имамо  $V_p(\tau) = \sigma$ . Међутим, тада је  $d(\sigma) = 0$ , односно  $f_p(\sigma) = f_{p-1}(\sigma)$ , те важи тражена еквиваленција. Из претходног, индукцијом добијамо да је први услов дефиниције 2.1.3 испуњен за све ћелије до димензије  $(p - 2)$ , а други услов за све ћелије до димензије  $(p - 1)$ . Ако је  $\dim(\sigma) = p - 1$ , тада, по конструкцији, за  $\tau^{(p)} > \sigma$  важи  $V_p(\sigma) = \tau$ . Стога,  $f_p$  је дискретна Морсова функција.

Преостало је показати да важи  $V_p = -\nabla f_p$ . За  $\alpha^{(l-1)} < \beta^{(l)}$  треба показати еквиваленцију

$$f_p(\alpha) > f_p(\beta) \iff V_p(\alpha) = \beta.$$

Индукцијом, ово је тачно за  $l \leq p-1$ , док је по конструкцији тачно и за  $l = p$ .

Коначно, ако је  $\sigma^{(q)}$  критична ћелија за  $f_p$ , важи  $f_p(\sigma^{(q)}) = q$ . За  $q = p$ , ово је задовољено по конструкцији. У случају  $q = p-1$ , имамо  $d(\sigma) = 0$ , односно  $f_p(\sigma) = f_{p-1}(\sigma) = p-1$ , где последња једнакост следи из индуктивне хипотезе. Случај  $q < p-1$  се због  $f_p(\sigma) = f_{p-1}(\sigma)$  опет своди на индуктивну хипотезу. Тиме је доказ завршен. □

## 2.3 Поглед из угла комбинаторне топологије

Овај кратак одељак има улогу да укаже на везу дискретних векторских поља са теоријом усмерених графова, коју је први приметио Чари [14].

**Дефиниција 2.3.1.** Нека је  $M$  регуларан  $CW$ -комплекс. Хасеов дијаграм комплекса  $M$  је усмерен граф чији чворови одговарају ћелијама комплекса  $M$ , који има усмерену грану  $\beta \rightarrow \alpha$  ако и само ако важи  $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}$ , за неко  $p$ .

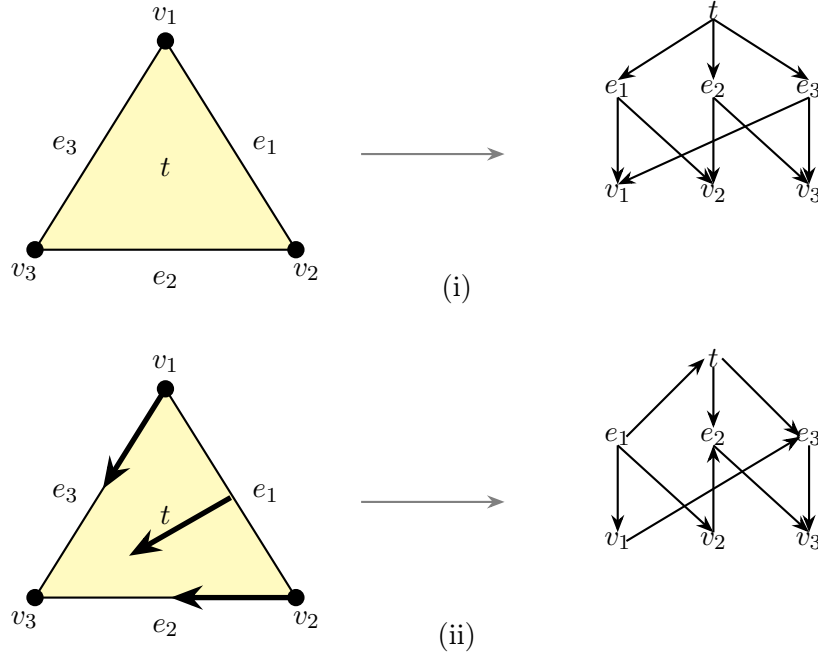
Претпоставимо да имамо дискретно векторско поље  $V$  на  $M$ . Хасеов дијаграм комплекса  $M$  модификујемо на следећи начин: ако  $\{\alpha < \beta\} \in V$ , променимо оријентацију гране  $\beta \rightarrow \alpha$  у том Хасеовом дијаграму (видети слику 2.3).

У оваквом амбијенту, теорема 2.2.2 има следећи облик.

**Теорема 2.3.1.** Дискретно векторско поље  $V$  је градијентно ако и само ако модификовани Хасеов дијаграм нема нећивијалних усмерених циклуса.

**Дефиниција 2.3.2.** Нека је  $G$  усмерен граф. Упаривање  $M$  на графу  $G$  представља подскуп скупа грана тако да сваки чвор припада највише једној грани у  $M$ . Упаривање је ациклично ако обрћањем оријентације грана које припадају  $M$ , новодобијени граф нема нећивијалних усмерених циклуса.

Дакле, имајући у виду претходну теорему и дефиницију, дискретна градијентна векторска поља одговарају ацикличним упаривањима на Хасеовом



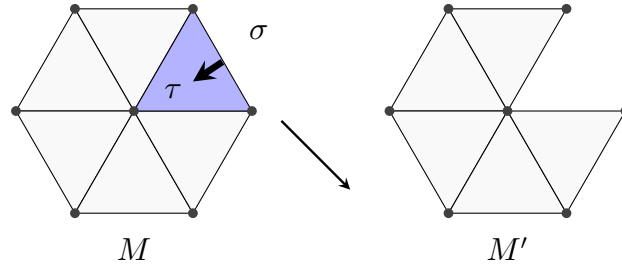
Слика 2.3: (i) – Хасеов дијаграм; (ii) – модификовани Хасеов дијаграм.

дијаграму. Стога питања из дискретне теорије Морса можемо свести на проблеме из теорије графова. Оваква промена перспективе је врло честа у комбинаторној топологији.

## 2.4 Ћелијска колапсирања

У овом поглављу уводимо важан алат – ћелијско колапсирање, који се често користи у дискретној Морсовој теорији, јер задаје дискретна градијентна векторска поља.

Нека је  $M$  регуларан CW-комплекс и нека су  $\sigma$  и  $\tau$  ћелије за које важи  $\sigma^{(p)} < \tau^{(p+1)}$ , и  $\sigma$  није страна ниједне друге  $(p+1)$ -ћелије. Такво  $\sigma$  називамо *слободна страна*. Нека је  $M' = M \setminus (\sigma \cup \tau)$ . Кажемо да је  $M'$  добијено од  $M$  *елементарним колапсирањем*, у ознаци  $M \searrow_{\sigma, \tau} M'$ . Уколико се низом елементарних колапсирања  $M$  може трансформисати у  $M''$ , кажемо да  $M$  *колапсира* на  $M''$ , у ознаци  $M \searrow M''$ . Ћелијски комплекс је *колапсибилан* уколико колапсира у тачку.


 Слика 2.4: Елементарно колапсирање  $M$  на  $M'$ .

Ако  $M \searrow M''$ , тада је, јасно,  $M''$  јаки деформациони ретракт од  $M$ . Дакле,  $M \simeq M''$ . Обратно није тачно, јер постоје хомотопски еквивалентни CW-комплекси који не могу колапсирати један на други. Класичан пример је лудачка капа [39]. То је простор који је контрактибилан, али није колапсибилан.

Низ елементарних колапсирања индукује дискретно векторско поље. Наиме, нека је

$$M \searrow_{\sigma_1, \tau_1} M_1 \searrow_{\sigma_2, \tau_2} \dots \searrow_{\sigma_k, \tau_k} M_k$$

низ елементарних колапсирања. Векторско поље на  $M$  дефинишемо као фамилију  $\bigcup_{i=1}^k \{\sigma_i < \tau_i\}$ . Докажимо да је ово векторско поље градијентно.

**Теорема 2.4.1.** *Векторско поље  $V$  асоцирано низу елементарних колапсирања*

$$M \searrow_{\sigma_1, \tau_1} M_1 \searrow_{\sigma_2, \tau_2} \dots \searrow_{\sigma_k, \tau_k} M_k$$

*је градијентно.*

**Доказ.** На основу теореме 2.2.2, довољно је показати да не постоје нетривијални затворени путеви. Претпоставимо супротно. Уколико је  $\sigma_i$  слободна страна из низа елементарних колапсирања која припада  $V$ -путу, она може бити само на почетку истог. У супротном би постојала ћелија  $\sigma'$  за коју важи  $\{\sigma' < \tau_i\} \in V$ , што је немогуће. Дакле, такав  $V$ -пут не може бити затворен.

Уколико затворен  $V$ -пут не садржи слободне стране  $\sigma_i$ , а самим тим ни  $\tau_i$ , онда све ћелије које му припадају морају лежати у  $M_k$ , где су све ћелије критичне, те је пут тривијалан. Тиме је доказ завршен.  $\square$

Природно се поставља и обрнуто питање: Да ли свако градијентно дискретно векторско поље  $V$  одговара низу елементарних колапсирања? У општем случају, одговор је одричан, али уколико наметнемо услов да је скуп

критичних ћелија које одговарају  $V$  поткомплекс почетног комплекса, добијамо потврдан одговор, јер важи следећа теорема.

**Теорема 2.4.2.** *Нека је  $A$  поткомплекс коначног регуларног  $CW$ -комплекса  $B$ . Ако на  $B$  постоји градијентно дискретно векторско поље  $V$  чије су критичне ћелије тачно ћелије комплекса  $A$ , онда важи*

$$B \searrow A.$$

**Доказ.** Пошто су критичне ћелије поља  $V$  тачно ћелије из  $A$ , свака ћелија из  $B \setminus A$  припада тачно једном пару  $\{\sigma^{(p)} < \tau^{(p+1)}\} \in V$ . Доказаћемо да међу овим паровима постоји пар који одређује елементарно колапсирање. Нека је

$$d = \max\{\dim \eta : \eta \in B \setminus A\}.$$

Тада, јасно, за сваку  $d$ -димензионалну ћелију  $\tau \in B \setminus A$  постоји страна  $\sigma$ , за коју важи  $\{\sigma^{(d-1)} < \tau^{(d)}\} \in V$ .

Посматрајмо усмерени граф чија су темена парови  $\{\sigma^{(d-1)} < \tau^{(d)}\} \in V$ , а усмерену грану  $\{\rho < \eta\} \longrightarrow \{\sigma < \tau\}$  постављамо уколико је  $\sigma < \eta$  и  $\sigma \neq \rho$ . Усмерени циклус у овом графу одредио би затворен  $V$ -пут, а како је  $V$  градијентно, такви путеви не постоје. Према томе, добијени усмерени граф је ацикличан. Стандардна чињеница из теорије графова јесте да ацикличан усмерен граф садржи бар један извор, односно чвор за који су све гране које га садрже оријентисане „од” њега. У нашем случају, нека је то пар  $\{\sigma^{(d-1)} < \tau^{(d)}\}$ . Показаћемо да је  $\sigma$  слободна страна ћелије  $\tau$ .

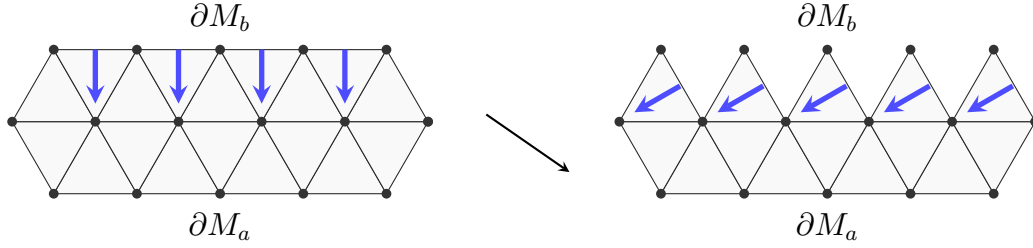
Претпоставимо супротно, односно да постоји друга  $d$ -димензионална ћелија  $\eta \neq \tau$  таква да је  $\sigma$  њена страна. Тада  $\eta \notin A$ . Заиста, када би било  $\eta \in A$ , из чињенице да је  $A$  поткомплекс, следило би  $\sigma \in A$ , што је немогуће. По избору броја  $d$ , постоји страна  $\rho$ , за коју важи  $\{\rho^{(d-1)} < \eta^{(d)}\} \in V$ . Наравно,  $\rho \neq \sigma$ , јер је  $\sigma$  већ упарена са  $\tau$ . Одатле следи да постоји усмерена грана

$$\{\rho < \eta\} \longrightarrow \{\sigma < \tau\},$$

што је у супротности са избором пара  $\{\sigma < \tau\}$ .

Следи да је  $\sigma$  слободна страна ћелије  $\tau$ . Како је  $B$  регуларан  $CW$ -комплекс и  $\dim \tau = \dim \sigma + 1$ , уклањање страна  $\sigma$  и  $\tau$  представља елементарно колапсирање. Дакле,

$$B \searrow B \setminus \{\sigma, \tau\}.$$

Слика 2.5: Колапсирање  $M_b$  на  $M_a$ .

Ограничење поља  $V$  на преостали поткомплекс је опет градијентно поље, а његове критичне ћелије су и даље тачно ћелије из  $A$ . Понављањем претходног поступка, све док не исцрпимо упарене ћелије из  $B \setminus A$ , добијамо

$$B \searrow A.$$

□

Ово је добро место да се присетимо теореме 1.4.1. Она нам каже да ако за глатку функцију  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  у скупу  $f^{-1}[a, b]$  нема критичних тачака, имамо јаку деформациону ретракцију  $M_b$  на  $M_a$ . Та јака деформациона ретракција се добија посматрањем градијентних линија које спајају тачке на  $\partial M_b$  са тачкама на  $\partial M_a$ . На слици 2.5, уколико претпоставимо да имамо триангулацију дводимензионалне глатке многострукости, можемо видети како низом елементарних колапсирања добијамо да је  $M_a$  јаки деформациони ретракт од  $M_b$ . По теорему 2.4.1, низ колапсирања задаје дискретно векторско поље, односно дискретну Морсову функцију, која нема критичних ћелија у скупу  $f^{-1}[a, b]$ . Ово разматрање нам указује на то да постоји теорема аналогна теорему 1.4.1 у дискретном случају. У наредном одељку ћемо се позабавити том теоремом, као и аналогоном теореме 1.4.2.

## 2.5 Тополошке последице

Докази теорема 1.4.1 и 1.4.2 су поприлично тешки и технички захтевни. Њихове дискретне верзије имају доста простије доказе, које наводимо у наставку.

**Дефиниција 2.5.1.** Нека је  $M$   $CW$ -комплекс и  $f$  дискретна Морсова функција на  $M$ . За  $a \in \mathbb{R}$ , њодниво  $M(a)$  представља  $CW$ -комплекс за који са

$$M(a) := \bigcup_{\substack{\sigma \in K \\ f(\sigma) \leq a}} \bigcup_{\tau \leq \sigma} \tau.$$

Сада наводимо једну техничку лему.

**Лема 2.5.1.** *Нека је  $f$  дискретна Морсова функција на регуларном  $CW$ -комплексу  $M$  и  $\sigma^{(p)}$  ћелија у  $M$ . Нека је  $\tau > \sigma$ . Тада постоји  $\tau_1^{(p+1)}$  које задовољава  $\sigma < \tau_1 \leq \tau$  и  $f(\tau_1) \leq f(\tau)$ .*

**Доказ.** Свакако важи  $\dim(\tau) > p$ . Уколико је  $\dim(\tau) = p + 1$ , узмимо  $\tau_1 = \tau$ . У супротном, нека је  $\dim(\tau) = p + r$ , за неко  $r > 1$ . На основу леме 2.1.2, постоје бар две  $(p + r - 1)$ -стране  $\mu_1$  и  $\mu_2$  које задовољавају  $\tau > \mu_1 > \sigma$  и  $\tau > \mu_2 > \sigma$ . Како је  $f$  Морсова функција, имамо да важи  $f(\mu_1) < f(\tau)$  или  $f(\mu_2) < f(\tau)$ , па тврђење леме следи индуктивно. □

**Теорема 2.5.1.** *Нека је  $M$  регуларан  $CW$ -комплекс и  $f$  дискретна Морсова функција на  $M$ . Уколико  $f$  нема критичних ћелија чија је вредност функције  $f$  на интервалу  $[a, b]$ , где су  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $a < b$ , тада имамо*

$$M(b) \searrow M(a).$$

**Доказ.** Приметимо да можемо претпоставити да је  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  инјективно. Наиме, уколико је  $f(\tau) = f(\sigma)$  за  $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)}$ ,  $f(\tau)$  можемо заменити са  $f(\tau) - \varepsilon$ , или  $f(\sigma)$  са  $f(\sigma) + \varepsilon$ , за довољно мало  $\varepsilon > 0$ , тако да скуп критичних ћелија остане непромењен. Такође, уколико је  $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)} > v^{(p-1)}$ , и све ћелије имају различите  $f$  вредности, заменом  $f(\sigma)$  са  $f(\sigma) \pm \varepsilon$ , за довољно мало  $\varepsilon$ , нећемо променити скуп критичних ћелија. Стога, можемо пертурбовати  $f$  тако да се поднивои  $M(a)$  и  $M(b)$  не промене, да интервал  $[a, b]$  не садржи критичне вредности и да  $f$  буде инјективна.

Ако је  $f^{-1}[a, b] = \emptyset$ , доказ је завршен. У супротном, поделом интервала  $[a, b]$  на мање подинтервале, уколико је неопходно, можемо претпоставити да постоји јединствена некритична ћелија  $\sigma$  таква да  $f(\sigma) \in [a, b]$ . На основу леме 2.1.3 тачно једно од следећих тврђења је тачно:

1. Постоји  $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)}$  за које важи  $f(\tau) < f(\sigma)$ ;
2. Постоји  $v^{(p-1)} < \sigma^{(p)}$  за које важи  $f(v) > f(\sigma)$ .

У првом случају, одмах имамо  $f(\tau) < a$ , па је  $\tau \subseteq M(a)$ . Како је  $\sigma < \tau$ , то је и  $\sigma \subseteq M(a)$ , односно  $M(a) = M(b)$ , те је тврђење теореме тривијално тачно. У другом случају, имамо да је  $f(\tau) > b$  за све  $\tau^{(p+1)} > \sigma$ . На основу леме 2.5.1 следи да је  $f(\tau) > b$  за све  $\tau > \sigma$ . Стога је  $\sigma \cap M(a) = \emptyset$ . Због  $f(v) > f(\sigma)$  имамо  $f(v) > b$ . Уколико је  $\eta^{(p-1)}$  било која друга страна од  $\sigma$ , по дефиницији дискретне Морсове функције имамо  $f(\eta) < f(\sigma)$ , односно  $f(\eta) < a$ . Дакле,  $\eta$  и све њене стране припадају  $M(a)$ .

Уколико је  $\theta^{(p)} \neq \sigma$  нека ћелија која садржи  $v$ , опет по дефиницији дискретне Морсове функције, имамо  $f(\theta) > f(v) > b$ . Из леме 2.5.1 следи да за било коју ћелију  $\theta_1$  која садржи  $v$  важи  $f(\theta_1) > b$ , односно  $v \cap M(a) = \emptyset$ .

Коначно, закључујемо

$$M(b) = M(a) \cup \sigma \cup v,$$

где је  $v$  слободна страна од  $\sigma$ . Сходно томе,  $M(b) \searrow M(a)$ .

□

**Теорема 2.5.2.** *Нека је  $M$  регуларан  $CW$ -комплекс и  $f$  дискретна Морсова функција на  $M$ . Претпоставимо да је  $\sigma^{(p)}$  критична ћелија за  $f$  при чему је  $f(\sigma) \in [a, b]$ , и не постоји више критичних ћелија у скупу  $f^{-1}[a, b]$ . Тада је  $M(b)$  хомотопски еквивалентан*

$$M(a) \cup_{\partial e^p} e^p,$$

*односно простору добијеном лепљењем једне затворене  $p$ -ћелије на  $M(a)$ .*

**Доказ.** Слично као у доказу теореме 2.5.1, можемо претпоставити да је  $f$  инјективно. Такође, можемо наћи реалне бројеве  $a'$  и  $b'$  такве да важи

$$a < a' < b' < b, \quad \sigma = f^{-1}[a', b'].$$

Из теореме 2.5.1 имамо  $M(b) \searrow M(b')$  и  $M(a') \searrow M(a)$ , па је довољно доказати да је  $M(b')$  хомотопски еквивалентно  $M(a') \cup_{\partial e^p} e^p$ .

Како је  $\sigma$  критична ћелија, то је  $f(\tau) > b'$  за све  $\tau^{(p+1)} > \sigma$ . На основу леме 2.5.1,  $f(\eta) > b'$  за све  $\eta > \sigma$ . Стога,  $\sigma \cap M(a') = \emptyset$ . Такође, уколико је  $v^{(p-1)} < \sigma$ , због критичности  $\sigma$ , имамо  $f(v) < a'$ . Дакле,  $\partial(\bar{\sigma}) \subseteq M(a')$ . Коначно,

$$M(b') = M(a') \cup_{\partial(\bar{\sigma})} \bar{\sigma}.$$

Како је  $\bar{\sigma}$  хомеоморфно затвореној  $p$ -ћелији  $e^p$ , доказ је завршен.  $\square$

Сада наводимо последицу претходне две теореме.

**Теорема 2.5.3.** *Нека је  $M$  регуларан  $CW$ -комплекс и  $f$  дискретна Морсова функција на  $M$ . Тада је  $M$  хомотопски еквивалентан  $CW$ -комплексу који има по једну  $k$ -ћелију за сваку критичну ћелију индекса  $k$ .*

Претходна теорема представља један од главних мотива за развој дискретне теорије Морса. Њена кључна вредност лежи у томе што омогућава значајно поједностављење полазног комплекса уз потпуно очување његовог хомотопског типа, због чега се изузетно често примењује у пракси.

Приметимо да из теореме 2.5.3 добијамо и следећу очигледну последицу.

**Последица 2.5.1. (Слабе Морсове неједнакости)** *Нека је  $M$  регуларан  $CW$ -комплекс и  $f$  дискретна Морсова функција на  $M$ . Означимо са  $c_i$  број критичних ћелија димензије  $i$  за функцију  $f$ , а са  $\beta_i$  Бетијеве бројеве од  $M$ . Тада је*

$$c_i \geq \beta_i,$$

за све  $i = 0, 1, \dots, \dim(M)$ .

Стандардним техникама линеарне алгебре може се показати и јача верзија претходних неједнакости.

**Теорема 2.5.4. (Јаке Морсове неједнакости)** *Са ознакама као у последици 2.5.1, имамо да за све  $i = 0, 1, \dots, \dim(M)$  важи*

$$c_i - c_{i-1} + \dots + (-1)^i c_0 \geq \beta_i - \beta_{i-1} + \dots + (-1)^i \beta_0.$$

**Доказ.** Нека је комплекс  $M$  хомотопски еквивалентан  $CW$ -комплексу  $X$  који има тачно  $c_i$  ћелија димензије  $i$ . Посматрајмо његов ћелијски ланчасти комплекс са коефицијентима у пољу  $\mathbb{F}$ :

$$\cdots \longrightarrow C_{i+1}(X; \mathbb{F}) \xrightarrow{d_{i+1}} C_i(X; \mathbb{F}) \xrightarrow{d_i} C_{i-1}(X; \mathbb{F}) \longrightarrow \cdots$$

Како  $X$  има тачно  $c_i$  ћелија димензије  $i$ , важи  $\dim C_i(X; \mathbb{F}) = c_i$ . Означимо са  $r_i = \dim(\operatorname{Im} d_i)$ . Из теореме о рангу и дефекту, имамо

$$c_i = \dim(\ker d_i) + r_i.$$

Са друге стране, из  $H_i(X; \mathbb{F}) = \ker d_i / \operatorname{im} d_{i+1}$  следи

$$\dim \ker d_i = \beta_i + r_{i+1},$$

Према томе,

$$c_i = \beta_i + r_i + r_{i+1}.$$

Применом претходне једнакости за димензије  $0, 1, \dots, i$ , добијамо

$$c_i - c_{i-1} + \dots + (-1)^i c_0 = (\beta_i + r_i + r_{i+1}) - (\beta_{i-1} + r_{i-1} + r_i) + \dots + (-1)^i (\beta_0 + r_1).$$

Сви чланови који садрже  $r_1, \dots, r_i$  се међусобно поништавају, па остаје

$$c_i - c_{i-1} + \dots + (-1)^i c_0 = \beta_i - \beta_{i-1} + \dots + (-1)^i \beta_0 + r_{i+1}.$$

Пошто је  $r_{i+1} \geq 0$ , следи

$$c_i - c_{i-1} + \dots + (-1)^i c_0 \geq \beta_i - \beta_{i-1} + \dots + (-1)^i \beta_0,$$

што је и требало доказати. □

## 2.6 Морсова хомологија

Значајан аспект Морсове теорије јесте тај што нам омогућава рачунање хомологије многострукости (CW-комплекса) коришћењем критичних тачака (ћелија). Наиме, помоћу градијентних линија које спајају критичне тачке Морсове функције могуће је дефинисати ланчасти комплекс чија је хомологија изоморфна сингуларној хомологији глатке многострукости. У наставку, укратко изложимо теорију глатке Морсове хомологије, а затим прелазимо на дискретну верзију теорије коју је развио Форман [17].

### Глатка Морсова хомологија

У овом поглављу претпостављамо да је  $M$  компактна глатка многострукост димензије  $n$ . Детаљни докази резултата које изложимо могу се наћи у [4].

За  $i = 0, 1, \dots, n$ , означимо са  $\mathbb{M}_i$  слободну Абелову групу са базним елементом за сваку од критичних тачака индекса  $i$ . Желимо да дефинишемо гранични оператор  $\partial_i : \mathbb{M}_i \rightarrow \mathbb{M}_{i-1}$ , па нам је у циљу да на неки начин повежемо критичне тачке индекса  $i$  и индекса  $i - 1$ .

**Дефиниција 2.6.1.** Кажемо да псеудо-градијентно векторско поље  $X$  асоцирано Морсовој функцији  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  задовољава Смејлов услов уколико важи

$$W^u(p) \cap W^s(q) \quad \text{за све критичне тачке } p \text{ и } q.$$

Смејлов услов обезбеђује да је пресек  $W^u(p)$  и  $W^s(q)$  такође многострукост. Користећи теорему 1.2.4 лако се може показати да је димензија те многострукости  $\text{ind}(p) - \text{ind}(q)$ . Као скуп, таква многострукост се састоји од градијентних линија које „извиру” у  $p$ , а „виру” у  $q$ .

Малом пертурбацијом псеудо-градијентног векторског поља, може се постићи да функција и асоцирано јој псеудо-градијентно векторско поље задовоље Смејлов услов. Другим речима, Смејлов услов је генеричко својство, те ћемо у наставку поглавља подразумевати да је увек задовољено.

Адитивна група  $\mathbb{R}$  дејствује на многострукост  $W^u(p) \cap W^s(q)$  транслацијом  $\alpha \cdot \gamma(t) = \gamma(t + \alpha)$ , где је  $\gamma(t)$  градијентна трајекторија. Количнички простор

$$\mathcal{M}(p, q) := (W^u(p) \cap W^s(q)) / \mathbb{R}$$

називамо *модулски простор трајекторија*.  $\mathcal{M}(p, q)$  је многострукост димензије  $\text{ind}(p) - \text{ind}(q) - 1$ . Посебно ће нам важан бити случај  $\text{ind}(p) - \text{ind}(q) = 1$ . У том случају је модулски простор многострукост димензије 0. Штавише, може се доказати да је  $\mathcal{M}(p, q)$  компактан, а самим тим и коначан скуп. Избор одговарајуће оријентације на  $\mathcal{M}(p, q)$  ће нам омогућити да природно дефинишемо гранични оператор за чијом дефиницијом и трагамо.

За сваку критичну тачку  $p$  одаберимо оријентацију на  $W^u(p)$ . Ако је  $\gamma$  градијентна трајекторија од  $p$  до  $q$  имамо

$$TW^u(p) \cong T(W^u(p) \cap W^s(q)) \oplus TM / TW^s(q) \cong T_\gamma \mathcal{M}(p, q) \oplus T_\gamma \oplus T_q(W^u(q)).$$

Први изоморфизам следи из услова трансверзалности. Други изоморфизам следи из чињенице да је  $\dim \mathcal{M}(p, q) = \dim(W^u(p) \cap W^s(q)) - 1$ , а  $TM / TW^s(q) \cong T_q(W^u(q))$  добијамо транслацијом потпростора  $T_q(W^u(q))$  дуж  $\gamma$  тако да остане комплементаран простору  $TW^s(q)$ . Сада имамо индуковану оријентацију на  $\mathcal{M}(p, q)$  уколико тражимо да претходни изоморфизми чувају оријентацију. Коначно, гранични оператор  $\partial_i^M : \mathbb{M}_i \rightarrow \mathbb{M}_{i-1}$  задајемо на следећи начин:

$$\partial_i^M(p) = \sum_{q \in \mathbb{M}_{i-1}} n(p, q) \cdot q,$$

где је

$$n(p, q) = \sum_{\gamma \in \mathcal{M}(p, q)} \text{sign}(\gamma),$$

док се  $\text{sign}(\gamma)$  дефинише на следећи начин:  $\text{sign}(\gamma) = 1$  уколико се индукована оријентација на  $\gamma$  слаже са оријентацијом задатом помоћу тока псеудоградијентног векторског поља, а  $\text{sign}(\gamma) = -1$  уколико се са таквом оријентацијом не слаже.

**Напомена 2.6.1.** *Ако желимо да избегнемо „означено” бројање путева, можемо заборавити све оријентације и радити са коефицијентима  $\mathbb{F}_2$ , где ћемо онда само бројати трајекторије по модулу 2, у дефиницији  $n(p, q)$ .*

Може се показати да важи  $\partial_{i-1}^M \circ \partial_i^M = 0$ , односно  $(\mathbb{M}_*, \partial^M)$  је ланчasti комплекс. За детаљан доказ погледати [4].

**Дефиниција 2.6.2.** *Хомологију ланчastог комплекса  $(\mathbb{M}_*, \partial^M)$  називамо ланчка Морсова хомологија.*

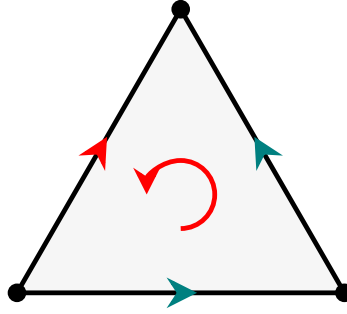
Морсова хомологија је канонски изоморфна сингуларној хомологији многострукости. Изоморфизам се постиже пресликавањем  $\theta_i : \mathbb{M}_i \rightarrow C_i(M)$  које слика тачку  $p$  индекса  $i$  у многострукост  $W^u(p)$  посматрану као ланац. Доказ је доста технички захтеван и може се наћи у [32]. Као директну последицу, можемо добити глатку верзију слабих и јаких Морсових неједнакости.

## Дискретна Морсова хомологија

Нека је  $M$  регуларан CW-комплекс. За почетак, дефинишимо  $\mathbb{M}_i$  као слободну Абелову групу генерисану ћелијама индекса  $i$ . Гранични оператор  $\partial_i^M : \mathbb{M}_i \rightarrow \mathbb{M}_{i-1}$ , по угледу на глатку верзију, биће одређен бројањем градијентних путева између ћелија суседних димензија.

У глатком случају, оријентације градијентних трајекторија између критичних тачака имале су удела у дефиницији граничног оператора. Стога је природно узети у обзир оријентације које су индуковане на градијентним путевима између критичних ћелија и у дискретном случају.

Означимо са  $C_i$  слободну Абелову групу генерисану ћелијама димензије  $i$ , а са  $\partial_i$  стандардни гранични оператор (помоћу ког дефинишемо ћелијску хомологију)



Слика 2.6: Оријентације (плаво) индуковане задатим оријентацијама (црвено).

$$\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}.$$

Тада је

$$\partial_i(\sigma) = \sum_{v^{(p-1)} < \sigma} \varepsilon(\sigma, v) v,$$

где су  $\varepsilon(\sigma, v)$  цели бројеви. Подсетимо се да је број  $\varepsilon(\sigma, v)$  дефинисан као степен пресликавања лепљења границе диска  $D^p$  (граница је сфера  $S^{i-1}$ ) помоћу карактеристичног пресликавања ћелије  $\sigma$  на количнички простор који је настао од  $(i-1)$ -скелетона од  $M$  идентификацијом свих ћелија димензије  $(i-1)$ , осим  $v$  (тај простор је опет сфера  $S^{i-1}$ ). Како је  $M$  регуларан,

$$\varepsilon(\sigma, v) \in \{-1, 1\}.$$

Нека су  $\sigma$  и  $\theta$  две различите  $p$ -ћелије, а  $\tau$   $(p+1)$ -ћелија чије су они стране. Уколико су оријентације на  $\sigma$  и  $\tau$  фиксиране, тада имамо индуковану оријентацију на  $\theta$  задату са

$$\varepsilon(\tau, \sigma) \cdot \varepsilon(\tau, \theta) = -1.$$

Слика 2.6 приказује индуковану оријентацију у случају да  $\tau$  представља 2-симплекс.

Фиксирајмо сада оријентацију на свим ћелијама од  $M$ . Нека је  $\gamma : \alpha_0 < \beta_0 > \alpha_1 < \beta_1 > \dots > \alpha_r$  градијентни пут. Оријентације на  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  индукују оријентацију на  $\alpha_1$ . Затим, индукована оријентација на  $\alpha_1$  и фиксирана оријентација на  $\beta_1$  индукују оријентацију на  $\alpha_2$ . Понављањем овог поступка добијамо индуковану оријентацију на  $\alpha_r$ .

Сада дефинишемо *знак* пута  $\gamma$ , у ознаци  $m(\gamma)$ , да буде 1 уколико се индукована и оријентација фиксирана на почетку ћелије  $\alpha_r$  поклапају, а  $-1$  у супротном. Алгебарски,  $m(\gamma)$  је задато са

$$m(\gamma) = \prod_{i=0}^{r-1} -\varepsilon(\beta_i, \alpha_i) \cdot \varepsilon(\beta_i, \alpha_{i+1}),$$

за  $r > 0$ . Уколико је пут дужине 0, знак пута дефинишемо да је 1.

Сада дефинишемо гранични оператор  $\partial_i^M : \mathbb{M}_i \rightarrow \mathbb{M}_{i-1}$  као

$$\partial_i^M(\tau) = \sum_{\sigma \in \mathbb{M}_{i-1}} n(\tau, \sigma) \cdot \sigma,$$

где је

$$n(\tau, \sigma) = \sum_{\theta^{(i-1)} < \tau} \varepsilon(\tau, \theta) \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma(\theta, \sigma)} m(\gamma),$$

при чему  $\Gamma(\theta, \sigma)$  представља скуп свих градијентних путева са почетком у  $\theta$  и крајем у  $\sigma$ .

Ово је заиста аналогно глатком случају, јер  $n(\tau, \sigma)$  „броји” градијентне путеве од  $(i-1)$ -ћелија од  $\tau^{(i)}$  до  $\sigma$ , баш као што је у глатком случају „бројало” градијентне путеве између критичних тачака. Фактор  $\varepsilon(\tau, \theta)$  одређује оријентацију при кретању од  $\tau$  ка странама које започињу градијентне путеве до  $\sigma$ , те је и он део дефиниције граничног оператора.

Слично глатком случају, важе следеће две теореме.

**Теорема 2.6.1.**  $(\mathbb{M}_*, \partial^M)$  је ланчасџи комплекс.

**Теорема 2.6.2.** Дискретна Морсова хомологија, односно хомологија комплекса  $(\mathbb{M}_*, \partial^M)$ , изоморфна је сингуларној хомологији.

Форман је индиректно показао ове две теореме у раду [17], док је Галаи у [19] предложио нешто директнији и краћи доказ у случају симплицијалних комплекса, који ћемо укратко прокоментарисати.

Што се тиче теореме 2.6.1, за критичне ћелије  $\mu \in \mathbb{M}_{i+1}$  и  $\sigma \in \mathbb{M}_{i-1}$ , имамо да је коефицијент уз  $\sigma$  при пресликавању  $\partial^M \circ \partial^M(\mu)$  једнак

$$\sum_{\tau \in \mathbb{M}_i} n(\mu, \tau) \cdot n(\tau, \sigma).$$

Расписивањем дефиниција за  $n(\mu, \tau)$  и  $n(\tau, \sigma)$ , у претходном изразу добијамо суму у којој сваки сабирак одговара путу насталом надовезивањем два градијентна пута, који повезује  $\mu$  и  $\sigma$ . Индукцијом по броју елемената у фамилији која дефинише градијентно векторско поље, може се показати да се ти путеви јављају у паровима са супротним знацима. Отуда је  $\partial^M \circ \partial^M = 0$ .

Доказ теореме 2.6.2 посматра симплицијални ланчasti комплекс, а затим се ослања на чињеницу да је за упарене ћелије  $\{\sigma^{(i-1)} < \tau^{(i)}\}$  могуће конструисати ланчasti комплекс хомотопски еквивалентан почетном (видети дефиницију 4.2.1), који у димензијама  $i$  и  $i - 1$  има по један базни елемент мање (ови елементи одговарају ћелијама  $\sigma$  и  $\tau$ ). Понављањем овог поступка, када се исцрпе све упарене ћелије, остаје ланчasti комплекс који садржи само критичне ћелије и изоморфан је  $(\mathbb{M}_*, \partial^M)$ . Детаљније о техници смањивања ланчастих група, којом се конструиса ланчasti комплекс хомотопски еквивалентан полазном комплексу, биће речи у глави 4.

Поглавље завршавамо навођењем примера у којем експлицитно можемо израчунати дискретну Морсову хомологију.

**Пример 2.6.1. Реална пројективна равна.** На слици 2.7 је приказано традијентно векторско поље на пројективној равни. Зелене стрелице задају дискретно традијентно векторско поље, црвене стрелице задају оријентацију на 1-ћелијама, а плаве непрекидане линије представљају традијентне путеве који су нам неопходни да би израчунали хомологију. Критичне ћелије су  $a^{(0)}$ ,  $\sigma^{(1)}$  и  $\tau^{(2)}$ .

За сваку 2-ћелију одаберимо оријентацију која се слаже са оријентацијом две 1-ћелије са границе. Избор знака  $+$  или  $-$  задају оријентацију на 0-ћелијама. Одаберимо позитивну оријентацију за све 0-ћелије. Ланчасте групе су  $\mathbb{M}_0 = \mathbb{Z}\langle a \rangle$ ,  $\mathbb{M}_1 = \mathbb{Z}\langle \sigma \rangle$  и  $\mathbb{M}_2 = \mathbb{Z}\langle \tau \rangle$ . Израчунајмо сада граничне операторе:

$$\partial_1^M(\sigma) = (\varepsilon(\sigma, a) \cdot 1) \cdot a + (\varepsilon(\sigma, c) \cdot m(\gamma)) \cdot a = (-1) \cdot a + 1 \cdot 1 \cdot a = -a + a = 0,$$

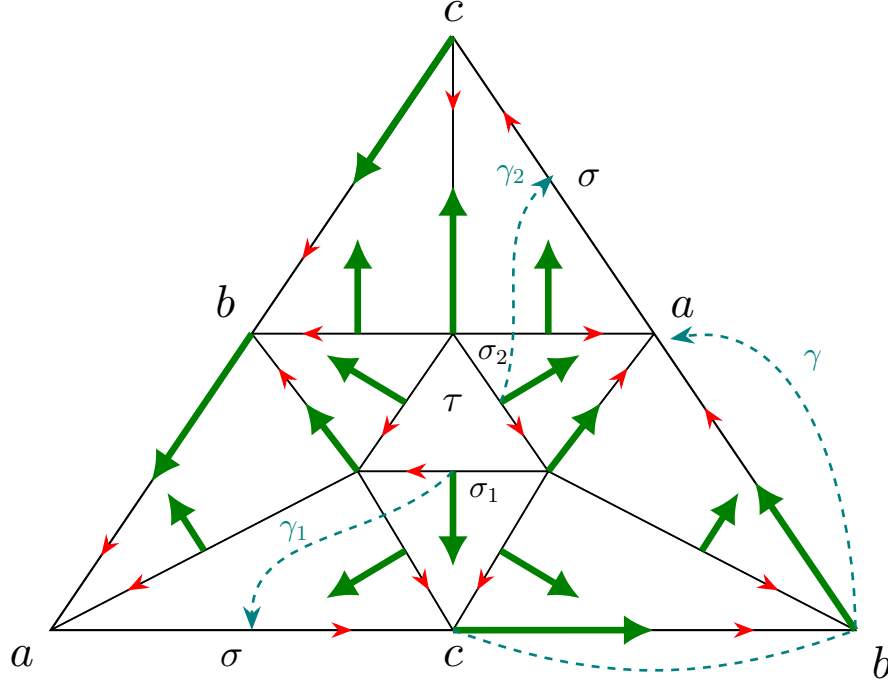
$$\partial_2^M(\tau) = (\varepsilon(\tau, \sigma_1) \cdot m(\gamma_1)) \cdot \sigma + (\varepsilon(\tau, \sigma_2) \cdot m(\gamma_2)) \cdot \sigma = 1 \cdot (-1) \cdot \sigma + 1 \cdot (-1) \cdot \sigma = -2\sigma.$$

Дакле, хомологија пројективне равни се може израчунавати помоћу комплекса:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\times(-2)} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Коначно, добијамо

$$H_0(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_i(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbf{0} \text{ за } i \geq 2.$$



Слика 2.7: Триангулација  $\mathbb{RP}^2$ : зелене стрелице – градијентно векторско поље; црвене стрелице – оријентације на 1-ћелијама; плаве испрекидане линије – градијентни путеви.

## 2.7 Примене

Дискретна теорија Морса има заиста бројне примене. Између осталог, користи се за одређивање хомотопског типа симплицијалних комплекса [26, 8], у теорији група [16], тополошкој анализи података [7], планирању кретања у роботизици [37] итд. Коришћена је чак и у доказу  $K(\pi, 1)$  хипотезе за афине Артинове групе [33], дугогодишњег отвореног проблема. У наставку, наводимо неке конкретне примене ове теорије.

### Пример 1: Комплекс неповезаних графова

Нека је  $K_n$  комплетан граф са  $n$  чворова. Различити подграф  $G \subseteq K_n$  је подграф који садржи свих  $n$  чворова. Означимо са  $\mathcal{N}_n$  фамилију неповезаних

разапињућих подграфа од  $K_n$ . За  $G_1$  и  $G_2$ , разапињуће подграфове од  $K_n$ , за које је  $G_2 \subseteq G_1$ , важи импликација

$$G_1 \in \mathcal{N}_n \implies G_2 \in \mathcal{N}_n.$$

Конструишимо симплицијални комплекс  $X_n$  чији скуп темена одговара скупу ивица графа  $K_n$ . Дакле, имамо  $\frac{1}{2}n(n-1)$  темена. Симплексима димензије  $k$  одговарају графови из  $\mathcal{N}_n$  који имају  $k+1$  грана. Стране симплекса који одговара графу  $G$  представљају нетривијални разапињући подграфови од  $G$ .

Хомотопски тип комплекса  $X_n$  је конструкцијом градијентног дискретног векторског поља израчунао Форман у [18]. Међутим, у доказу да је конструисано поље градијентно, постоји пропуст, на шта је указано у [29]. У истом раду је предложена алтернативан (и тачан) доказ, који у наставку излажемо.

**Теорема 2.7.1.** *За  $n \geq 3$ , комплекс  $X_n$  је хомотопски еквивалентан букећу  $(n-1)!$  сфера  $S^{n-3}$ .*

**Доказ. Конструкција градијентног поља  $V$ :**

Индуктивно конструишемо дискретно векторско поље  $V$  на  $X_n$ , на следећи начин. Означимо са  $\{1, 2, \dots, n\}$  чворове комплетног графа  $K_n$  (а самим тим и сваког графа  $X_n$ ), а са  $e_{ij}$  грану која спаја чворове  $i$  и  $j$ . Нека је  $V_2$  дискретно векторско поље које се састоји од парова  $\{G < G + e_{12}\}$ , где  $e_{12} \notin G$  и  $G, G + e_{12} \in \mathcal{N}_n$ . Приметимо да је граф  $G_0$ , који се састоји од само гране  $e_{12}$ , критичан за  $V_2$ . Поред  $G_0$ , графови који су критични у  $V_2$  се могу описати као

$$e_{12} \notin G, \quad G + e_{12} \text{ је повезан.}$$

Такав граф  $G$  има тачно две компоненте повезаности,  $G_1$  и  $G_2$ , које садрже чворове 1 и 2, редом. Чвор 3 припада тачно једној од компоненти  $G_1$  и  $G_2$ . Ако  $3 \in G_1$  и  $e_{13} \notin G$ , граф  $G + e_{13}$  је критичан у  $V_2$ . Стога додајмо пар  $\{G < G + e_{13}\}$ . Слично, ако  $3 \in G_2$  и  $e_{23} \notin G$ , додајмо пар  $\{G < G + e_{23}\}$ . Означимо са  $V_3$  добијено дискретно векторско поље. Критични графови  $G$  у  $V_3$  су они који задовољавају да  $e_{13} \in G$  (одн.  $e_{23} \in G$ ) и  $G - e_{13}$  (одн.  $G - e_{23}$ ) се састоји од тачно три компоненте повезаности које одговарају чворовима 1, 2 и 3.

За  $n \geq 4$ , критичне графове  $G$  у  $V_3$  упаримо са  $G + e_{14}$ , или  $G + e_{24}$  или  $G + e_{34}$ , уколико је то могуће (највише један од ова три графа је критичан у  $V_3$ ).

Тиме добијамо дискретно векторско поље  $V_4$ . Наставимо ову конструкцију векторских поља за чворове  $5, 6, \dots, n$ , и дефинишимо  $V := V_n$ .

Критични графови у  $V$  су  $G_0$  и они графови који су унија два стабла (стабло – повезан граф без циклуса), од којих једно садржи чвор 1, а друго чвор 2. Додатно, за оба стабла важи да дуж сваког пута који почиње у 1, односно 2, бројеви на чворовима расту. Сада ћемо пребројати такве графове.

Приметимо да за сваки чвор  $3, 4, \dots, n$ , важи да његов претходник на јединственом путу до корена 1 или 2 има мању ознаку. Дакле, чвор  $k$  може да се повеже са било којим од чворова

$$1, 2, \dots, k-1,$$

што је  $k-1$  опција. Стога, тражених графова има  $2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) = (n-1)!$ , и сваки од њих има  $(n-2)$  гране, те одговара  $(n-3)$ -симплексу.

**Доказ да је  $V$  градијентно:**

Покажимо да је  $V$  градијентно, тј. да нема нетривијалних затворених  $V$ -путева. За почетак,  $V_2$  је градијентно. Заиста, ако је  $\gamma = \alpha_0 < \beta_0 > \alpha_1$  један  $V_2$ -пут, имамо  $\beta_0 = \alpha_0 + e_{12}$  и  $\alpha_1 = \alpha_0 + e_{12} - e$ , за неку грану  $e \neq e_{12}$ . Дакле,  $e_{12} \in \alpha_1$ , па се  $\gamma$  не може продужити до дужег  $V_2$ -пута.

Претпоставимо сада да постоји нетривијалан затворен  $V$ -пут

$$\gamma : \alpha_0 < \beta_0 > \alpha_1 < \beta_1 > \dots \alpha_r < \beta_r > \alpha_{r+1} = \alpha_0.$$

Како  $V_2$  нема затворене путеве, можемо претпоставити да је  $\{\alpha_0 < \beta_0\}$  први пут упарено у  $V_k$ , за неко  $k \geq 3$ . Из конструкције поља  $V$ , знамо да важи  $\beta_0 = \alpha_0 + e_{jk}$ , за неко  $j < k$ .

Нека је  $t$ , уколико постоји, најмањи елемент скупа  $\{1, \dots, r\}$  за који важи да граф  $\alpha_t$  има више од две компоненте повезаности. Тада су чворови 1 и 2 у две различите компоненте од  $\alpha_t$  и важи  $\beta_t = \alpha_t + e_{12}$ . Тада је  $\alpha_{t+1} \neq \alpha_t$  граф који садржи грану  $e_{12}$  и у упарен је први пут у  $V_2$ . Стога се  $\gamma$  не може наставити, што је немогуће. Дакле, можемо претпоставити да сви  $\alpha_i$ , а самим тим и  $\beta_i$ , имају тачно две компоненте повезаности.

Нека је сада  $F$  подграф од  $\alpha_0$  индукован чворовима  $\{1, 2, \dots, k-1\}$ . По конструкцији,  $F$  је унија два дисјунктна стабла – једног које садржи чвор 1, и једног које садржи чвор 2. Како свако  $\alpha_i$  садржи две компоненте повезаности, то је подграф индукован чворовима  $\{1, 2, \dots, k-1\}$  и у таквим графовима баш  $F$ . То специјално повлачи да ниједан  $\alpha_i$  није упарен у  $V_{k-1}$ .

Означимо са  $H_i$  компоненту повезаности графа  $\alpha_i \setminus E(F)$  (граф који настаје од  $\alpha_i$  избацавањем свих грана у  $F$ ) која садржи чвор  $k$ . Од свих чворова  $\{1, 2, \dots, k-1\}$ , само чвор  $j$  припада  $H_0$ , а самим тим и сваком  $H_i$ . Како је  $\beta_0 = \alpha_0 + e_{jk}$ , следи  $e_{jk} \in \alpha_1$ . Међутим,  $\gamma$  је затворен  $V$ -пут, па се дуж њега у неком тренутку мора избацити грана  $e_{jk}$ . Нека је  $l$  најмањи индекс из скупа  $\{2, \dots, r+1\}$  за који важи  $e_{jk} \notin \alpha_l$ , односно  $\alpha_l = \beta_{l-1} - e_{jk}$ . Пошто је  $H_l$  повезан граф који садржи чвор  $j$ , а  $\alpha_l$  није упарен у  $V_{k-1}$ , конструкција поља  $V_k$  налаже да он мора бити упарен са  $\beta_{l-1}$ , тј.  $\{\alpha_l < \beta_{l-1}\} \in V_k$ , што је немогуће (већ важи  $\{\alpha_{l-1} < \beta_{l-1}\} \in V_k$ ). По теорему 2.2.2,  $V$ -је градијентно.

Коначно, на основу теореме 2.5.3,  $X_n$  је хомотопски еквивалентно  $CW$ -комплексу који има једну 0-ћелију и  $(n-1)!$  ћелија димензије  $n-3$ . Одавде следи тврђење теореме.  $\square$

## Пример 2: Даукерова теорема

У овом одељку приказујемо недавну примену дискретне Морсове теорије на класичну теорему Даукера у раду [11].

Нека су  $X$  и  $Y$  коначни скупови и нека је  $\mathbf{R} \subseteq X \times Y$  бинарна релација. За  $x \in X$  и  $y \in Y$  писаћемо  $x\mathbf{R}y$  уколико  $(x, y) \in \mathbf{R}$ . Општије, за  $U \subseteq X$  и  $V \subseteq Y$  пишемо  $U\mathbf{R}V$  уколико је  $u\mathbf{R}v$  за свако  $u \in U$  и  $v \in V$ . За подскуп  $U \subseteq X$  кажемо да  $y \in Y$  представља његовог  $Y$ -суседа ако важи  $U\mathbf{R}\{y\}$ . Аналогно се дефинише појам  $X$ -суседа за  $V \subseteq Y$ .

Означимо са  $C_X$  фамилију подскупова  $U \subseteq X$  за које постоји  $Y$ -сусед. Аналогно дефинишемо фамилију  $C_Y$ . Јасно,  $C_X$  и  $C_Y$  имају структуру симплицијалног комплекса над скуповима  $X$  и  $Y$ , редом. Ови комплекси називају се редом *леви* и *десни Даукеров комплекс* релације  $\mathbf{R}$ .

Даукерова теорема тврди да су ови комплекси хомотопски еквивалентни.

**Теорема 2.7.2 (Даукерова теорема, 1952).** Нека је  $\mathbf{R} \subseteq X \times Y$  бинарна релација између два коначна скупа. Тада важи

$$C_X \simeq C_Y.$$

Можемо претпоставити да су скупови  $X$  и  $Y$  дисјунктни. Ово не представља ограничење, јер их у општем случају можемо заменити дисјунктним копијама  $\tilde{X} = X \times \{0\}$ ,  $\tilde{Y} = Y \times \{1\}$ , и релацијом  $(x, 0)\tilde{\mathbf{R}}(y, 1) \iff x\mathbf{R}y$ . Даукерови комплекси релације  $\tilde{\mathbf{R}}$  су изоморфни почетним.

Основна идеја доказа заснива се на конструкцији симплицијалног комплекса  $B$  који истовремено садржи  $C_X$  и  $C_Y$ . Након тога, дефинисањем дискретног градијентног векторског поља на  $B$ , чије критичне ћелије одговарају ћелијама комплекса  $C_X$ , добија се  $B \searrow C_X$ . Аналогно се показује и  $B \searrow C_Y$ , одакле директно следи тврђење Даукерове теореме. Сада наводимо дефиницију таквог комплекса  $B$ .

**Дефиниција 2.7.1.** Нека је  $X \cap Y = \emptyset$ . Биклика релације  $\mathbf{R}$  је скуп облика  $U \cup V$ , где су  $\emptyset \neq U \subseteq X$  и  $\emptyset \neq V \subseteq Y$  такви да важи  $URV$ . Биклика-комплекс релације  $\mathbf{R}$  дефинишемо као

$$B := C_X \cup C_Y \cup \{\text{биклике}\}.$$

Заиста,  $B$  је симплицијални комплекс, што се да лако показати.

Следећа лема ће нам бити од кључног значаја. Она нам пружа користан начин да на основу одређене функције конструишемо дискретно градијентно векторско поље на произвољном симплицијалном комплексу.

**Лема 2.7.1.** Нека је  $K$  симплицијални комплекс над топологијски уређеним скупом темена  $W$  (видети дефиницију 3.1.1). Нека је  $M$  подскуп од  $K$ . Претпоставимо да функција  $f : M \rightarrow W$  задовољава следећа два услова:

- За све  $F \in M$ , важи  $F \cup \{f(F)\}, F \setminus \{f(F)\} \in M$  и

$$f(F \cup \{f(F)\}) = f(F) = f(F \setminus \{f(F)\}).$$

- За све  $F, G \in M$  за које важи  $G \subseteq F$ , имамо  $f(G) \leq f(F)$ .

Тада је дискретно векторско поље  $V$  дајо са

- $\{F \setminus \{f(F)\} < F\} \in V$ , за  $f(F) \in F$ ,
- $\{F < F \cup \{f(F)\}\} \in V$ , за  $f(F) \notin F$

градијентно.

**Доказ.** Најпре, приметимо да је  $V$  добро дефинисано дискретно векторско поље. Заиста, ако је  $F \in M$ , онда је  $F$  упарена са симплексом који се добија додавањем, односно уклањањем темена  $f(F)$ . Први услов обезбеђује да се на оба симплекса једног пара функција  $f$  подудара, те се сваки симплекс налази у највише једном пару.

Покажимо да  $V$  нема нетривијалних затворених  $V$ -путева. Нека је

$$\alpha_0 < \beta_0 > \alpha_1 < \beta_1 > \dots$$

један  $V$ -пут. За све  $i$  важи  $\beta_i = \alpha_i \cup \{f(\alpha_i)\}$  и  $f(\beta_i) = f(\alpha_i)$ . Како је  $\alpha_{i+1} \neq \alpha_i$ , имамо  $f(\alpha_i) \in \alpha_{i+1}$ . Такође, важи  $f(\alpha_{i+1}) \notin \alpha_{i+1}$ , па је  $f(\alpha_{i+1}) \neq f(\alpha_i)$ . Како је  $\alpha_{i+1} \subseteq \beta_i$ , из другог услова следи  $f(\alpha_{i+1}) \leq f(\beta_i) = f(\alpha_i)$ , односно имамо  $f(\alpha_{i+1}) < f(\alpha_i)$ . Дакле, вредности функције  $f$  строго опадају дуж сваког нетривијалног  $V$ -пута. Зато такав пут не може бити затворен. На основу теореме 2.2.2,  $V$  је градијентно дискретно векторско поље.  $\square$

**Теорема 2.7.3.** *Биклика-комплекс  $B$  колајсира на  $C_X$  и на  $C_Y$ .*

**Доказ.** Због симетрије, довољно је показати да важи  $B \searrow C_X$ . Нека је  $M := B \setminus C_X$ . Најпре, приметимо да за свако  $F \in M$  скуп  $F \cap Y$  није празан и има  $X$ -суседа. Заиста, пошто  $F \notin C_X$ , скуп  $F$  није садржан у  $X$ . Ако је  $F$  биклика, тврђење непосредно следи из дефиниције биклике. Ако  $F$  није биклика, из  $F \in B \setminus C_X$  следи  $F \in C_Y$ , па  $F = F \cap Y$  по дефиницији има  $X$ -суседа.

Фиксирајмо произвољно тотално уређење на  $X \cup Y$ . За  $F \in M$ , дефинишимо  $f : M \rightarrow X \cup Y$  као

$$f(F) := \min\{x \in X \mid x \text{ је } X\text{-сусед скупа } F \cap Y\}.$$

Показаћемо да овако дефинисана функција задовољава услове леме 2.7.1.

Нека је  $F \in M$  и означимо  $F^+ = F \cup \{f(F)\}$ ,  $F^- = F \setminus \{f(F)\}$ . Како је  $f(F) \in X$ , очигледно важи  $F^+ \cap Y = F \cap Y = F^- \cap Y \neq \emptyset$ . Пошто је  $F^- \subseteq F$  и  $B$  је симплицијални комплекс, важи  $F^- \in B$ . Такође,  $F^- \cap Y \neq \emptyset$ , па  $F^- \notin C_X$ . Дакле,  $F^- \in M$ .

Покажимо да важи и  $F^+ \in M$ . Ако је  $F$  биклика, запишимо  $F = U \cup V$ , где су  $\emptyset \neq U \subseteq X$  и  $\emptyset \neq V \subseteq Y$ , и  $URV$ . Тада је  $V = F \cap Y$ , а  $f(F)$  је  $X$ -сусед од  $V$ , па

$$(U \cup \{f(F)\})RV.$$

Стога је  $F^+ = (U \cup \{f(F)\}) \cup V$  поново биклика. Ако  $F \in C_Y$ , онда је  $F \subseteq Y$ , па из чињенице да је  $f(F)$   $X$ -сусед од  $F$  следи да је  $\{f(F)\} \cup F$  биклика. У оба случаја  $F^+ \in B$ . Пошто је  $F^+ \cap Y \neq \emptyset$ , имамо  $F^+ \notin C_X$ , те је  $F^+ \in M$ .

Како скупови  $F$ ,  $F^+$  и  $F^-$  имају исти пресек са  $Y$ , имају и исти скуп  $X$ -суседа. Зато

$$f(F^+) = f(F) = f(F^-).$$

Тиме је испуњен први услов леме 2.7.1.

Нека сада  $G, F \in M$  и  $G \subseteq F$ . Тада је  $G \cap Y \subseteq F \cap Y$ . Сваки  $X$ -сусед скупа  $F \cap Y$  уједно је и  $X$ -сусед скупа  $G \cap Y$ . Пошто су  $f(F)$  и  $f(G)$  најмањи такви суседи, следи

$$f(G) \leq f(F).$$

Дакле, испуњен је и други услов леме 2.7.1.

Према тој леми, на  $B$  постоји градијентно дискретно векторско поље које упарује све симплексе из  $M$ . Његове критичне ћелије су тачно симплекси комплекса  $C_X$ , па по теорему 2.4.2 закључујемо

$$B \searrow C_X.$$

Тиме је доказ завршен.

□

**Последица 2.7.1.** *Комплекси  $C_X$  и  $C_Y$  су хомотопски еквивалентни.*

## Глава 3

# Веза глатке и дискретне Морсове теорије

Поставимо следеће природно питање: Да ли постоји директна веза између глатке и дискретне Морсове теорије? Прецизније, да ли за Морсову функцију  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  на глаткој многострукости  $M$  постоји дискретна Морсова функција на ћелијској декомпозицији од  $M$  која ју опонаша. Заслуга за први резултат у овом правцу иде Галаију, који је у раду [19] показао следеће:

**Теорема 3.0.1.** *Нека је  $M$  компактна многострукост,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  Морсова функција и  $X$  псеудо-традијентно векторско поље. Тада на  $M$  постоји триангулација  $T$  и дискретно традијентно векторско поље  $V$ , при чему важи:*

- *Постоји бијекција између критичних тачака функције  $f$  индекса  $i$  и критичних  $i$ -ћелија дискретне Морсове функције асоциране  $V$ .*
- *Уколико су  $\sigma_p$  и  $\sigma_q$  критичне ћелије које одговарају критичним тачкама  $p$  и  $q$  и важи  $\dim(\sigma_p) = \dim(\sigma_q) + 1$ , тада постоји бијекција између  $V$ -линеара који повезују границу  $\sigma_p$  и  $\sigma_q$  и интегралних кривих од  $X$  које спајају  $q$  и  $p$ .*

Доказ претходне теореме садржи мали пропуст, на шта је указао Бенедети у [9]. Наиме, није познато да ли је свака триангулација симплекса колапсибилна [25, проблем 4.18], што је Галаи имплицитно користио у доказу. Срећом, у раду [1] су Бенедети и Адипрасито показали да је барицентрична подела произвољне триангулације симплекса колапсибилна. Тим резултатом

се доказ може поправити посматрањем барицентричне поделе триангулације коју је првобитно конструисао Галаи. Штавише, Бенедети је у [9] показао наредно општије тврђење.

**Теорема 3.0.2.** *Нека је  $M$  глатка компактна многострукост и  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  Морсова функција са  $c_i$  критичних тачака индекса  $i$ . Тада за било коју PL-триангулацију<sup>1</sup>  $T$  од  $M$  постоји цео број  $r \geq 0$  за који важи да на  $r$ -тој барицентричној модели  $\text{sd}^r(T)$  постоји дискретна Морсова функција са  $c_i$  критичних ћелија индекса  $i$ .*

Што се тиче другог смера, односно, питања да ли од дискретне Морсове функције на PL-триангулацији глатке многострукости са  $c_i$  критичних  $i$ -ћелија можемо да реконструисемо глатку Морсову функцију са  $c_i$  критичних тачака индекса  $i$ , познат је само парцијални резултат. Наиме, у ниским димензијама, резултати Манкреса [30] и Хирша [23] дају наредну теорему.

**Теорема 3.0.3.** *Нека је  $M$  PL-многострукост димензије  $n \leq 7$  која поседује PL-декомпозицију на  $c_i$  ручки димензије  $i$ . Тада  $M$  има глатку структуру и декомпозицију на  $c_i$  глатких  $i$ -ручки.*

У наставку показујемо да дискретне Морсове функције индукују PL-декомпозицију на ручке (теорема 3.6.1), што, у комбинацији са теоремом 3.0.3 и теоремом 1.4.5, даје да је, до димензије 7, одговор на наше питање потврдан.

Кључни циљ ове главе је излагање доказа теореме 3.0.2, ка чему сада усмеравамо пажњу.

## 3.1 Симплицијални комплекси

Нека је  $S = \{p_0, p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$  коначан скуп тачака. Означимо са  $\text{conv}(p_0, p_1, \dots, p_n)$  конвексан омотач скупа  $S$ . Уколико су тачке  $p_0, p_1, \dots, p_n$  афино независне ( $p_i - p_0$ , при чему је  $i \neq 0$ , су линеарно независни вектори),  $\text{conv}(p_0, p_1, \dots, p_n)$  називамо  $n$ -димензионални симплекс. Страна симплекса је конвексан омотач било ког подскупа од  $S$ .

**Дефиниција 3.1.1.** *Симплицијални комплекс  $K$  је фамилија симплекса која задовољава:*

---

<sup>1</sup>видети дефиницију 3.2.2.

1. Ако  $\sigma \in K$  и  $\tau$  је ситрана од  $\sigma$ , тада и  $\tau \in K$ .
2. За свака два симплекса  $\sigma, \tau \in K$  који имају непразан пресек важи да је  $\sigma \cap \tau$  ситрана сваког од њих.

Димензија симплицијалног комплекса је  $\dim(K) = \max\{\dim(\sigma) : \sigma \in K\}$ . Симплексе димензије 0 називамо теменима од  $K$ .

Симплицијални комплекс  $K$  природно задаје тополошки простор

$$|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma.$$

$K$  можемо видети и као посет својих страна уређен инклузијом. Прецизније, као посет подскупова скупа темена, при чему је свака страна јединствено одређена својим теменима. Симплицијални комплекси су комбинаторно еквивалентни уколико су изоморфни као посети.

Максималне стране у посету називамо тлоснима. Уколико су све тлосни исте димензије, тада кажемо да је  $K$  чист симплицијалан комплекс. Подскуп  $T \subseteq K$  је поткомплекс од  $K$  уколико је  $T$  такође симплицијални комплекс.

**Дефиниција 3.1.2.** За ситрану  $\sigma$  симплицијалног комплекса  $K$ , дефинишемо следеће поткомплексе:

- $\text{star}(\sigma, K) := \{\tau \in K : \sigma \cup \tau \in K\}$ .
- $\text{link}(\sigma, K) := \{\tau \in K : \sigma \cap \tau = \emptyset, \sigma \cup \tau \in K\}$ .

Интуитивно,  $\text{star}(\sigma, K)$  је најмања околина од  $\sigma$  која је поткомплекс, а  $\text{link}(\sigma, K)$  је граница тог поткомплекса.

Једна од кључних ствари при раду са симплицијалним комплексима јесте могућност поделе страна комплекса.

**Дефиниција 3.1.3.** Нека су  $K$  и  $L$  симплицијални комплекси за које важи  $|K| = |L|$ . Кажемо да је  $L$  потподела од  $K$  уколико је свака ситрана од  $L$  садржана у некој ситрани од  $K$ .

**Дефиниција 3.1.4.** Триангулација многострукости  $M$  је симплицијални комплекс  $K$  за који важи  $|K| \approx M$ .

## 3.2 PL-многострукости

Дефиницију  $PL^2$ -многострукости даћемо у комбинаторном стилу, без потребе за атласом, као што је то стандардно у случају глатких многострукости. Наиме, постоји дефиниција  $PL$ -многострукости преко атласа чије су функције преласка део-по-део линеарна пресликавања, али је ова дефиниција еквивалентна оној коју ћемо ми навести.

За почетак, дефинишемо појам изоморфизма између објеката у  $PL$  категорији. Два симплицијална комплекса су  $PL$ -хомеоморфна уколико постоје потподеле оба комплекса које су комбинаторно еквивалентне.  $PL$   $n$ -лопта (одн.  $PL$   $n$ -сфера) је симплицијални комплекс  $PL$ -хомеоморфан симплексу димензије  $n$  (одн. граници симплекса димензије  $n + 1$ ).

**Дефиниција 3.2.1.**  $PL$ -многострукости димензије  $n$  је симплицијални комплекс  $M$  такав да је за свако шеме  $\sigma$ ,  $\text{star}(\sigma, M)$   $PL$ -лота димензије  $n$ .

**Дефиниција 3.2.2.** Триангулација многострукости  $M$  која задаје  $PL$ -структуру на  $M$  се назива  $PL$ -триангулацијом многострукости  $M$ .

**Дефиниција 3.2.3.** Граница  $PL$ -многострукости  $M$  је скуп страна  $\sigma$  за које је  $\text{link}(\sigma, M)$  хомеоморфан диску.

У природност претходне дефиниције нас може уверити слика 3.1.

## 3.3 $PL$ -триангулација глатких многострукости

Кернс је у раду [13] показао да свака глатка многострукост има  $PL$ -триангулацију. Укратко ћемо изложити његову конструкцију.

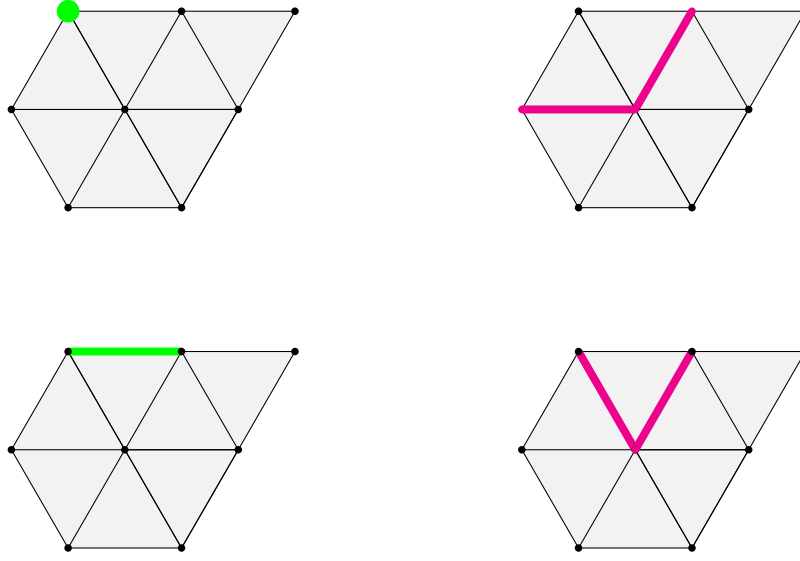
Глатку компактну многострукост  $M$  димензије  $n$  можемо дифеоморфно уложити у  $\mathbb{R}^{2n}$ , по Витнијевој теореме о улагању. За  $\varepsilon > 0$ , одаберимо коначан скуп тачака  $x_1, x_2, \dots, x_k$  са  $M$  такв да

$$\bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon) \supset M,$$

где  $B(x, \varepsilon)$  означава отворену лопту полупречника  $\varepsilon$  са центром у  $x \in \mathbb{R}^{2n}$ . Сада конструишемо Воронојев дијаграм задат тачкама  $x_i$ . Воронојев дијаграм

---

<sup>2</sup>скраћеница  $PL$  долази од *piecewise linear*, односно део по део линеарно.



Слика 3.1: Линкови (розе) граничних ћелија (зелено) PL-многострукости.

представља партицију простора  $\mathbb{R}^{2n}$  на скупове  $U_i := \{x \in \mathbb{R}^{2n} : \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\|, \text{ за све } j \neq i\}$ . За довољно мало  $\varepsilon$ , Кернс је показао да су скупови  $C_i := M \cap U_i$  ћелије димензије  $n$ , као и да су  $C_i \cap C_j$  такође ћелије. Фамилија ћелија  $C_i$  формира регуларан ћелијски комплекс, те његова барицентрична подела задаје PL-триангулацију на  $M$ . Оваква триангулација је јединствена до на PL-хомеоморфизам [38]. Конструкција се може проширити и на случај некомпактних многострукости [12].

Иако свака глатка структура на многострукости задаје PL-структуру на истој, обрнуто није тачно. Постоје PL-многострукости које поседују више глатких структура, или ниједну. Додуше, у димензијама мањим од 7, постоји јединствена глатка структура за сваку PL-структуру. За детаљан преглед PL и глатких структура на многострукостима видети [9].

### 3.4 Разложиви и ендоколапсибилни симплицијални комплекси

**Дефиниција 3.4.1** ([10, дефиниција 2.17]). *Симплицијални комплекс  $K$  који је тополошка мношћуросћи димензије  $n$  са нећуразном ћураницом је ендоколапсибићлан уколико избацивањем ћуризовћљне  $n$ -сћуране новонасћућали ко-мћулекс колапсира на ћураницу од  $K$ .*

**Дефиниција 3.4.2.** *Разлајање (енг. *shelling*) чистог симплицијалног комплекса  $K$  димензије  $n$  је линеарно уређење његових њосни  $F_1, F_2, \dots, F_s$  такво да је  $F_i \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} F_j$  чист комплекс димензије  $n-1$  за све  $1 < i \leq s$ .  $K$  је разложив (енг. *shellable*) уколико постоји његово разлајање.*

Укратко, разложив комплекс је онај који можемо итеративно формирати лепљењем плосни на „леп начин“.

**Пример 3.4.1.** *Границе симплекса су разложиви комплекси. Заиста, одаберимо произвољно уређење њосни  $F_0, F_1, \dots, F_n$  неког  $n$ -симплекса.  $F_i \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} F_j$  је скуп неких  $(n-2)$ -ћелија са  $\partial F_i$ , што је чист комплекс, те произвољно уређење њосни задаје разлајање границе симплекса.*

Разложиве лопте су ендоколапсибилне, док обрат није тачан (за детаље видети [10]). Ову особину издвајамо као посебну лему.

**Лема 3.4.1.** *Разложива лопта је ендоколапсибилна.*

Означимо са  $\text{sd}^r(M)$   $r$ -ту барицентричну поделу симплицијалног комплекса  $M$ . Бенедети и Адипрасито су показали да свака PL-лопта постаје разложива након коначно много барицентричних подела [2].

**Лема 3.4.2.** *За сваку PL-триангулацију лопте  $B$  постоји  $r$  за које важи да је  $\text{sd}^r(B)$  разложив комплекс.*

## 3.5 Индукована дискретна Морсова функција

У овом делу ћемо видети како глатка Морсова функција индукује дискретну Морсову функцију на PL-триангулацији многострукости, што ће уједно и доказати теорему 3.0.2.

За почетак, лепљење  $i$ -ручке  $H^{(i)}$  на многострукост  $M$  димензије  $n$  има смисла и у PL и у тополошкој категорији. Једина разлика је у томе што ћемо комплексе (одн. тополошке просторе)  $H^{(i)}$  и  $M$  лепити преко PL-улагања (одн. тополошког улагања) комплекса (одн. тополошког простора)  $S^{i-1} \times D^{n-i}$  на  $\partial M$ .

Овде ћемо навести један технички резултат (видети [15, теорема 14.1]) који касније користимо.

**Лема 3.5.1.** *Уколико  $PL$ -многострукост  $K$  има тополошку декомпозицију на ручке, тада за неко  $r > 0$  комплекс  $sd^r(K)$  има  $PL$ -декомпозицију на ручке са истим вектором ручки.*

Видели смо како се може добити  $PL$ -триангулација глатке многострукости и глатка декомпозиција на ручке помоћу Морсове функције.  $PL$ -триангулацијом сваке ручке посебно добијамо  $PL$  декомпозицију многострукости на ручке са истим вектором ручки као у глатком случају.

**Дефиниција 3.5.1.** *Нека је  $f$  глатка (дискретна) Морсова функција на многострукости димензије  $d$ . Уколико  $f$  има  $c_i$  критичних тачака (ћелија) индекса  $i$ , вектор  $(c_0, c_1, \dots, c_d)$  називамо Морсовим вектором функције  $f$ .*

**Дефиниција 3.5.2.** *Дискретна Морсова функција  $f$  на многострукости са границом (могуће празном) димензије  $d$  се назива гранично-критична уколико су све ћелије са границе критичне. Ако  $f$  има тачно  $c_i$  критичних  $i$ -ћелија у унутрашњости, вектор  $(c_0, c_1, \dots, c_d)$  називамо унутрашњим Морсовим вектором функције  $f$ .*

Нека је  $(c_0, c_1, \dots, c_d)$  Морсов вектор глатке Морсове функције  $f$ . Како је и  $-f$  Морсова, добијамо да је  $(c_d, c_{d-1}, \dots, c_0)$ , такође, Морсов вектор. Међутим, у дискретном случају, ако је  $g$  дискретна Морсова функција,  $-g$  то није. Стога је Форман увео објекат који игра улогу функције  $-g$  (у случају триангулације затворених многострукости). То ће бити дискретна Морсова функција на дуалном блок комплексу триангулације (за дефиницију видети [31, стр. 377]). Помоћу тога, показао је:

**Теорема 3.5.1.** *Нека је  $(c_0, c_1, \dots, c_d)$  дискретан Морсов вектор на некој  $PL$ -триангулацији затворене многострукости. Тада је  $(c_d, c_{d-1}, \dots, c_0)$  дискретан Морсов вектор на барицентричној подели те триангулације.*

Бенедети је претходну теорему уопштио на многострукости са границом, и у [10] доказао:

**Лема 3.5.2.** *Нека је  $M$   $PL$ -многострукост димензије  $d$  и  $f$  дискретна (одн. гранично-критична дискретна) Морсова функција на  $M$  са Морсовим (одн. унутрашњим Морсовим) вектором  $(c_0, c_1, \dots, c_d)$ . Тада постоји  $r$  такво да на  $sd^r(M)$  постоји дискретна гранично-критична (одн. дискретна) Морсова функција са унутрашњим Морсовим (одн. Морсовим) вектором  $(c_d, c_{d-1}, \dots, c_0)$ .*

Лема 3.5.2 и наредне две помоћне леме ће бити кључне у доказу главне теореме.

**Лема 3.5.3.** *Нека је  $M = B_1 \cup B_2$  унија две ендоколапсибилне  $d$ -лопте. Претпоставимо да важи:*

- $B_1 \cap B_2$  је  $(d-1)$ -димензионални поткомплекс од  $\partial B_1$  и  $\partial B_2$ .
- $B_1 \cap B_2$  је хомеоморфно  $S^{j-1} \times D^{d-j}$  за неко  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ .

Тада се свака гранично-критична дискретна Морсова функција  $h$  на  $B_1 \cap B_2$ , која има критичну  $(d-1)$ -ћелију  $\sigma$ , може проширити до гранично-критичне дискретне Морсове функције  $g$  на  $M$  чије су унутрашње критичне ћелије управо критичне ћелије функције  $h$ , уз уклањање  $\sigma$  и додавање једне  $d$ -ћелије.

**Доказ.** У наставку доказа, за комплекс  $B$  и подскуп  $C \subset B$ , максималан поткомплекс од  $B$  који не садржи  $C$  означавамо са  $B - C$ .

Нека су  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$   $d$ -стране од  $M$  које садрже  $\sigma$ , при чему  $\Sigma_i \in B_i$  за  $i = 1, 2$ .  $B_1$  је ендоколапсибилна, те  $B_1 - \Sigma_1$  колапсира на  $\partial B_1$ . Слободне стране које се избацују овим колапсирањем су у унутрашњости од  $B_1$ , те се лепљењем  $B_2$  на  $\partial B_1$  не нарушава слободност ниједне стране. Другим речима,

$$B_1 \cup B_2 - \Sigma_1 \searrow \partial B_1 \cup B_2.$$

Сада је  $\sigma$  слободна страна од  $\Sigma_2$  у  $\partial B_1 \cup B_2$ , па како је  $B_2$  ендоколапсибилна, имамо

$$\partial B_1 \cup B_2 \searrow \partial B_1 \cup B_2 - \Sigma_2 - \sigma \searrow \partial B_1 \cup \partial B_2 - \sigma.$$

Низом претходних колапсирања, можемо дефинисати дискретно градијентно векторско поље  $V$  на  $M \setminus (B_1 \cap B_2 - \sigma)$ . На  $B_1 \cap B_2$  дефинишемо  $V = V_h$ , где је  $V_h$  градијентно векторско поље асоцирано функцији  $h$ . Овако конструисано  $V$  задаје дискретну Морсову функцију  $g$  на  $M$  која је гранично-критична са унутрашњим критичним ћелијама баш као и  $h$ , уз два изузетка:  $\Sigma_1$  је критична за  $g$ , али не и за  $h$ , док је  $\sigma$  критична за  $h$ , али не за  $g$ .

□

Следећа лема је уопштење претходне у случају да  $B_1$  није лопта.

**Лема 3.5.4.** *Нека је  $M = M' \cup B$  PL-триангулација  $d$ -димензионалне мното-структури са границом, при чему је  $M'$  PL-триангулација  $d$ -димензионалне*

многострукости са границом, а  $B$  ендоколапсибилна  $d$ -лопта. Претпоставимо да важи:

- $M' \cap B$  је  $(d-1)$ -димензионални поткомплекс од  $\partial M'$  и  $\partial B$ .
- $M' \cap B$  је хомеоморфно  $S^{j-1} \times D^{d-j}$  за неко  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ .

Уколико је  $f$  гранично-критична дискретна Морсова функција на  $M'$ , тада се свака гранично-критична дискретна Морсова функција  $h$  на  $M' \cap B$ , која има критичну  $(d-1)$ -ћелију  $\sigma$ , може проширити на гранично-критичну Морсову функцију  $g$  на  $M$  чије су унутрашње критичне ћелије управо критичне ћелије функције  $h$ , уз уклањање  $\sigma$  и додавање свих унутрашњих критичних ћелија од  $f$ .

**Доказ.** Поступамо аналогно доказу леме 3.5.3, с тим што уместо да почнемо са колапсирањем  $M' - \Sigma \searrow \partial M'$ , за  $d$ -страну  $\Sigma$ , користимо гранично-критичну функцију на  $M'$ . Остатак доказа је исти; у последњем кораку при бројању критичних ћелија треба само узети у обзир и критичне ћелије од  $f$ .  $\square$

Сада смо спремни да покажемо главну теорему. Посматраћемо „дуалан проблем“, и показати да за PL-многострукост са вектором  $(c_0, c_1, \dots, c_d)$  PL ручки постоји гранично-критична Морсова функција са тачно  $c_{d-i}$  унутрашњих  $i$ -ћелија, за  $0 \leq i \leq d$ . Тада применом леме 3.5.2, следи тражени резултат.

### Доказ теореме 3.0.2.

Без умањења општости, претпоставимо да је  $M$  повезана многострукост.

Користићемо „дуплу индукцију“— индукцију по димензији многострукости  $M$  и по броју ручки у декомпозицији.

Уколико је  $M$  димензије 1, посматрано као граф,  $M$  је пут или циклус. Свака 0-ручка је партиција интервала, па је ендоколапсибилна, а свака 1-ручка је колапсибилна. Стога, ако имамо  $k$  0-ручки и  $l$  1-ручки, можемо конструисати гранично-критичну дискретну Морсову функцију са  $k$  унутрашњих критичних 1-ћелија и  $l$  унутрашњих критичних 0-ћелија, те је тврђење у овом случају доказано. Ако  $M$  има декомпозицију на само једну ручку, то мора бити 0-ручка, те је  $M$  PL-лопта. На основу леме 3.4.2 постоји  $r$  за које је  $\text{sd}^r(M)$  разложив комплекс. Тада због леме 3.4.1 имамо и да је  $\text{sd}^r(M)$  ендоколапсибилна (по Теорему 2.4.1, еквивалентно, постоји гранично-критична

дискретна Морсова функција са једном критичном унутрашњом ћелијом димензије  $d$ ). Овиме смо показали базу индукције.

Претпоставимо да је  $d \geq 2$  и да  $M$  има декомпозицију са барем две ручке. Нека је  $B$  последња налепљена ручка у тој декомпозицији, индекса  $j$ . Како је  $M$  повезана, имамо да је  $j \geq 1$ . Дакле,

$$M = M' \cup B,$$

где је  $M'$  многострукост димензије  $d$  која има једну ручку мање од  $M$ . Такође,  $M' \cap B$  је димензије  $d - 1$ . Идеја нам је да искористимо индуктивну хипотезу на подмногострукости  $M'$  и  $M' \cap B$ .

Нека је  $(c_0, c_1, \dots, c_d)$  вектор ручки асоциран декомпозицији од  $M$ . Многострукост  $M' \cap B \approx S^{j-1} \times D^{d-j}$  има природну тополошку декомпозицију на једну 0-ручку и једну  $(j - 1)$ -ручку (у питању су  $(d - 1)$ -димензионалне ручке). Стога, на основу леме 3.5.1, постоји  $a$  за које  $\text{sd}^a(M' \cap B)$  има PL декомпозицију на једну 0-ручку и једну  $(j - 1)$ -ручку. Индуктивна хипотеза нам каже да постоји  $b$  за које  $\text{sd}^{a+b}(M' \cap B)$  има гранично-критичну Морсову функцију  $g$  са по једном унутрашњом критичном ћелијом у димензијама  $d - 1$  и  $d - j$ . Додатно, одаберимо  $b$  довољно велико тако да је  $\text{sd}^b(B)$  ендоколапсибилан. Индуктивна хипотеза примењена на  $M'$  нам даје да, за неко  $c$ , постоји гранично-критична дискретна Морсова функција  $f$  на  $\text{sd}^c(M')$  са  $c_{d-i}$  унутрашњих критичних  $i$ -ћелија за  $i \neq j$ , и  $c_{d-j} - 1$  критичних унутрашњих  $j$ -ћелија.

Нека је  $r := \max\{a + b, c\}$ . Применом леме 3.5.4 на  $\text{sd}^r(M) = \text{sd}^r(M') \cup \text{sd}^r(B)$  добијамо гранично-критичну дискретну Морсову функцију  $h$  на  $\text{sd}^r(M)$  која има критичне унутрашње ћелије као  $g$  и  $f$ , изузев једне  $(d - 1)$ -ћелије. Коначно, функција  $h$  има тачно  $c_{d-i}$  унутрашњих критичних  $i$ -ћелија. Тиме је доказ завршен.  $\square$

### 3.6 PL-вектори дискретних функција и ручки

Из првог поглавља знамо да на глаткој многострукости важи

$$\{\text{Морсови вектори глатких Морсових функција}\} = \{\text{Вектори ручки}\}.$$

Што се тиче PL категорије, ми смо кроз доказ теореме 3.0.2 показали да је сваки PL вектор ручки уједно и дискретни Морсов вектор неке PL-триангулације. Међутим, важи и обрнуто.

**Теорема 3.6.1.** *Нека је  $T$  PL-триангулација многострукости  $M$  и  $f$  дискретна Морсова функција на  $T$ , са Морсовим вектором  $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ . Тада за неко  $r$  важи да  $\text{sd}^r(T)$  има декомпозицију на ручке са вектором ручки  $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ .*

Наводимо скицу доказа претходне теореме. Користимо индукцију по броју критичних ћелија дискретне Морсове функције. Идеја је да се најпре уочи подкомплекс  $T'$  који се састоји од ћелија  $\sigma$  за које важи  $f(\sigma) < f(\tau)$ , где је  $\tau$  критична ћелија на којој  $f$  има максималну вредност. Затим, довољним бројем барицентричних подела, ослањајући се на старе резултате из PL-топологије (конкретно, [20, лема 3.9, лема 3.10] и [34, теорема 3.26]), може се показати да је за неко  $r$ ,  $\text{sd}^r(T)$  добијено од  $r$ -те регуларне околине од  $T'$  у  $\text{sd}^r(T)$  (скуп ћелија у  $\text{sd}^r(T)$  које припадају затворењу од  $|T'|$ ) лепљењем једне PL-ручке димензије  $\dim(\tau)$ . Регуларна околина од  $T'$  има Морсову функцију са једном критичном ћелијом мање од  $f$ , што показује индуктивни корак.

## Глава 4

# Алгебарска теорија Морса

Као што смо видели у Глави 2, путем дискретне Морсове теорије можемо смањити број ћелија CW-комплекса без промене хомотопског типа. У овој глави разматрамо алгебарску верзију Морсове теорије која посматра ланчасте комплексе модула који поседују декомпозицију на директну суму. Модули у директној суми играју улогу ћелија у тополошком контексту. Избором критичних модула можемо конструисати мањи комплекс који је хомотопски еквивалентан почетном. Теорију су независно развили Сколдберг [35], као и Јоленбек и Велкер [24]. Ми ћемо пратити излагање у [35].

### 4.1 Упаривања и расцепљујућа хомотопија

У наставку подразумевамо да  $R$  представља прстен са јединицом.

**Дефиниција 4.1.1.** *Базни комплекс представља ланчasti комплекс  $(K, d)$   $R$ -модула (левих или десних) заједно са декомпозицијом  $K_n = \bigoplus_{\alpha \in I_n} K_\alpha$ , где је  $\{I_n\}$  фамилија дисјунктних индексних скупова.*

За индекс  $\alpha \in \bigsqcup_n I_n$  пишемо  $\alpha^{(n)}$  уколико желимо да нагласимо да  $\alpha \in I_n$ .

За гранично пресликавање  $d_n : K_n \rightarrow K_{n-1}$ , са  $d_{\alpha,\beta}^n$  означимо компоненту од  $d_n$  која  $K_\alpha$  слика у  $K_\beta$ , односно пресликавање дато дијаграмом

$$d_{\alpha,\beta}^n : K_\alpha \hookrightarrow K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1} \twoheadrightarrow K_\beta.$$

**Напомена 4.1.1.** Како бисмо упростили запис, у наставку ћемо често изостављати горњи индекс  $n$  и уместо  $d_{\alpha,\beta}^n$  писати  $d_{\alpha,\beta}$ .

Базном комплексу  $\mathbf{K}$  асоцирамо усмерени граф  $G_{\mathbf{K}}$  са скупом чворова  $\bigcup_n I_n$ . Чворови  $\alpha$  и  $\beta$  су повезани усмереном граном  $\alpha \rightarrow \beta$  ако и само ако је компонента граничног оператора  $d_{\alpha,\beta}$  нетривијална.

**Дефиниција 4.1.2.** Упаривање на усмереном графу  $D = (V, E)$  представља подскуп  $A$  скупа грана  $E$ , при чему сваки чвор припада највише једној грани скупа  $A$ .

Усмереном графу  $D = (V, E)$  са упаривањем  $A$  асоцирамо усмерени граф  $D^A = (V, E^A)$ , при чему је скуп грана  $E^A$  дефинисан као

$$E^A := (E \setminus A) \cup \{\beta \rightarrow \alpha \mid \alpha \rightarrow \beta \in A\}$$

**Дефиниција 4.1.3.** Парцијално уређење  $\prec$  на скупу  $I$  је добро засновано уколико сваки неупразан подскуп од  $I$  садржи бар један минималан елемент.

**Дефиниција 4.1.4.** Упаривање  $M$  на усмереном графу  $G_{\mathbf{K}}$  називамо Морсово упаривање уколико задовољава следеће:

1.  $d_{\alpha,\beta}$  је изоморфизам за све  $\alpha \rightarrow \beta \in M$ .
2. Постоји добро заснован парцијални поредак  $\prec$  на сваком  $I_n$  и важи  $\gamma \prec \alpha$  уколико постоји пут  $\alpha^{(n)} \rightarrow \beta \rightarrow \gamma^{(n)}$  у графу  $G_{\mathbf{K}}^M$ .

**Дефиниција 4.1.5.** Чвор који није садржан ни у једној грани упаривања  $M$  назива се  $M$ -критичним.

У наставку, користимо нотацију  $M^0$  за скуп  $M$ -критичних чворова. Такође, дефинишемо скупове

$$M^- := \{\alpha \mid \text{постоји чвор } \beta \text{ за који важи } \beta \rightarrow \alpha \in M\},$$

$$M^+ := \{\alpha \mid \text{постоји чвор } \gamma \text{ за који важи } \alpha \rightarrow \gamma \in M\},$$

$$M_n^* := M^* \cap I_n, \text{ за } * \in \{0, +, -\}.$$

У случају да је  $G_{\mathbf{K}}$  коначан усмерени граф, следећи аналогон теореме 2.2.2 у алгебарском амбијенту нам даје једноставну карактеризацију Морсових упаривања.

**Теорема 4.1.1.** *Нека је  $\mathbf{K}$  базни комплекс чији је граф  $G_{\mathbf{K}}$  коначан, а  $M$  упаривање у  $G_{\mathbf{K}}$  такво да је  $d_{\alpha,\beta}$  изоморфизам кад год  $\alpha \rightarrow \beta$  припада  $M$ . Тада је  $M$  Морсово упаривање ако и само ако  $G_{\mathbf{K}}^M$  не садржи усмерени циклус.*

**Доказ.** Претпоставимо да  $G_{\mathbf{K}}^M$  не садржи усмерени циклус. За чвор  $u$  у графу  $G_{\mathbf{K}}^M$  дефинишемо

$$l(u) = \max\{s \mid \text{постоји усмерен пут } \gamma : u^{(n)}u_1u_2^{(n)}u_3 \dots u_{s-1}u_s^{(n)} \text{ у } G_{\mathbf{K}}^M\}.$$

$l(u)$  је коначан јер не постоје усмерени циклуси у  $G_{\mathbf{K}}^M$ . Нека је  $u^{(n)} \prec v^{(n)}$  уколико важи  $l(u) < l(v)$ ; овакав поредак очигледно задовољава други услов из дефиниције 4.1.4, те је  $M$  Морсово упаривање.

Обратно, претпоставимо да је  $M$  Морсово упаривање и да постоји усмерен циклус  $u_1u_2 \dots u_n$  у  $G_{\mathbf{K}}^M$ , где је  $u_1 = u_n$ . Из дефиниције упаривања, за све  $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ , највише једна од грана  $u_i \rightarrow u_{i+1}$  и  $u_{i+1} \rightarrow u_{i+2}$  је супротна некој грани из  $M$ . Како је  $u_1 = u_n$ , имамо да је свака друга грана у циклусу супротна некој грани из  $M$ . Како је  $M$  Морсово упаривање, имамо  $u_n \prec u_1 = u_n$ , што је контрадикција.  $\square$

**Пример 4.1.1.** *Нека је  $L$  коначан апстрактни симплицијалан комплекс на скупу шемени  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Симплицијални ланчasti комплекс  $C(L)$ , асоциран  $L$ , има природну структуру базног комплекса, јер базни елементи ланчасте групе  $C_n(L)$  одговарају симплексима димензије  $n$  у  $L$ . Дефинишемо упаривање  $M$  на  $G_{C(L)}$  као*

$$M = \{\sigma \rightarrow \sigma \setminus \{1\} \mid \sigma \in L, 1 \in \sigma\}.$$

*Лако се види да нема циклуса у  $G_{C(L)}^M$ , те је  $M$  Морсово упаривање.  $M$ -критични чворови одговарају симплексима  $\sigma \in L$  за које важи  $1 \notin \sigma$  и  $\sigma \cup \{1\} \notin L$ .*

Појам расцепљујуће хомотопије, уведен у [6], биће нам од кључног значаја у доказу главне теореме овог поглавља, те сада наводимо његову дефиницију.

**Дефиниција 4.1.6.** *Дати је ланчasti комплекс  $(C_*, d)$ . Расцепљујућа хомотопија (енгл. *splitting homotopy*) јесте пресликавање  $\phi : C_* \rightarrow C_{*+1}$ , степена 1, које задовољава*

$$\phi^2 = 0 \quad \text{и} \quad \phi d \phi = \phi.$$

За базни комплекс  $\mathbf{K}$  и Морсово упаривање  $M$ , дефинишимо пресликавање  $\phi$  на следећи начин. Уколико је  $\alpha$  минимално у односу на  $\prec$  и  $x \in K_\alpha$ , задајмо

$$\phi(x) = \begin{cases} d_{\beta,\alpha}^{-1}(x), & \text{ако } \beta \rightarrow \alpha \in M \text{ за неко } \beta, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Уколико  $\alpha$  није минимално у односу на  $\prec$  и  $x \in K_\alpha$ , поставимо

$$\phi(x) = \begin{cases} d_{\beta,\alpha}^{-1}(x) - \sum_{\substack{\beta \rightarrow \gamma \\ \gamma \neq \alpha}} \phi d_{\beta,\gamma} d_{\beta,\alpha}^{-1}(x), & \text{ако } \beta \rightarrow \alpha \in M \text{ за неко } \beta, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Дефиниција пресликавања  $\phi$  је индуктивна, али је добра, јер за свако  $\gamma$  које се јавља у последњој суми важи  $\gamma \prec \alpha$ . Овако дефинисано  $\phi$  је расцепљујућа хомотопија, што наводимо као наредну лему.

**Лема 4.1.1.** *Нека је  $M$  Морсово упаривање на базном комплексу  $\mathbf{K}$ . Пресликавање  $\phi$  је расцепљујућа хомотопија.*

**Доказ.** Услов  $\phi^2 = 0$  је очигледно задовољен, због дефиниције упаривања. Да бисмо доказали да важи  $\phi d\phi = \phi$ , користићемо индукцију по  $\prec$ . Претпоставимо да је  $\alpha$  минимално у односу на  $\prec$ . Уколико  $\alpha \notin M^-$ , за  $x \in K_\alpha$  имамо

$$\phi d\phi(x) = \phi d(0) = 0 = \phi(x).$$

Уколико  $\alpha \in M^-$  и  $\beta \rightarrow \alpha \in M$ , имамо

$$\phi d\phi(x) = \phi d d_{\beta,\alpha}^{-1}(x) = \phi d_{\beta,\alpha} d_{\beta,\alpha}^{-1}(x) = \phi(x).$$

У случају да  $\alpha$  није минималан, претпоставимо да је за  $\gamma \prec \alpha$  и свако  $x \in K_\gamma$  испуњено  $\phi d\phi(x) = \phi(x)$ .

Уколико  $\alpha \notin M^-$ , опет лако добијамо  $\phi d\phi(x) = 0 = \phi(x)$ . За  $\alpha \in M^-$  и  $\beta \rightarrow \alpha \in M$ , имамо

$$\begin{aligned} \phi d\phi(x) &= \phi d d_{\beta,\alpha}^{-1}(x) - \sum_{\substack{\beta \rightarrow \gamma \\ \gamma \neq \alpha}} \phi d\phi d_{\beta,\gamma} d_{\beta,\alpha}^{-1}(x) \\ &= \phi d_{\beta,\alpha} d_{\beta,\alpha}^{-1}(x) + \sum_{\substack{\beta \rightarrow \gamma \\ \gamma \neq \alpha}} \phi d_{\beta,\gamma} d_{\beta,\alpha}^{-1}(x) - \sum_{\substack{\beta \rightarrow \gamma \\ \gamma \neq \alpha}} \phi d_{\beta,\gamma} d_{\beta,\alpha}^{-1}(x) \\ &= \phi(x). \end{aligned}$$

Друга једнакост следи из чињенице да је  $\phi d \phi d_{\beta, \gamma} d_{\beta, \alpha}^{-1}(x) = \phi d_{\beta, \gamma} d_{\beta, \alpha}^{-1}(x)$ , што важи по индуктивној хипотези. Тиме је доказ завршен.  $\square$

## 4.2 Доказ главне теореме

Сада смо спремни да покажемо алгебарску верзију теореме 2.5.3, која нам говори да хомотопски тип ланчастог комплекса зависи само од критичних модула (чворова).

Најпре наводимо две техничке леме.

**Лема 4.2.1.** *Нека је  $\mathbf{K}$  базни комплекс,  $M$  Морсово ујаривање на  $G_{\mathbf{K}}$  и  $\phi$  расцељивујућа хомотопија из леме 4.1.1. За  $x_{\alpha} \in K_{\alpha}$ , имамо да важи*

$$d\phi(x_{\alpha}) = \begin{cases} x_{\alpha} + \sum_{\beta \prec \alpha} y_{\beta}, & \text{за } \alpha \in M^{-}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $y_{\beta} \in K_{\beta}$  за све  $\beta$ .

**Доказ.** Лему показујемо индукцијом по  $\prec$ . Нека је  $\alpha$  минималан у односу на  $\prec$ . Ако  $\alpha \notin M^{-}$ , очигледно важи  $d\phi(x_{\alpha}) = 0$ , те ћемо претпоставити да  $\alpha \in M^{-}$  и  $\beta \rightarrow \alpha \in M$ , одакле добијамо

$$d\phi(x_{\alpha}) = dd_{\beta, \alpha}^{-1}(x_{\alpha}) = d_{\beta, \alpha} d_{\beta, \alpha}^{-1}(x_{\alpha}) = x_{\alpha}.$$

Уколико  $\alpha$  није минималан, претпоставимо да за све  $\gamma \prec \alpha$  важи тврђење леме. Случај  $\alpha \notin M^{-}$  је опет тривијалан, те разматрамо случај  $\alpha \in M^{-}$ , где  $\beta \rightarrow \alpha \in M$ :

$$\begin{aligned} d\phi(x_{\alpha}) &= d \left( d_{\beta, \alpha}^{-1}(x) - \sum_{\substack{\beta \rightarrow \gamma \\ \gamma \neq \alpha}} \phi d_{\beta, \gamma} d_{\beta, \alpha}^{-1}(x_{\alpha}) \right) \\ &= x_{\alpha} + \sum_{\substack{\beta \rightarrow \gamma \\ \gamma \neq \alpha}} d_{\beta, \gamma} d_{\beta, \alpha}^{-1}(x_{\alpha}) - d\phi \sum_{\substack{\beta \rightarrow \gamma \\ \gamma \neq \alpha}} d_{\beta, \gamma} d_{\beta, \alpha}^{-1}(x_{\alpha}). \end{aligned}$$

Свако  $\gamma$  у последње две суме задовољава  $\gamma \prec \alpha$ , а како  $d_{\beta, \gamma} d_{\beta, \alpha}^{-1}(x_{\alpha}) \in K_{\gamma}$ , коришћењем индуктивне хипотезе на такве  $\gamma$ , добијамо тражени резултат.  $\square$

**Лема 4.2.2.** Нека је  $\mathbf{K}$  базни комплекс,  $M$  Морсово ујаривање на  $G_{\mathbf{K}}$  и  $\phi$  ирејходно дефинисана расцељујућа хомотопија. За  $x_\alpha \in K_\alpha$ , имамо да важи

$$\phi d(x_\alpha) = \begin{cases} x_\alpha, & \text{за } \alpha \in M^+, \\ \sum_{\beta \prec \alpha} y_\beta, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $y_\beta \in K_\beta$  за све  $\beta$ .

**Доказ.** Поново, доказ вршимо индукцијом по  $\prec$ . Нека је  $\alpha$  минималан у односу на  $\prec$ . Ако  $\alpha \in M^+$  и важи  $\alpha \rightarrow \beta \in M$ , имамо

$$\begin{aligned} \phi d(x_\alpha) &= \phi d_{\alpha,\beta}(x_\alpha) + \sum_{\substack{\alpha \rightarrow \gamma \\ \gamma \neq \beta}} \phi d_{\alpha,\gamma}(x_\alpha) \\ &= d_{\alpha,\beta}^{-1} d_{\alpha,\beta}(x_\alpha) - \sum_{\substack{\alpha \rightarrow \gamma \\ \gamma \neq \beta}} \phi d_{\alpha,\gamma}(x_\alpha) + \sum_{\substack{\alpha \rightarrow \gamma \\ \gamma \neq \beta}} \phi d_{\alpha,\gamma}(x_\alpha) = x_\alpha. \end{aligned}$$

Ако  $\alpha \notin M^+$ , добијамо

$$\phi d(x_\alpha) = \phi \sum_{\alpha \rightarrow \beta} d_{\alpha,\beta}(x_\alpha) = 0,$$

јер је  $\alpha$  минималан.

Сада разматрамо случај када  $\alpha$  није минималан. Претпоставимо да за све  $\gamma \prec \alpha$  важи тврђење леме. Уколико  $\alpha \in M^+$ , при чему  $\alpha \rightarrow \beta \in M$ , доказ је у потпуности идентичан као у случају да је  $\alpha$  минималан.

Претпоставимо сада  $\alpha \notin M^+$ . Тада је, по дефиницији пресликавања  $\phi$ :

$$\phi d(x_\alpha) = \phi \sum_{\alpha \rightarrow \beta} d_{\alpha,\beta}(x_\alpha) = \sum_{\substack{\alpha \rightarrow \beta \\ \gamma \rightarrow \beta \in M}} d_{\gamma,\beta}^{-1} d_{\alpha,\beta}(x_\alpha) - \phi \sum_{\substack{\alpha \rightarrow \beta \\ \gamma \rightarrow \beta \in M}} \sum_{\substack{\gamma \rightarrow \delta \\ \delta \neq \beta}} d_{\gamma,\delta} d_{\gamma,\beta}^{-1} d_{\alpha,\beta}(x_\alpha).$$

За све  $\gamma$  у претходним сумама важи  $\gamma \prec \alpha$ , па на основу индуктивне хипотезе примење на све такве  $\gamma$ , добијамо тражено тврђење.  $\square$

**Дефиниција 4.2.1.** Ланчасни комплекси  $(\mathbf{K}_1, d_1)$  и  $(\mathbf{K}_2, d_2)$  су хомотопски еквивалентни ако постоје ланчасна пресликавања  $f : \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$  и  $g : \mathbf{K}_2 \rightarrow \mathbf{K}_1$  иако да важи

$$g \circ f \simeq \text{Id}_{\mathbf{K}_1}, \quad f \circ g \simeq \text{Id}_{\mathbf{K}_2},$$

где  $\simeq$  означава ланчасну хомотопију.

Најзначајнија особина хомотопски еквивалентних ланчастих комплекса је-  
сте то што имају изоморфне хомолошке групе.

Сада наводимо тврђење и доказ главне теореме.

**Теорема 4.2.1.** *Нека је  $M$  Морсово ујаривање на базном комплексу  $\mathbf{K}$ . Уко-  
лико је  $\pi : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$  пресликавање дајо са*

$$\pi = \text{Id} - (\phi d + d\phi). \quad (4.1)$$

*тада су комплекси  $\mathbf{K}$  и  $\pi(\mathbf{K})$  хомотопски еквивалентни. Штавише, за све  
 $n$ , имамо изоморфизам модула:*

$$\pi(K_n) \cong \bigoplus_{\alpha \in M_n^0} K_\alpha.$$

**Доказ.** Пресликавања  $\pi$  и  $\text{Id}$  су ланчасто хомотопна по дефиницији, па су  
комплекси  $\mathbf{K}$  и  $\pi(\mathbf{K})$  хомотопски еквивалентни.

Покажимо сада да важи

$$\pi(\mathbf{K}) = \pi\left(\bigoplus_{\gamma \in M^0} K_\gamma\right). \quad (4.2)$$

Довољно је показати да

$$\pi(K_\alpha) \subseteq \pi\left(\bigoplus_{\gamma \in M^0} K_\gamma\right) \quad (4.3)$$

важи за све  $\alpha$ , што ћемо извршити индукцијом по  $\prec$ .

Уколико је  $\alpha$  минималан, тада или  $\alpha \in M^0$ , и у том случају немамо шта  
да докажемо, или  $\alpha \notin M^0$ , те је  $\pi(x) = 0$ , за  $x \in K_\alpha$  основу леме 4.2.1 и леме  
4.2.2.

Претпоставимо сада да  $\alpha$  није минималан, и да за све  $\gamma \prec \alpha$  важи (4.3).  
Случај  $\alpha \in M^0$  је опет тривијалан, те претпоставимо да  $\alpha \notin M^0$ . За  $x \in K_\alpha$ ,  
на основу лема 4.2.1 и 4.2.2, постоји индексни скуп  $J$  такав да је  $\gamma \prec \alpha$  за  
свако  $\gamma \in J$ , при чему важи

$$\pi(x) = \pi^2(x) = \pi\left(\sum_{\gamma \in J} y_\gamma\right) = \sum_{\gamma \in J} \pi(y_\gamma),$$

где  $y_\gamma \in K_\gamma$ . Прва једнакост следи из чињенице да је  $\phi$  расцепљујућа хомото-  
пија. На основу индуктивне хипотезе, добијамо да важи (4.2).

Коначно, покажимо да је пресликавање

$$\pi : \bigoplus_{\alpha \in M_n^0} K_\alpha \rightarrow K_n$$

инјективно за све  $n$ . Наиме, за  $x \in K_\alpha$ ,  $\alpha \in M^0$ , на основу лема 4.2.1 и 4.2.2, имамо

$$\pi(x) = x - \sum_{\gamma \in J} y_\gamma,$$

где  $y_\gamma \in K_\gamma$  и  $\gamma \prec \alpha$  за све  $\gamma \in J$ , што доказује инјективност. На основу Прве теореме о изоморфизму за модуле, следи тврђење теореме.  $\square$

### 4.3 Опис граничног оператора

На основу теореме 4.2.1 закључујемо да на градуисаном модулу  $\bigoplus_{\alpha \in M^0} K_\alpha$  можемо дефинисати гранични оператор тако да резултујући комплекс буде изоморфан  $\pi(\mathbf{K})$ . Наводимо експлицитну дефиницију тог оператора.

Дефинишимо комплекс  $(\mathbf{C}, \tilde{d})$ , где је  $C_n = \bigoplus_{\alpha \in M_n^0} K_\alpha$ . Нека је  $\rho$  пројекција

$$\rho : \mathbf{K} = \bigoplus_{\alpha} K_\alpha \rightarrow \mathbf{C} = \bigoplus_{\alpha \in M^0} K_\alpha.$$

Диференцијал  $\tilde{d}$  задајемо на следећи начин:

$$\tilde{d} = \rho(d - d\phi d).$$

Дефиниција  $\tilde{d}$  је природна, што најбоље осликава доказ следеће теореме.

**Теорема 4.3.1.** *Ланчастии комплекс  $\mathbf{C}$  је хомотопски еквивалентан ланчастом комплексу  $\mathbf{K}$ .*

**Доказ.** На основу лема 4.2.1 и 4.2.2 видимо да је  $\rho\pi$  идентитета на  $\bigoplus_n C_n$ . Уколико је  $y$  произвољан елемент из  $\pi(\mathbf{K})$ , на основу теореме 4.2.1, постоји  $x \in \bigoplus_{\alpha \in M^0} K_\alpha$  за које важи  $\pi(x) = y$ . Такође, приметимо да важи  $\pi\rho(y) = \pi\rho\pi(x) = \pi(x) = y$ . Одавде следи да би ланчастии комплекси  $\mathbf{C}$  и  $\pi(\mathbf{K})$  били изоморфни уколико би било задовољено  $\tilde{d} = \rho d\pi$ . Наравно, ово нам даје мотивацију за претходно дефинисан диференцијал  $\tilde{d}$ , јер, заиста, важи

$$\tilde{d} = \rho(d - d\phi d) = \rho d(\text{Id} - \phi d - d\phi) = \rho d\pi.$$

Како су  $\pi(\mathbf{K})$  и  $\mathbf{K}$  хомотопски еквивалентни, доказ је завршен.  $\square$

Гранични оператор Морсовог комплекса, у глаткој и дискретној теорији, дефинисан је у зависности од градијентних линија, односно путева. Сличан опис имамо и у алгебарском случају, где улогу градијентних линија, односно путева преузимају тзв. „цик-цак” путеви.

За чворове  $\alpha$  и  $\beta$  у графу  $G_{\mathbf{K}}^M$ , који се налазе у суседним степенима, означимо са  $\Gamma_{\alpha,\beta}$  скуп усмерених „цик-цак” путева облика

$$\alpha = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{2k-1} \sigma_{2k} = \beta,$$

при чему  $\sigma_{2i-1}$  живи у истом степену као  $\alpha$ , док  $\sigma_{2i}$  живи у истом степену као  $\beta$ , за  $1 \leq i \leq k$ . За усмерен пут  $\gamma \in \Gamma_{\alpha^{(n+1)},\beta^{(n)}}$  дефинишемо пресликавање  $m(\gamma)$  као

$$m(\gamma) := (-1)^{k-1} d_{\sigma_{2k-1}^{(n+1)}, \sigma_{2k}^{(n)}} d_{\sigma_{2k-1}^{(n+1)}, \sigma_{2k-2}^{(n)}}^{-1} \dots d_{\sigma_3^{(n+1)}, \sigma_2^{(n)}}^{-1} d_{\sigma_1^{(n+1)}, \sigma_2^{(n)}}.$$

Слично, за  $\gamma \in \Gamma_{\alpha^{(n)},\beta^{(n+1)}}$ ,

$$m(\gamma) := (-1)^{k-1} d_{\sigma_{2k}^{(n+1)}, \sigma_{2k-1}^{(n)}}^{-1} d_{\sigma_{2k-2}^{(n+1)}, \sigma_{2k-1}^{(n)}} \dots d_{\sigma_2^{(n+1)}, \sigma_3^{(n)}} d_{\sigma_2^{(n+1)}, \sigma_1^{(n)}}^{-1}.$$

**Лема 4.3.1.** *За  $x \in K_{\alpha^{(n)}}$ , имамо*

$$\phi(x) = \sum_{\sigma^{(n+1)}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\alpha,\sigma}} m(\gamma)(x).$$

**Доказ.** Тврђење доказујемо индукцијом. Нека је  $\alpha$  минималан и  $x \in K_{\alpha}$ . Уколико  $\alpha \in M^-$  и важи  $\beta \rightarrow \alpha$ , имамо  $\phi(x) = d_{\beta,\alpha}^{-1}(x)$ , док у случају  $\alpha \notin M^-$  важи  $\phi(x) = 0$ . У оба случаја, једнакост из леме је тривијално задовољена.

Претпоставимо да  $\alpha$  није минималан и да за све  $\delta \prec \alpha$  важи тврђење леме. Случај  $\alpha \notin M^-$  је поново тривијалан, те претпостављамо  $\alpha \in M^-$ . Имамо

$$\begin{aligned} \phi(x) &= d_{\beta,\alpha}^{-1}(x) - \sum_{\substack{\beta \rightarrow \delta \\ \delta \neq \alpha}} \phi d_{\beta,\delta} d_{\beta,\alpha}^{-1}(x) \\ &= d_{\beta,\alpha}^{-1}(x) - \sum_{\substack{\beta \rightarrow \delta \\ \delta \neq \alpha}} \sum_{\sigma^{(n+1)}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\delta,\sigma}} m(\gamma) d_{\beta,\delta} d_{\beta,\alpha}^{-1}(x) \\ &= \sum_{\sigma^{(n+1)}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\alpha,\sigma}} m(\gamma)(x), \end{aligned}$$

где смо другу једнакост добили применом индуктивне хипотезе на све индексе  $\delta$  који се налазе у првој суми. Тиме је доказ завршен.  $\square$

**Теорема 4.3.2.** *За  $x \in K_{\alpha^{(n)}}$ , имамо*

$$\tilde{d}(x) = \sum_{\sigma^{(n-1)}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\alpha, \sigma}} m(\gamma)(x).$$

**Доказ.** Важи следећа очигледна једнакост:

$$(d - d\phi d)(x) = \sum_{\alpha \rightarrow \beta} (d_{\alpha, \beta}(x) - d\phi d_{\alpha, \beta}(x)). \quad (4.4)$$

Применом леме 4.3.1 на  $d_{\alpha, \beta}(x) \in K_{\beta}$ , добијамо

$$d\phi d_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{\sigma^{(n)}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\beta, \sigma}} dm(\gamma)d_{\alpha, \beta}(x) = - \sum_{\sigma^{(n-1)}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\alpha, \sigma}^*} m(\gamma)(x),$$

где је у последњој суми

$$\Gamma_{\alpha, \sigma}^* = \{\gamma \in \Gamma_{\alpha, \sigma} \mid \gamma : \alpha = \theta_1 \theta_2 \dots \theta_{2k} = \sigma, \theta_2 = \beta, k > 1\}.$$

Убацивањем претходног израза за  $d\phi d_{\alpha, \beta}(x)$  у (4.4), добијамо

$$(d - d\phi d)(x) = \sum_{\sigma^{(n-1)}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\alpha, \sigma}} m(\gamma)(x),$$

одакле следи тврђење теореме. □

## 4.4 Примене

Ова секција има улогу да илуструје примену алгебарске теорије Морса кроз два занимљива примера.

### Пример 1: Хомологија фамилије Лијевих алгебри.

У овом примеру разматрамо одређену фамилију Лијевих алгебри и дајемо потпун опис хомологије истих. Основе теорије Лијевих алгебри могу се видети у [3].

Нека је  $\mathfrak{g}$  коначно димензионална Лијева алгебра над пољем  $k$  са базом  $B = \{x_1, \dots, x_N\}$ . Са  $\bigwedge^n \mathfrak{g}$  означимо  $n$ -ти спољашњи степен од  $\mathfrak{g}$ .

**Дефиниција 4.4.1.** *Шевали-Ајленбертов комплекс Лијеве алгебре  $\mathfrak{g}$ , у ознаци  $V_{\mathfrak{g}}$ , јесте ланчasti комплекс*

$$0 \longrightarrow \bigwedge^N \mathfrak{g} \longrightarrow \bigwedge^{N-1} \mathfrak{g} \longrightarrow \dots \longrightarrow \bigwedge^2 \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow k \longrightarrow 0,$$

где је гранични оператор задат са

$$d(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n.$$

Хомолошку групу Шевали–Ајленберговог комплекса у димензији  $i$  називамо  $i$ -шом хомолошком групом Лијеве алгебре  $\mathfrak{g}$ , у ознаци  $H_i(\mathfrak{g}, k)$ .

Посматраћемо одређену фамилију Лијевих алгебри  $\mathfrak{g}_n$ ,  $n \geq 1$ , над пољем карактеристике 2. У питању су тзв. *двоспљене Хајзенбергове Лијеве алгебре*, које природно потичу из квантне механике. База за  $\mathfrak{g}_n$  је облика  $\{z, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ , при чему су једини ненула производи  $[z, x_i] = y_i$ , за  $1 \leq i \leq n$ . Уведимо ознаку  $u_i = x_i \wedge y_i$ . За подскупе  $I, J, K \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ , користимо нотацију

$$x_I = \bigwedge_{i \in I} x_i, \quad y_J = \bigwedge_{j \in J} y_j, \quad u_K = \bigwedge_{k \in K} u_k.$$

**Напомена 4.4.1.** Како радимо над пољем  $\mathbb{F}_2$ , клинасти производ комутира, те не морамо бринути о редоследу елемената.

Базу Шевали–Ајленберговог комплекса чине елементи облика  $x_I \wedge y_J \wedge u_K$  и  $z \wedge x_I \wedge y_J \wedge u_K$ , за међусобно дисјунктне скупе  $I, J$  и  $K$ , те је  $\mathbf{V}_{\mathfrak{g}_n}$  базни комплекс.

Дефинишимо упаривање  $M$  у графу  $G_{\mathbf{V}_{\mathfrak{g}_n}}$  на следећи начин:

$$M = M_1 \cup M_2, \text{ где је}$$

$$M_1 = \{z \wedge x_{I \cup \{t\}} \wedge y_J \wedge u_K \longrightarrow x_I \wedge y_{J \cup \{t\}} \wedge u_K \mid 1 \leq t < \min(I \cup J)\},$$

$$M_2 = \{z \wedge x_t \wedge u_K \longrightarrow y_t \wedge u_K \mid 1 \leq t \leq n\}.$$

**Лема 4.4.1.** *Претходно дефинисано  $M$  је Морсово упаривање у графу  $G_{\mathbf{V}_{\mathfrak{g}_n}}$ .*

**Доказ.** Непосредно из дефиниције следи да је  $M$  заиста упаривање. За чворове  $\alpha$  и  $\beta$  за које важи  $\alpha \rightarrow \beta \in M$ , такође се лако може показати да је  $d_{\alpha, \beta}$  изоморфизам. На пример, за  $\alpha \rightarrow \beta \in M_1$ , и одговарајућу компоненту граничног оператора, имамо

$$d_{\alpha, \beta}(z \wedge x_{I \cup \{t\}} \wedge y_J \wedge u_K) = [z, x_t] \wedge x_I \wedge y_J \wedge u_K = x_I \wedge y_{J \cup \{t\}} \wedge u_K,$$

односно  $d_{\alpha, \beta}$  је изоморфизам (не бринемо о знаку у претходним једнакостима, јер радимо над пољем  $\mathbb{F}_2$ ). Слично, за  $\alpha \rightarrow \beta \in M_2$ , добијамо да је  $d_{\alpha, \beta}$  изоморфизам. Покажимо да не постоје усмерени циклуси у  $G_{\mathbf{V}_{\mathfrak{g}_n}}^M$ .

Уколико имамо пут

$$x_I \wedge y_J \wedge u_K \rightarrow z \wedge x'_I \wedge y'_J \wedge u'_K \rightarrow x_{I''} \wedge y_{J''} \wedge u_{K''}$$

у  $G_{\mathfrak{g}_n}^M$ , где су прва два чвора упарена, тада су јасно  $J$  и  $J''$  непразни, и важи  $\min(J) < \min(J'')$ . Дакле, не можемо продужити претходни пут тако да поново стигнемо у  $x_I \wedge y_J \wedge u_K$ . У случају да имамо пут

$$z \wedge x_I \wedge y_J \wedge u_K \rightarrow x'_I \wedge y'_J \wedge u'_K \rightarrow z \wedge x_{I''} \wedge y_{J''} \wedge u_{K''},$$

у ком су последња два чвора упарена, поново добијамо да су  $J$  и  $J''$  непразни, и да важи  $\min(J) < \min(J'')$ . Отуда, на основу теореме 4.1.1, следи да је  $M$  Морсово упаривање.  $\square$

Помоћу упаривања  $M$ , добијамо потпуни опис хомолошких група  $\mathfrak{g}_n$ , што је прецизније описано следећом теоремом.

**Теорема 4.4.1.** *Генеришућа функција Беттијевих бројева Лијеве алгебре  $\mathfrak{g}_n$  је дајна са*

$$\sum_{i \geq 0} \dim(H_i(\mathfrak{g}_n, k))x^i = \frac{1}{2}(1+x)((1+x)^{2n} + (1+x^2)^n).$$

**Доказ.** Најпре ћемо показати да је гранични оператор на  $\pi(\mathbf{V}_{\mathfrak{g}_n})$  ( $\pi$  је задато на  $\mathbf{V}_{\mathfrak{g}_n}$  помоћу (4.1)) тривијалан. По теорему 4.2.1, имаћемо да је  $\dim(H_i(\mathfrak{g}_n, k))$  једнака броју  $M$ -критичних чворова у димензији  $i$ . На крају, израчунаћемо број  $M$ -критичних чворова, и тиме показати тврђење теореме.

$M$ -критичне чворове можемо описати на следећи начин:

$$\begin{aligned} x_I \wedge y_J \wedge u_K, \quad & \text{где је } I \cup J \neq \emptyset \text{ и } \min(I \cup J) \in I, \text{ или } I \cup J = \emptyset, \\ z \wedge x_I \wedge y_J \wedge u_K, \quad & \text{где је } I \cup J \neq \emptyset \text{ и } \min(I \cup J) \in J, \text{ или } I \cup J = \emptyset. \end{aligned}$$

Нека је  $z \wedge x_I \wedge y_{J \cup \{t\}} \wedge u_K$   $M$ -критичан чвор, при чему је  $t < \min(I \cup J)$ . Случај  $I = \emptyset$  је тривијалан, јер важи

$$d\pi(z \wedge x_I \wedge y_{J \cup \{t\}} \wedge u_K) = \pi d(z \wedge x_I \wedge y_{J \cup \{t\}} \wedge u_K) = \pi(0) = 0.$$

Стога, претпоставимо да је  $I \neq \emptyset$ . Имамо

$$\begin{aligned} d\pi(z \wedge x_I \wedge y_{J \cup \{t\}} \wedge u_K) &= d(z \wedge x_I \wedge y_{J \cup \{t\}} \wedge u_K) + d\phi d(z \wedge x_I \wedge y_{J \cup \{t\}} \wedge u_K) \\ &= d(z \wedge x_I \wedge y_{J \cup \{t\}} \wedge u_K) + d\phi \sum_{i_1 \in I} x_{I \setminus \{i_1\}} \wedge y_{J \cup \{i_1, t\}} \wedge u_K \\ &= d(z \wedge x_I \wedge y_{J \cup \{t\}} \wedge u_K) + d \sum_{i_1 \in I} z \wedge x_{(I \setminus \{i_1\}) \cup \{t\}} \wedge y_{J \cup \{i_1\}} \wedge u_K. \end{aligned}$$

Приметимо да је

$$d(z \wedge x_I \wedge y_{J \cup \{t\}} \wedge u_K) = \sum_{i_1 \in I} x_{I \setminus \{i_1\}} \wedge y_{J \cup \{i_1, t\}} \wedge u_K,$$

и да важи

$$\begin{aligned} d \sum_{i_1 \in I} z \wedge x_{(I \setminus \{i_1\}) \cup \{t\}} \wedge y_{J \cup \{i_1\}} \wedge u_K &= \sum_{i_1 \in I} x_{I \setminus \{i_1\}} \wedge y_{J \cup \{i_1, t\}} \wedge u_K \\ &\quad + \sum_{\substack{i_1, i_2 \in I \\ i_1 \neq i_2}} x_{(I \setminus \{i_1, i_2\}) \cup \{t\}} \wedge y_{J \cup \{i_1, i_2\}} \wedge u_K \\ &= \sum_{i_1 \in I} x_{I \setminus \{i_1\}} \wedge y_{J \cup \{i_1, t\}} \wedge u_K. \end{aligned}$$

Сада имамо

$$d\pi(z \wedge x_I \wedge y_{J \cup \{t\}} \wedge u_K) = 2 \sum_{i_1 \in I} x_{I \setminus \{i_1\}} \wedge y_{J \cup \{i_1, t\}} \wedge u_K = 0.$$

За  $M$ -критичан чвор  $x_I \wedge y_J \wedge u_K$  важи

$$d\pi(x_I \wedge y_J \wedge u_K) = \pi d(x_I \wedge y_J \wedge u_K) = \pi(0) = 0.$$

Овиме смо показали да за сваки критичан чвор  $\alpha$  важи  $d\pi(\alpha) = 0$ . На основу једнакости (4.2) (прилагођене комплексу  $\mathbf{V}_{\mathfrak{g}_n}$ ), следи да је гранични оператор на  $\pi(\mathbf{V}_{\mathfrak{g}_n})$  тривијалан.

Преостаје нам да пребројимо критичне чворове. Означимо са  $[n]$  скуп  $\{1, 2, \dots, n\}$ . За фиксне  $L \subseteq [n]$  и  $K \subseteq [n] \setminus L$ , критичних  $M$ -чворова облика  $x_I \wedge y_J \wedge u_K$  и  $z \wedge x_I \wedge y_J \wedge u_K$ , који задовољавају  $I \cup J = L$  има по  $2^{|L|-1}$ , у случају да је  $L \neq \emptyset$ . Ако је  $L = \emptyset$ , имамо само по један елемент за сваки од ова два типа.

Стога, у суми за функцију генератрисе, ови елементи доприносе  $2^{|L|-1}(1+x)x^{|L|+2|K|}$ , за  $L \neq \emptyset$ , и  $(1+x)x^{2|K|}$ , у супротном. Коначно, сумирањем по свим  $L$  и  $K$ , добијамо

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} \dim(H_i(\mathfrak{g}_n, k))x^i &= \sum_{\emptyset \neq L \subseteq [n]} \sum_{K \subseteq [n] \setminus L} 2^{|L|-1}(1+x)x^{|L|+2|K|} + \sum_{K \subseteq [n]} (1+x)x^{2|K|} \\ &= \frac{1}{2}(1+x) \left( \sum_{\emptyset \neq L \subseteq [n]} \sum_{K \subseteq [n] \setminus L} (2x)^{|L|}(x^2)^{|K|} + 2 \sum_{K \subseteq [n]} (x^2)^{|K|} \right) \\ &= \frac{1}{2}(1+x) \left( \sum_{L \subseteq [n]} \sum_{K \subseteq [n] \setminus L} (2x)^{|L|}(x^2)^{|K|} + \sum_{K \subseteq [n]} (x^2)^{|K|} \right) \\ &= \frac{1}{2}(1+x) ((1+2x+x^2)^n + (1+x^2)^n). \end{aligned}$$

□

**Пример 2: Магнитудна хомологија стабала**

Магнитудна хомологија представља алгебарску инваријанту придружену графу која мери његове метричке особине. У наставку, приказаћемо резултат Гуа [21], којим се одређује магнитудна хомологија стабала применом алгебарске теорије Морса.

Нека је  $G = (V, E)$  коначан неусмерен повезан граф, са скупом чворова  $V$  и скупом грана  $E$ . За  $u, v \in V$ , *распојање* између чворова  $u$  и  $v$  представља дужину најкраћег пута (подразумевамо да је дужина пута  $v_0v_1 \dots v_k$  једнака  $k$ ) који их повезује. За низ чворова  $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_k)$ ,  $x_i \neq x_{i+1}$ , дефинишемо његову дужину са

$$\ell(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

**Напомена 4.4.2.** За низ  $\mathbf{x} = (x_0)$  подразумевамо  $\ell(\mathbf{x}) = 0$ .

**Дефиниција 4.4.2.** За граф  $G = (V, E)$ , *биградуисани ланчасни комплекс*  $\text{MC}_{*,*}(G)$ , дефинисан са

$$\text{MC}_{k,\ell}(G) = \mathbb{Z} \langle (x_0, \dots, x_k) \in V^{k+1} : x_i \neq x_{i+1}, \ell(x_0, \dots, x_k) = \ell \rangle,$$

где је *гранични оператор*

$$\partial(x_0, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \partial_i(x_0, \dots, x_k),$$

за

$$\partial_i(x_0, \dots, x_k) = \begin{cases} (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_k), & \ell(x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_k) = \ell(x_0, \dots, x_k), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

називамо *магнитудним комплексом графа  $G$* , а његову хомологију

$$\text{MH}_{k,\ell}(G) := H_k(\text{MC}_{*,\ell}(G))$$

називамо *магнитудном хомологијом графа  $G$* .

Нека је  $T$  стабло. У потпуности ћемо описати магнитудну хомологију од  $T$  конструкцијом одговарајућих Морсових упаривања  $M_\ell$  на комплексима  $MC_{*,\ell}(T)$ , за све  $\ell$ . Фамилију Морсових упаривања  $M_\ell$  сматраћемо Морсовим упаривањем  $M$  на комплексу  $MC_{*,*}(T)$ . Сада наводимо конструкцију упаривања.

За два чвора  $u$  и  $v$ , за која је  $d(u, v) \geq 2$ , означимо са  $\sigma(u, v)$  јединственог суседа чвора  $u$  који припада јединственом најкраћем путу од  $u$  до  $v$ . Еквивалентно,  $\sigma(u, v)$  је дато са

$$d(u, \sigma(u, v)) = 1, \quad d(u, v) = 1 + d(\sigma(u, v), v).$$

За све  $\ell$ , на базним елементима комплекса  $MC_{*,\ell}(T)$ , дефинишемо упаривање  $M_\ell$  на следећи начин.

За  $(x_0, \dots, x_k) \in MC_{k,\ell}(T)$ , нека је  $j$  најмањи индекс за који важи бар један од два услова:

1.  $j \geq 2$  и  $x_{j-1} = \sigma(x_{j-2}, x_j)$ ;
2.  $d(x_{j-1}, x_j) \geq 2$ .

**Прво правило (брисање):** Ако је испуњен први услов,

$$(x_0, \dots, x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, \dots, x_k) \rightarrow (x_0, \dots, x_{j-2}, x_j, \dots, x_k) \in M_\ell.$$

**Друго правило (уметање):** Ако није испуњен први услов, а јесте други,

$$(x_0, \dots, x_{j-1}, \sigma(x_{j-1}, x_j), x_j, \dots, x_k) \rightarrow (x_0, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_k) \in M_\ell.$$

Примена оба правила заиста одговара гранама у графу  $G_{MC_{*,\ell}(T)}$ .

Наиме, ако је  $x_{j-1} = \sigma(x_{j-2}, x_j)$ , онда  $x_{j-1}$  лежи на јединственој путањи од  $x_{j-2}$  до  $x_j$ , па је

$$d(x_{j-2}, x_j) = d(x_{j-2}, x_{j-1}) + d(x_{j-1}, x_j).$$

Дакле, брисање  $x_{j-1}$  не мења дужину низа. Исто важи за убацивање  $\sigma(x_{j-1}, x_j)$ .

Најпре, уверимо се да је  $M$  упаривање.

**Лема 4.4.2.** *Претходно дефинисано  $M$  је упаривање.*

**Доказ.** Нека је  $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_k)$  генератор магнитудног комплекса и нека је  $j$  најмањи индекс на ком се може применити једно од правила упаривања.

Претпоставимо најпре да се примењује правило уметања. Тада имамо  $d(x_{j-1}, x_j) \geq 2$ , и правило брисања се на том месту не може применити. Нека је  $w = \sigma(x_{j-1}, x_j)$  и  $\mathbf{y} = (x_0, \dots, x_{j-1}, w, x_j, \dots, x_k)$ .

Показаћемо да се на  $\mathbf{y}$  примењује правило брисања, и то управо брисањем чвора  $w$

За индексе мање од  $j$ , низови  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  имају исте префиксе, па се на њима ниједно правило не може применити. Како је  $d(x_{j-1}, w) = 1$ , правило уметања се не може применити на позицији  $j$ . Такође, не може се применити ни правило брисања чвора  $x_{j-1}$ , јер би у супротном важило  $x_{j-1} = \sigma(x_{j-2}, w)$ . Међутим, како  $w$  лежи на јединственом путу од  $x_{j-1}$  до  $x_j$ , из јединствености путева у стаблу следило би

$$x_{j-1} = \sigma(x_{j-2}, x_j),$$

што противречи претпоставци да се на  $\mathbf{x}$  на позицији  $j$  примењује правило уметања.

На следећој позицији важи  $w = \sigma(x_{j-1}, x_j)$ , па се примењује правило брисања, и добијамо  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \in M$ .

Обратно, претпоставимо да се на  $\mathbf{x}$  примењује правило брисања на позицији  $j$ , односно  $x_{j-1} = \sigma(x_{j-2}, x_j)$ . Нека је  $\mathbf{y} = (x_0, \dots, x_{j-2}, x_j, \dots, x_k)$  низ добијен брисањем  $x_{j-1}$ . Пошто је  $x_{j-1}$  сусед чвора  $x_{j-2}$  и лежи на путу од  $x_{j-2}$  до  $x_j$ , важи  $d(x_{j-2}, x_j) \geq 2$ . Зато се на  $\mathbf{y}$  може применити правило уметања између  $x_{j-2}$  и  $x_j$ . Оно је уједно и прво правило које се може применити. Заиста, сви ранији чворови су исти као код  $\mathbf{x}$ , те је немогуће применити било које правило. Ако би се на  $\mathbf{y}$  на том месту (на месту чвора  $x_{j-2}$ ) могло применити правило брисања, онда би за  $j \geq 3$  важило  $x_{j-2} = \sigma(x_{j-3}, x_j)$ . Пошто важи  $x_{j-1} = \sigma(x_{j-2}, x_j)$ , а јединствени пут од  $x_{j-3}$  до  $x_j$  пролази кроз  $x_{j-2}$  и  $x_{j-1}$ , добијамо

$$x_{j-2} = \sigma(x_{j-3}, x_{j-1}).$$

То значи да би се на  $\mathbf{x}$  правило брисања могло применити већ на позицији  $j - 1$ , што је немогуће.

Стога се на  $\mathbf{y}$  примењује правило уметања, при чему се умеће управо  $\sigma(x_{j-2}, x_j) = x_{j-1}$ , и опет добијамо  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \in M$ .

Према томе, свако уметање је инверзно одговарајућем брисању. Пошто је место на ком се правило примењује јединствено, сваки низ припада највише једном пару. Отуда је  $M$  упаривање.  $\square$

**Лема 4.4.3.** *Претходно дефинисано упаривање  $M$  је Морсово упаривање на мањинском комплексу  $MC_{*,*}(T)$ .*

**Доказ.** За  $\alpha \rightarrow \beta \in M$ ,  $d_{\alpha,\beta}$  представља „множење” са  $\pm 1$ , те је изоморфизам. Остаје нам да покажемо да у графу  $G_{MC_{*,*}(T)}^M$  не постоје усмерени циклуси.

Претпоставимо супротно. Тада постоји део усмереног циклуса облика

$$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha',$$

при чему важи  $\alpha \rightarrow \beta \notin M$  и  $\alpha' \rightarrow \beta \in M$ .

Нека је  $r$  индекс на ком се на  $\alpha = (x_0, \dots, x_k)$  примењује правило брисања (чвор  $\gamma$ , за који  $\gamma \rightarrow \alpha \in M$  припада циклусу, се добија од  $\alpha$  брисањем чвора). Дакле,  $x_{r-1} = \sigma(x_{r-2}, x_r)$ .

Нека се  $\beta$  добија из  $\alpha$  брисањем чвора  $x_{j-1}$ . Како је  $\alpha \rightarrow \beta$  грана, имамо

$$d(x_{j-2}, x_j) = d(x_{j-2}, x_{j-1}) + d(x_{j-1}, x_j).$$

Покажимо да случај  $j < r$  није могуће. Заиста, ако је  $d(x_{j-2}, x_{j-1}) = 1$ , онда из претходне једнакости следи  $x_{j-1} = \sigma(x_{j-2}, x_j)$ , па би се правило брисања применило већ на индексу  $j < r$ .

Ако је  $d(x_{j-2}, x_{j-1}) \geq 2$ , онда би се правило упаривања применило још раније, на пару  $(x_{j-2}, x_{j-1})$ . У оба случаја добијамо контрадикцију.

Дакле,  $j \geq r$ . Случај  $j = r$  такође није могућ, јер би тада  $\alpha \rightarrow \beta \in M$ . Стога имамо

$$j > r.$$

Покажимо да се на  $\beta$  прво примењује правило које брише чвор  $x_{r-1}$ .

Ако је  $j \geq r + 2$ , брисање  $x_{j-1}$  не мења префикс  $(x_0, \dots, x_r)$ , па претходно тврђење очигледно важи.

Преостаје нам случај  $j = r + 1$ . Тада је обрисан чвор  $x_r$ . Брисање  $x_r$  чува дужину пута, па следи да  $x_r$  лежи на јединственом путу од  $x_{r-1}$  до  $x_{r+1}$ . Са друге стране, услов  $x_{r-1} = \sigma(x_{r-2}, x_r)$  каже да  $x_{r-1}$  лежи на јединственом путу од  $x_{r-2}$  до  $x_r$  и да је сусед чвора  $x_{r-2}$ . Пошто је  $T$  стабло, јединственост путева даје

$$x_{r-1} = \sigma(x_{r-2}, x_{r+1}).$$

Зато се и након брисања  $x_r$ , на низу  $\beta$  примењује правило брисања, па постоји низ  $\gamma$  за који важи  $\beta \rightarrow \gamma \in M$ . Међутим,  $\alpha' \rightarrow \beta \in M$ , што је немогуће, јер је  $M$  упаривање.

Стога,  $M$  је Морсово упаривање.  $\square$

**Теорема 4.4.2.** *Матрична хомологија сшабла  $T = (V, E)$  је дата са*

$$\mathrm{MH}_{k,\ell}(T) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{|V|}, & k = \ell = 0, \\ \mathbb{Z}^{2|V|-2}, & k = \ell \geq 1. \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Доказ.** Одредимо критичне низове за упаривање  $M$ , које је по леми 4.4.3 Морсово.

Јасно, сви низови  $(u)$ , за чворове  $u \in V$ , су критични. За  $k \geq 1$ , ако је  $(x_0, \dots, x_k)$  критичан, онда мора важити  $d(x_i, x_{i+1}) = 1$ , за све  $i$ , јер би у супротном могли да применимо правило убацивања  $\sigma(x_i, x_{i+1})$ , за неко  $i$ . Низови  $(u, v)$ , за  $uv \in E$ , су стога критични.

Претпоставимо сада да је  $k \geq 2$ . За  $2 \leq j \leq k$ , чворови  $x_{j-2}$  и  $x_{j-1}$  су суседни, као и  $x_{j-1}$  и  $x_j$ . Уколико би важило  $x_{j-2} \neq x_j$ , јединствени пут од  $x_{j-2}$  до  $x_j$  био би  $x_{j-2} - x_{j-1} - x_j$ , те је  $x_{j-1} = \sigma(x_{j-2}, x_j)$ . Међутим, могли бисмо да применимо правило брисања, што је у супротности са претпоставком да је низ критичан. Према томе,  $x_j = x_{j-2}$  за све  $2 \leq j \leq k$ . Следи да су сви критични низови дати у једном од следећа два облика:

- $(x_0)$  за  $x_0 \in V$ .
- $(x_0, \dots, x_k)$ , где се наизменично ређају чворови  $x_0$  и  $x_1$  за које важи  $x_0 x_1 \in E$ .

Дакле, сви Морсови комплекси, за упаривања  $M_\ell$ , су концентрисани у степену  $\ell$ . Стога, применом теореме 4.3.1, за  $\ell = 0$ , имамо

$$\mathrm{MH}_{0,0}(T) \cong \mathbb{Z}^{|V|}.$$

Даље, како је  $T$  стабло, имамо  $|E| = |V| - 1$ . За сваку неоријентисану грану  $uv \in E$  постоје два критична низа – један који почиње са  $u$ , и други који почиње са  $v$ . Опет, применом теореме 4.3.1, за  $\ell \geq 1$ , добијамо

$$\mathrm{MH}_{\ell,\ell}(T) \cong \mathbb{Z}^{2|V|-2}.$$

Остале хомолошке групе су тривијалне, те је тврђење теореме показано.  $\square$

# Библиографија

- [1] Karim A. Adiprasito and Bruno Benedetti. Metric geometry, convexity and collapsibility. Algebraic and Geometric Topology, 13(3):1597–1620, 2013.
- [2] Karim A. Adiprasito and Bruno Benedetti. Subdivisions, shellability and collapsibility of products. Combinatorica, **37**(1):1–30, 2017.
- [3] Jr. Alexander Kirillov. An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras, volume 113 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2008.
- [4] Michèle Audin and Mihai Damian. Morse Theory and Floer Homology. Universitext. Springer, 2014.
- [5] Rafael Ayala, José Antonio Vilches, Gregor Jerše, and Neža Mramor Kosta. Discrete gradient fields on infinite complexes. Discrete and Continuous Dynamical Systems, **30**(3):623–639, 2011.
- [6] Donald W. Barnes and Larry A. Lambe. A fixed point approach to homological perturbation theory. Proceedings of the American Mathematical Society, **112**(3):881–892, 1991.
- [7] Ulrich Bauer. Ripser: efficient computation of Vietoris–Rips persistence barcodes. Journal of Applied and Computational Topology, 5(3):391–423, 2021.
- [8] Margaret Bayer, Marija Jelić Milutinović, and Julianne Vega. Perfect matching complexes of honeycomb graphs. Electronic Journal of Combinatorics, **30**(2):Paper No. 2.45, 23, 2023.
- [9] Bruno Benedetti. Smoothing discrete Morse theory. Annales de l’Institut Fourier, **58**(4):1347–1385, 2008.

- [10] Bruno Benedetti. Discrete Morse theory for manifolds with boundary. Transactions of the American Mathematical Society, **364**(12):6631–6670, 2012.
- [11] Morten Brun and Darij Grinberg. The Dowker theorem via discrete Morse theory, 2024. arXiv preprint: <https://arxiv.org/abs/2407.15454>.
- [12] Stewart S. Cairns. Triangulation of the manifold of class one. Bulletin of the American Mathematical Society, **41**(8):549–552, 1935.
- [13] Stewart S. Cairns. A simple triangulation method for smooth manifolds. Bulletin of the American Mathematical Society, **67**:389–390, 1961.
- [14] Manoj K. Chari. On discrete Morse functions and combinatorial decompositions. Discrete Mathematics, **217**(1–3):101–113, 2000.
- [15] Marshall M. Cohen. A Course in Simple-Homotopy Theory, volume **10** of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1973.
- [16] Ximena Fernández. Morse theory for group presentations. Transactions of the American Mathematical Society, **377**(4):2495–2523, 2024.
- [17] Robin Forman. Morse theory for cell complexes. Advances of Mathematics, **134**(1):90–145, 1998.
- [18] Robin Forman. A user’s guide to discrete Morse theory. Séminaire Lotharingien de Combinatoire, **48**, 2002. Article B48c, 35 pages.
- [19] Étienne Gallais. Combinatorial realization of the Thom–Smale complex via discrete Morse theory. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, **9**(2):229–252, 2010.
- [20] Leslie. C. Glaser. Geometrical Combinatorial Topology I. Van Nostrand Reinhold, New York, 1970.
- [21] Yuzhou Gu. Graph magnitude homology via algebraic Morse theory, 2018. arXiv preprint: <https://arxiv.org/abs/1809.07240>.
- [22] Allen Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.
- [23] Morris. W. Hirsch and Barry Mazur. Smoothings of Piecewise Linear

- Manifolds, volume **80** of Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1974.
- [24] Michael Jöllenbeck and Volkmar Welker. Resolution of the residue class field via algebraic discrete Morse theory, 2005. arXiv preprint: <https://arxiv.org/abs/math/0501179>.
- [25] Robion. C. Kirby. Problems in low-dimensional topology. In W. H. Kazez, editor, Geometric Topology, pages 35–473. American Mathematical Society, 1997.
- [26] Dmitry. N. Kozlov. Configuration spaces of labeled points on a circle with two anchors. Topology and its Applications, **315**:108147, 2022. Paper No. 108147.
- [27] John Milnor. Morse Theory. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.
- [28] John Milnor. Lectures on the h-Cobordism Theorem. Princeton University Press, 1965.
- [29] Anupam Mondal and Pritam Chandra Pramanik. A note on an application of discrete Morse theoretic techniques on the complex of disconnected graphs. Examples and Counterexamples, **7**:100174, 2025.
- [30] James. R. Munkres. Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms. Annals of Mathematics, **72**:521–554, 1960.
- [31] James. R. Munkres. Elements of Algebraic Topology. Addison–Wesley, Menlo Park, 1984.
- [32] Liviu I. Nicolaescu. An Invitation to Morse Theory. Universitext. Springer, New York, 2 edition, 2011.
- [33] Giovanni Paolini and Mario Salvetti. Proof of the  $K(\pi, 1)$  conjecture for affine Artin groups. Inventiones Mathematicae, **224**(2):487–572, 2021.
- [34] Collin. P. Rourke and Brian. J. Sanderson. Introduction to Piecewise-Linear Topology. Springer-Verlag, New York, 1972.
- [35] Emil Sköldbberg. Morse theory from an algebraic viewpoint. Transactions of

- the American Mathematical Society, **358**(1):115–129, 2006.
- [36] Stephen Smale. Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four. Annals of Mathematics, **74**(2):391–406, 1961.
- [37] Aakriti Upadhyay, Borris Goldfarb, Weifu Wang, and Chinwe Ekenna. A new application of discrete Morse theory to optimizing safe motion planning paths. In Algorithmic Foundations of Robotics XV, volume **25** of Springer Proceedings in Advanced Robotics, pages 18–35, Cham, 2023. Springer.
- [38] John Henry C. Whitehead. On  $C_1$ -complexes. Annals of Mathematics, **41**(4):809–824, 1940.
- [39] Eric C. Zeeman. On the dunce hat. Topology, **2**:341–358, 1964.