

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET



PRIMENA FURIJEOVIH REDOVA I ELEMENATA
VARIJACIONOG RAČUNA U ELEMENTARNOJ
MATEMATICI
MASTER RAD

Mentor: prof. dr M. Knežević

Student: Jasmina Kozomora
Broj indeksa: 1137/2025

Beograd, 2026. godine

SADRŽAJ:

UVOD.....	1
Predmet rada	1
Cilj i zadaci rada	1
Metode rada	2
Struktura rada.....	2
1. FURIJEVI REDOVI U MATEMATIČKOJ ANALIZI	4
1.1. Nastanak i značaj Furijeove analize	4
1.2. Trigonometrijski sistem funkcija i ortogonalnost.....	4
1.3. Pojam Furijeovog reda i Furijeovi koeficijenti.....	5
1.4. Parne i neparne funkcije	6
1.5. Konvergencija Furijeovih redova	7
1.6. Parsevalova formula	8
2. PRIMENA FURIJEVIH REDOVA U ELEMENTARNOJ MATEMATICI	9
2.1. Razvoj jednostavnih funkcija u Furieov red	9
Razvoj funkcije $f(x)=x$	9
Razvoj funkcije $f(x)=x^2$	9
2.2. Trigonometrijske sume i klasični numerički redovi	10
2.3. Virtingerova nejednakost kao primena Furijeovih redova	11
2.4. Periodične funkcije i signali kao ilustrativni primeri.....	12
2.5. Pedagoški značaj Furijeovih redova u elementarnoj matematici	13
3. OSNOVNI POJMOVI VARIJACIONOG RAČUNA	15
3.1. Pojam funkcionala	15
3.2. Ekstrem funkcionala i prva varijacija	16
3.3. Euler-Lagrangeova jednačina	16
3.4. Klasični varijacioni problemi	18
4. ELEMENTARNE PRIMENE VARIJACIONOG RAČUNA	20
4.1. Minimizacija integrala	20
4.2. Metod najmanjih kvadrata	21
4.3. Izoperimetrijski problemi	22
4.4. Princip minimalne energije.....	23
5. VEZA FURIJEVIH REDOVA I VARIJACIONIH METODA	26
5.1. Ortogonalnost kao zajednička osnova	26

5.2. Furijeov red kao najbolja aproksimacija funkcije.....	27
5.3. Parsevalova formula i minimizacija greške	27
5.4. Galerkinova metoda kao most između dve oblasti	28
5.5. Jednostavan primer povezivanja Furijeovih redova i varijacionog pristupa	29
6. ODABRANI PRIMERI I ZADACI	30
6.1. Primer razvoja funkcije $f(x)=x$	30
6.2. Primer razvoja funkcije $f(x)=x^2$	31
6.3. Primena Parsevalove formule	32
6.4. Najbolja aproksimacija trigonometrijskim polinomom.....	33
6.5. Jednostavan varijacioni problem	34
6.6. Potpun dokaz Virtingerove nejednakosti.....	35
7. ZNAČAJ ANALITIČKIH METODA U ELEMENTARNOJ MATEMATICI.....	37
7.1. Elementarni problemi kao polazište za višu analizu.....	37
7.2. Didaktička vrednost izabranog pristupa	37
7.3. Ograničenja i mogućnosti daljeg istraživanja.....	38
8. ZAKLJUČAK.....	40
LITERATURA	42
BIOGRAFIJA.....	43
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA.....	44
KEY WORDS DOCUMENTATION	45

UVOD

Predmet rada

Predmet ovog master rada jeste primena Furijeovih redova i osnovnih elemenata varijacionog računa u rešavanju, dokazivanju i tumačenju problema koji se mogu povezati sa elementarnom matematikom. Rad nije zamišljen kao potpuno apstraktno izlaganje harmonijske analize i varijacionog računa, već kao prikaz načina na koji se pojmovi više analize prirodno nadovezuju na poznate sadržaje: trigonometrijske funkcije, numeričke redove, integrale, nejednakosti, aproksimaciju i ekstremalne probleme.

Osnovna matematička osa rada glasi:

ortogonalnost $\rightarrow$ Furijeovi koeficijenti $\rightarrow$ najbolja aproksimacija $\rightarrow$ varijacioni princip.

Ortogonalnost trigonometrijskog sistema omogućava izdvajanje Furijeovih koeficijenata, a isti koeficijenti određuju ortogonalnu projekciju funkcije na prostor trigonometrijskih polinoma. Zbog toga parcijalna suma Furijeovog reda nije samo formalni zbir, već najbolja aproksimacija funkcije u smislu kvadratne greške. Uslov ortogonalnosti greške zatim se može protumačiti kao uslov stacionarnosti odgovarajućeg funkcionala, čime se uspostavlja neposredna veza sa varijacionim računom.¹

Drugi deo teme odnosi se na osnovne pojmove varijacionog računa. Za razliku od običnog diferencijalnog računa, u kome se ekstrem traži među vrednostima promenljive, varijacioni račun razmatra ekstreme funkcionala, odnosno veličina koje zavise od cele funkcije. Takav pristup omogućava da se problemi minimuma dužine, energije ili greške zapišu u obliku integrala i rešavaju preko prve varijacije i Euler-Lagrangeove jednačine.²

Cilj i zadaci rada

Osnovni cilj rada jeste da se matematički precizno, ali pristupačno, prikaže kako se Furijeovi redovi i osnovni principi varijacionog računa mogu primeniti na elementarne matematičke probleme. Poseban akcenat stavljen je na potpuno izvođenje formula, jasno navođenje uslova pod kojima rezultati važe i proveru da li dobijena stacionarna funkcija zaista daje minimum.

1 N. Teofanov, Harmonijska analiza - nastanak i nasleđe, PMF Novi Sad, 2016, str. 3-4.

2 M. Čorba, Varijacioni račun i metoda Galerkina, PMF Novi Sad, 2014, str. 8-11.

U skladu sa tim ciljem postavljeni su sledeći zadaci: da se prikažu trigonometrijski sistem i njegove relacije ortogonalnosti; da se izvedu formule za Furijeove koeficijente i objasni značenje konvergencije; da se potpuno razviju funkcije $f(x) = x$ i $f(x) = x^2$ i iz tih razvoja izvedu klasične numeričke sume; da se dokaže Virtingerova nejednakost pomoću Furijeovih koeficijenata; da se standardno definišu prva varijacija i Euler-Lagrangeova jednačina; da se kod problema minimizacije izvrši neposredna provera minimuma; i da se dokaže teorema prema kojoj je parcijalna suma Furijeovog reda najbolja trigonometrijska aproksimacija u L^2 -smislu.

Rad polazi od stanovišta da elementarna matematika nije zatvoren skup izolovanih postupaka. Razvoj funkcije u Furijeov red može se istovremeno razumeti kao računski postupak i kao ortogonalna projekcija, dok se minimizacija kvadratne greške može razumeti kao jednostavan varijacioni problem. Na taj način isti matematički sadržaj dobija računsko, geometrijsko i varijaciono tumačenje.³

Metode rada

U radu se koristi metoda teorijske analize literature iz oblasti matematičke analize, Furijeovih redova, ortogonalnih razvoja i varijacionog računa. Teorijski navodi dopunjeni su metodom matematičkog izvođenja: formule se ne navode samo u konačnom obliku, već se izvode primenom ortogonalnosti, parcijalne integracije, Parsevalove formule i osnovne leme varijacionog računa.

Posebno mesto ima metoda dokaza na konkretnim primerima. Razvijaju se funkcije x i x^2 , izvode se klasični numerički redovi, dokazuje se Virtingerova nejednakost i proverava minimum funkcionala $\int (y')^2 dx$. Komparativna metoda koristi se pri poređenju tri ekvivalentne interpretacije: Furijeovi koeficijenti kao koeficijenti dobijeni integrisanjem, kao koordinate ortogonalne projekcije i kao minimizatori kvadratne greške.⁴

Struktura rada

Rad je organizovan u osam poglavlja. U prvom poglavlju izložene su osnove Furijeovih redova: trigonometrijski sistem, ortogonalnost, koeficijenti, simetrija funkcija, uslovi konvergencije i Parsevalova formula. Drugo poglavlje sadrži primene na razvoje funkcija, numeričke redove i dokaz Virtingerove nejednakosti. Treće poglavlje uvodi

³ Y. B. Jia, Orthogonal Functions and Fourier Series, Iowa State University, 2024, str. 1-3.

⁴ Y. B. Jia, Orthogonal Functions and Fourier Series, str. 1-3; M. Svetlik, Matematika 3 - Furijeovi redovi, str. 1-3.

funkcional, prvu varijaciju i Euler-Lagrangeovu jednačinu, a četvrto prikazuje elementarne varijacione probleme i neposrednu proveru minimuma.

Peto poglavlje predstavlja centralni deo rada. U njemu se preko ortogonalne projekcije dokazuje da je parcijalna suma Furijeovog reda najbolja aproksimacija funkcije trigonometrijskim polinomom istog stepena, a Parsevalova formula tumači se kao Pitagorina teorema u prostoru funkcija. Šesto poglavlje donosi potpuno rešene primere i zadatke, uključujući detaljan dokaz Virtingerove nejednakosti. Sedmo poglavlje razmatra didaktički značaj pristupa i mogućnosti daljeg istraživanja, dok osmo poglavlje sadrži zaključna razmatranja.

1. FURIJEVI REDOVI U MATEMATIČKOJ ANALIZI

1.1. Nastanak i značaj Furijeove analize

Furijeova analiza predstavlja jednu od ključnih oblasti matematičke analize, jer omogućava da se složene funkcije posmatraju preko jednostavnijih, periodičnih komponenti. U njoj osnovi nalazi se ideja da se odgovarajuća funkcija, pod određenim uslovima, može predstaviti pomoću zbira sinusnih i kosinusnih funkcija. Takvo predstavljanje posebno je važno zato što povezuje elementarnu trigonometriju sa dubljim pojmovima matematičke analize: konvergencijom funkcionalnih redova, ortogonalnošću, aproksimacijom i integralnim kriterijumima.⁵

Istorijski posmatrano, Furijeova analiza se razvijala iz potrebe da se reše konkretni problemi matematičke fizike. U literaturi se često ističe da su problemi treperenja žice, provođenja toplote i analize periodičnih pojava imali značajnu ulogu u razvoju ideje da se funkcije mogu analizirati preko harmonijskih komponenti. Zbog toga Furijeovi redovi nisu nastali kao izolovana formalna konstrukcija, već kao odgovor na pitanja koja su se prirodno javljala u matematici, fizici i tehničkim naukama.⁶

Za temu ovog rada posebno je važno to što Furijeovi redovi omogućavaju da se poznati pojmovi elementarne matematike posmatraju iz šire perspektive. Sinus i kosinus se u elementarnoj matematici najpre uvode kao trigonometrijske funkcije, ali se u Furijeovoj analizi javljaju kao osnovni gradivni elementi za predstavljanje mnogo opštijih funkcija. Time se pokazuje kako jednostavni trigonometrijski izrazi mogu voditi ka snažnim metodama za rešavanje problema aproksimacije, izračunavanja suma i analize periodičnih procesa.

U ovom radu Furijeovi redovi neće biti posmatrani samo kao formalni zapisi funkcija, već i kao sredstvo za razumevanje ortogonalnosti, minimizacije greške i veza između elementarne i više matematike. Takav pristup odgovara osnovnoj nameri rada: da se na primerima koji su dovoljno jednostavni za praćenje pokaže kako analitičke metode mogu dati precizna i korisna objašnjenja problema koji se na prvi pogled čine elementarnim.

1.2. Trigonometrijski sistem funkcija i ortogonalnost

Polaznu osnovu Furijeovih redova čini trigonometrijski sistem

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

⁵ N. Teofanov, Harmonijska analiza - nastanak i nasleđe, PMF Novi Sad, 2016, str. 3-4.

⁶ E. Jodal, O konvergenciji trigonometrijskih redova, master rad, PMF Novi Sad, str. 6-8; N. Teofanov, Harmonijska analiza - nastanak i nasleđe, str. 4-10.

koji se najčešće posmatra na intervalu $[-\pi, \pi]$. Njegova ključna osobina jeste ortogonalnost. Za prirodne brojeve $m, n \geq 1$ važe relacije⁷

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases},$$

kao i

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx = 0.$$

Konstantna funkcija ortogonalna je na sve sinusne i kosinusne članove:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx = 0,$$

ali njena kvadratna norma iznosi

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 2\pi.$$

Upravo poslednja jednakost objašnjava zašto se konstantni član Furijeovog reda zapisuje u obliku $a_0/2$. Ako se uvede skalarni proizvod

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx,$$

navedene relacije pokazuju da su različiti elementi trigonometrijskog sistema međusobno ortogonalni. Analogija sa vektorima je neposredna: kao što se vektor rastavlja na komponente duž ortogonalnih osa, tako se funkcija rastavlja na komponente u pravcu funkcija 1 , $\cos kx$ i $\sin kx$. Ova činjenica biće osnova i za računanje Furijeovih koeficijenata i za dokaz najbolje aproksimacije.

1.3. Pojam Furijeovog reda i Furijeovi koeficijenti

Neka je $f: R \rightarrow R$ funkcija koja je 2π -periodična i integrabilna na intervalu $[-\pi, \pi]$. Funkciji f pridružuje se Furijeov red⁸

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

gde su Furijeovi koeficijenti određeni formulama

⁷ M. Svetlik, Matematika 3 - Furijeovi redovi, Matematički fakultet, Beograd, str. 1-2.

⁸ D. Kečkić, Furijeovi redovi, Matematički fakultet, Beograd, str. 1-3.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, k \in N,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, k \in N.$$

Formule se dobijaju direktno iz ortogonalnosti. Na primer, ako se formalni zapis reda pomnoži sa $\cos(mx)$ i integriše na $[-\pi, \pi]$, svi članovi nestaju osim člana koji sadrži $a_m \cos(mx)$. Tada je

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx) dx = \pi a_m,$$

odakle sledi formula za a_m . Na isti način dobijaju se a_0 i b_m .⁹

Oznaka $\sim$ ne znači da je funkcija automatski jednaka svom Furijeovom redu u svakoj tački. Ona samo označava da je funkciji pridružen red sa navedenim koeficijentima. Da li red konvergira, kojoj vrednosti konvergira i u kom smislu, zavisi od osobina funkcije.

n -ta parcijalna suma Furijeovog reda jeste trigonometrijski polinom

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

U primenama se koristi upravo $S_n f$, jer konačan broj harmonika predstavlja praktičnu aproksimaciju funkcije. Kasnije će biti dokazano da među svim trigonometrijskim polinomima stepena najviše n upravo $S_n f$ daje najmanju kvadratnu grešku.

1.4. Parne i neparne funkcije

Kod izračunavanja Furijeovih koeficijenata posebnu ulogu imaju parne i neparne funkcije. Funkcija f je parna ako važi $f(-x) = f(x)$, a neparna ako važi $f(-x) = -f(x)$. Ove osobine su važne zato što utiču na oblik Furijeovog reda i često značajno skraćuju računanje.¹⁰

Ako je funkcija f parna, tada je proizvod $f(x) \sin(kx)$ neparna funkcija, pa je integral tog proizvoda na simetričnom intervalu $[-\pi, \pi]$ jednak nuli. Zbog toga su svi koeficijenti b_k jednaki nuli, a Furijeov red parne funkcije sadrži samo kosinusne članove. Za parnu funkciju dobijaju se formule

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, b_k = 0.$$

⁹ M. Svetlik, Matematika 3 - Furijeovi redovi, str. 2-5.

¹⁰ M. Svetlik, Matematika 3 - Furijeovi redovi, str. 6-7.

Ako je funkcija f neparna, tada su koeficijenti a_0 i a_k jednaki nuli, a Furijeov red sadrži samo sinusne članove. U tom slučaju važe formule

$$a_0 = 0, a_k = 0, b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Ovaj deo teorije je posebno važan za primene u elementarnoj matematici, jer se mnogi zadaci mogu pojednostaviti prepoznavanjem simetrije funkcije. Umesto da se računaju svi koeficijenti, dovoljno je unapred zaključiti koji od njih moraju biti jednaki nuli. Tako se, na primer, funkcija $f(x)=x$ razvija u sinusni red, dok se funkcija $f(x)=x^2$ razvija u kosinusni red.

1.5. Konvergencija Furijeovih redova

Postojanje Furijeovih koeficijenata ne garantuje samo po sebi da red u svakoj tački ima zbir jednak funkciji. Zato je potrebno navesti dovoljne uslove konvergencije. Jedan standardan oblik Dirichletovog kriterijuma glasi: ako je f 2π -periodična i po delovima glatka na $[-\pi, \pi]$ (dovoljno je da na konačno mnogo podintervala bude neprekidno diferencijabilna), tada njene parcijalne sume u svakoj tački x konvergiraju ka srednjoj vrednosti bočnih graničnih vrednosti¹¹

$$S_n f(x) \rightarrow \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Ako je f neprekidna u tački x , tada je $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$, pa red konvergira ka $f(x)$. Ako funkcija ima skok, red konvergira ka aritmetičkoj sredini leve i desne granične vrednosti.

Ovi uslovi moraju se proveriti u konkretnim primerima. Za periodično produženje funkcije $f(x) = x$ red konvergira ka x za $-\pi < x < \pi$, dok u tačkama $x = (2j+1)\pi, j \in \mathbb{Z}$, konvergira ka nuli, jer su bočne granične vrednosti π i $-\pi$. Za funkciju $f(x) = x^2$ periodično produženje je neprekidno i na krajevima osnovnog intervala, pa red konvergira ka x^2 u svim tačkama. Ovakvo preciziranje omogućava da se posebne vrednosti promenljive kasnije uvrstavaju bez nejasnoće.

1.6. Parsevalova formula

Za funkciju $f \in L^2[-\pi, \pi]$, uz standardnu normalizaciju Furijeovih koeficijenata, Parsevalova formula glasi¹²

11 M. Svetlik, Matematika 3 - Furijeovi redovi, str. 7-10.

12 M. Svetlik, Matematika 3 - Furijeovi redovi, str. 18-20.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Ako se uvede norma

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx,$$

Parsevalova formula pokazuje da je kvadrat norme funkcije jednak zbiru kvadrata njenih koordinata u trigonometrijskom sistemu. Zato se ona može posmatrati kao analog Pitagorine teoreme u prostoru funkcija.

Formula ima dve uloge u ovom radu. Prva je računska: iz Furijeovih koeficijenata jednostavnih funkcija mogu se dobiti tačne vrednosti klasičnih numeričkih redova. Druga je konceptualna: Parsevalova formula povezuje ortogonalnost sa kvadratnom greškom aproksimacije i predstavlja osnovu za tumačenje Furijeove parcijalne sume kao najbolje aproksimacije.

2. PRIMENA FURIJEOVIH REDOVA U ELEMENTARNOJ MATEMATICI

2.1. Razvoj jednostavnih funkcija u Furijeov red

Razvoj funkcije $f(x) = x$

Posmatrajmo funkciju $f(x) = x$ na intervalu $(-\pi, \pi)$ i njeno 2π -periodično produženje. Funkcija je neparna, pa su $a_0 = 0$ i $a_k = 0$, a računaju se samo sinusni koeficijenti¹³

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx.$$

Parcijalnom integracijom, za $u = x$ i $dv = \sin(kx)dx$, dobijamo $du = dx$ i $v = -\cos(kx)/k$, pa je

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx &= \left[\frac{-x \cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos(kx) dx. \\ \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx &= \frac{-\pi \cos(k\pi)}{k} + \left[\frac{\sin(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{-\pi(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Zato je

$$b_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k},$$

pa Furijeov razvoj glasi

$$x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx), \quad -\pi < x < \pi.$$

Jednakost je navedena na otvorenom intervalu, jer periodično produženje ima skok u tačkama $\pm\pi$; u tim tačkama red konvergira ka nuli.

Razvoj funkcije $f(x) = x^2$

Funkcija x^2 je parna, pa su svi $b_k = 0$. Slobodni koeficijent je

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Za $k \geq 1$ važi

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx.$$

Prvom parcijalnom integracijom, uz $u = x^2$ i $dv = \cos(kx)dx$, dobija se

$$\int_0^\pi x^2 \cos(kx) dx = \frac{-2}{k} \int_0^\pi x \sin(kx) dx,$$

jer je granični član $[x^2 \sin(kx)/k]_0^\pi$ jednak nuli. Prethodno izračunati integral daje

$$\int_0^\pi x^2 \cos(kx) dx = \frac{2\pi(-1)^k}{k^2},$$

pa je

$$a_k = \frac{4(-1)^k}{k^2}.$$

Prema tome,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx), \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Periodično produženje funkcije x^2 neprekidno je u krajnjim tačkama, zato jednakost važi i za $x = \pm\pi$.¹⁴

2.2. Trigonometrijske sume i klasični numerički redovi

Dobijeni Furijeovi razvoji omogućavaju izračunavanje poznatih numeričkih redova.

U razvoj funkcije x^2

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$

najpre uvrstimo $x = \pi$. Pošto je $\cos(k\pi) = (-1)^k$, dobijamo

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Otuda je

$$4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{2\pi^2}{3},$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ako se u isti razvoj uvrsti $x = 0$, tada je $\cos(0) = 1$ i sledi

14 Autorska obrada prema formulama za Furijeove koeficijente u: D. Kečkić, Furijeovi redovi, str. 1-4; M. Svetlik, Matematika 3 - Furijeovi redovi, str. 5-7.

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Zato je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Razvoj funkcije x daje i Leibnizov red. Za $x = \pi/2$ važi

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi}{2}.$$

Članovi sa parnim indeksom nestaju, dok se za neparne indekse vrednosti sinusa smenjuju između 1 i -1 . Dobijamo

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right),$$

pa je

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

U svakom od navedenih koraka posebna vrednost promenljive izabrana je u tački u kojoj Furijeov red konvergira ka vrednosti funkcije, što je opravdano kriterijumom iz poglavlja 1.5.¹⁵

2.3. Virtingerova nejednakost kao primena Furijeovih redova

Jedna konkretna i važna primena Furijeovih redova jeste dokaz Virtingerove nejednakosti.

Teorema 2.1 (Virtingerova nejednakost). Neka je $f \in C^1(\mathbb{R})$ realna i 2π -periodična funkcija za koju važi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Tada važi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx.$$

Jednakost važi tačno za funkcije oblika

$$f(x) = A \cos x + B \sin x.$$

Dokaz. Označimo Furijeove koeficijente funkcije f sa a_k i b_k . Uslov srednje vrednosti daje $a_0=0$. Parsevalova formula za f zato glasi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

Pošto je $f \in C^1(\mathbb{R})$ i 2π -periodična, Furijeovi koeficijenti njenog izvoda f' dobijaju se parcijalnom integracijom. Za $k \geq 1$ važi

$$a_k(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx) dx = kb_k$$

jer granični član nestaje zbog periodičnosti funkcije f . Analogno,

$$b_k(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(kx) dx = -ka_k$$

Osim toga, $a_0(f')=0$. Primena Parsevalove formule na f' daje

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2)$$

Oduzimanjem dve Parsevalove jednakosti dobija se

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - 1) (a_k^2 + b_k^2) \geq 0$$

odakle sledi tražena nejednakost. Jednakost važi ako i samo ako su $a_k=b_k=0$ za sve $k \geq 2$. Kako je $a_0=0$, ostaje samo prvi harmonik, pa je $f(x)=A \cos x + B \sin x$. Obrnuto, za svaku takvu funkciju jednakost neposredno važi.¹⁶

Ovaj dokaz pokazuje kako se trigonometrijska nejednakost svodi na jednostavno poređenje kvadrata Furijeovih koeficijenata. Time se istovremeno povezuju ortogonalnost, Parsevalova formula i princip minimalne energije.

2.4. Periodične funkcije i signali kao ilustrativni primeri

Iako je ovaj rad usmeren na elementarnu matematiku, korisno je ukratko pomenuti i interpretaciju Furijeovih redova preko periodičnih signala. U tom kontekstu funkcija se posmatra kao signal koji se ponavlja u jednakim vremenskim intervalima, a Furijeov red pokazuje da se takav signal može razložiti na osnovni harmonik i više harmonike. Ova

¹⁶ M. Svetlik, *Matematika 3 - Furijeovi redovi*, str. 16-20; R. Courant i D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Volume I*, Interscience Publishers, 1953, str. 49-55.

interpretacija je važna jer studentima daje jasniju sliku o tome zašto se sinusne i kosinusne funkcije pojavljuju kao osnovne komponente periodičnih pojava.¹⁷

Na primer, pravougaoni ili stepenasti signal može se opisati pomoću Furijeovog reda koji sadrži sinusne i kosinusne članove različitih frekvencija. Što se uzme više članova reda, parcijalna suma bolje opisuje oblik signala. Time se uočava praktično značenje delimičnih suma: one ne predstavljaju samo teorijski zapis, već konkretne aproksimacije koje se mogu upoređivati sa polaznom funkcijom.

U literaturi o Furijeovim redovima često se navode i problemi treperenja žice i provođenja toplote kao klasične oblasti u kojima se javljaju trigonometrijski redovi. U tim problemima rešenje se traži u obliku zbira harmonijskih komponenti, pri čemu svaka komponenta opisuje jedan način oscilovanja ili jedan deo raspodele toplote. Za potrebe ovog rada ti primeri se ne razvijaju detaljno, jer bi to zahtevalo širu teoriju parcijalnih diferencijalnih jednačina, ali se mogu pomenuti kao potvrda da su Furijeovi redovi nastali iz konkretnih matematičkih i fizičkih problema.¹⁸

U pedagoškom smislu, periodični signali su korisni zato što povezuju apstraktne formule sa slikovitim primerima. Kada se funkcija prikaže kao signal, postaje jasnije zašto se govori o amplitudi, frekvenciji i harmoniku. Ipak, u ovom radu akcenat ostaje na matematičkoj strani: računanje koeficijenata, konvergencija, izračunavanje suma i najbolja aproksimacija funkcije.

2.5. Pedagoški značaj Furijeovih redova u elementarnoj matematici

Primena Furijeovih redova u elementarnoj matematici ima i značajnu pedagošku vrednost. Kroz jednostavne primere studenti mogu da vide kako se poznate funkcije mogu predstaviti na neočekivan način, a zatim da iz tog predstavljanja dobiju konkretne numeričke rezultate. Takav pristup pokazuje da viša matematika nije odvojena od elementarne, već da je često prirodan nastavak pitanja koja se pojavljuju u radu sa funkcijama, redovima i integralima.

Posebno je važno to što se kroz Furijeove redove mogu povezati različite oblasti matematike. Trigonometrija daje osnovne funkcije, integralni račun omogućava određivanje koeficijenata, teorija redova objašnjava konvergenciju, dok linearna algebra i geometrijska

17 E. Jodal, O konvergenciji trigonometrijskih redova, str. 8-9.

18 E. Jodal, O konvergenciji trigonometrijskih redova, str. 61-66.

interpretacija ortogonalnosti daju dublje razumevanje aproksimacije. Na taj način Furijeovi redovi postaju mesto susreta više matematičkih ideja.

Za temu ovog master rada to je veoma značajno, jer se kasnije uvodi varijacioni račun. Kada se već u okviru Furijeove analize pokaže da se određena funkcija najbolje aproksimira delimičnom sumom njenog Furijeovog reda, prirodno se otvara pitanje minimizacije funkcionala. Drugim rečima, Furijeovi redovi pripremaju teren za varijacioni pristup, jer pokazuju kako se problemi funkcija mogu formulisati kroz minimizaciju integrala.

Zbog toga se može zaključiti da primena Furijeovih redova u elementarnoj matematici nije samo računska, već i konceptualna. Ona omogućava da se jednostavni primeri iskoriste za objašnjenje dubljih matematičkih pojmova, kao što su ortogonalnost, projekcija, srednja kvadratna greška, energija funkcije i najbolja aproksimacija. Upravo ti pojmovi predstavljaju osnovu za povezivanje Furijeovih redova sa elementima varijacionog računa u nastavku rada.¹⁹

19
16-20.

N. Teofanov, Harmonijska analiza - nastanak i nasleđe, str. 3-4; M. Svetlik, Matematika 3 - Furijeovi redovi, str.

3. OSNOVNI POJMOVI VARIJACIONOG RAČUNA

3.1. Pojam funkcionala

Varijacioni račun nastaje iz potrebe da se, umesto pojedinačne vrednosti promenljive, određuje cela funkcija koja neku veličinu čini najmanjom ili najvećom. U običnom diferencijalnom računu posmatra se funkcija koja broju pridružuje broj, dok se u varijacionom računu posmatra funkcional, odnosno preslikavanje koje funkciji pridružuje realan broj. Zato se može reći da varijacioni račun predstavlja prirodan nastavak ideje o ekstremima, samo što se sada ekstrem ne traži među brojevima, već među funkcijama.

Tipičan oblik funkcionala koji će se koristiti u ovom radu jeste određeni integral

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

gde je F data funkcija, a y nepoznata funkcija koja treba da zadovolji određene granične uslove. U najjednostavnijem slučaju ti uslovi imaju oblik

$$y(a) = A, y(b) = B.$$

Ovakva postavka je pogodna za elementarnu interpretaciju, jer se može posmatrati kao opšti oblik više poznatih zadataka: traženje najkraće krive, minimizacija energije, određivanje optimalne aproksimacije ili izbor funkcije koja daje najmanju srednju kvadratnu grešku.²⁰

Razlika između funkcije i funkcionala može se slikovito prikazati na sledeći način. Ako je $f(x)=x^2$, tada funkcija svakom broju x pridružuje broj x^2 . Sa druge strane, funkcional $J[y]$ uzima celu funkciju y i na osnovu nje računa jednu brojčanu vrednost. Na primer, integral kvadrata funkcije

$$J[y] = \int_a^b y^2(x) dx$$

meri ukupnu „veličinu” funkcije na posmatranom intervalu. Ako se umesto same funkcije posmatra kvadrat njenog izvoda, dobija se funkcional

$$J[y] = \int_a^b (y'(x))^2 dx,$$

koji se može tumačiti kao mera promene ili „energije” funkcije. Upravo ovakvi funkcionali se često pojavljuju u matematičkoj analizi, diferencijalnim jednačinama i teoriji aproksimacije.

Za potrebe ovog rada nije neophodno ulaziti u najopštije prostore funkcija. Dovoljno je posmatrati funkcije koje su dovoljno glatke da se mogu diferencirati i integrisati, uz jasno zadate krajnje uslove. Time se zadržava elementarni karakter izlaganja, a ipak se dobija dovoljno prostora da se pokaže osnovna ideja varijacionog računa: promenom funkcije ispituje se promena vrednosti funkcionala.

3.2. Ekstrem funkcionala i prva varijacija

U klasičnom diferencijalnom računu potreban uslov za lokalni ekstrem diferencijabilne funkcije jeste da njen prvi izvod bude jednak nuli. Analogna ideja postoji u varijacionom računu, ali se sada ne menja broj, već cela funkcija.

Neka je

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

funkcional definisan na skupu dopuštenih funkcija koje zadovoljavaju fiksirane granične uslove. Posmatra se familija bliskih funkcija

$$y_\varepsilon(x) = y(x) + \varepsilon h(x),$$

gde je ε realan parametar, a h proizvoljna dovoljno glatka varijacija za koju važi

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Ovi uslovi obezbeđuju da y_ε ima iste krajnje vrednosti kao y . Prva varijacija funkcionala u pravcu h definiše se standardnim zapisom

$$\delta J[y; h] = \frac{d}{d\varepsilon} J[y + \varepsilon h] \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Ako funkcija y daje lokalni ekstrem funkcionala, tada za svaku dozvoljenu varijaciju h mora važiti

$$\delta J[y; h] = 0.$$

To je potreban, ali u opštem slučaju ne i dovoljan uslov. Funkcija koja zadovoljava ovaj uslov naziva se stacionarna funkcija ili ekstremala; dodatnom analizom mora se utvrditi da li ona daje minimum, maksimum ili samo stacionarnu vrednost.²¹

3.3. Euler-Lagrangeova jednačina

Polazimo od funkcionala

21 J. Mitrović, Varijacioni račun i modeli rasta, PMF Novi Sad, 2011, str. 8-10; M. Čorba, Varijacioni račun i metoda Galerkina, str. 11-13.

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

i varijacije $y_\varepsilon = y + \varepsilon h$, pri čemu je $h(a) = h(b) = 0$. Diferenciranjem pod znakom integrala dobija se

$$\delta J[y; h] = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') dx \vee.$$

$$\delta J[y; h] = \int_a^b (F_y h + F_{y'} h') dx.$$

Na drugom članu primenjujemo parcijalnu integraciju:

$$\int_a^b F_{y'} h' dx = [F_{y'} h]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} (F_{y'}) h dx.$$

Granični član nestaje jer je $h(a) = h(b) = 0$, pa je

$$\delta J[y; h] = \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) h dx.$$

Ako je y stacionarna funkcija, tada je prethodni integral jednak nuli za svaku dozvoljenu funkciju h . Prema osnovnoj lemi varijacionog računa sledi²²

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

To je Euler-Lagrangeova jednačina. Ona predstavlja **potreban uslov** za ekstrem funkcionala, ali sama po sebi nije dovoljan uslov za minimum ili maksimum.

Ako F ne zavisi eksplicitno od y , tada je $F_y = 0$ i sledi

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0, F_{y'} = C.$$

Ako F ne zavisi eksplicitno od x , važi Beltramijev identitet

$$F - y' F_{y'} = C.$$

Kao jednostavan primer posmatrajmo funkcional dužine luka

$$L[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Ovde integrand ne zavisi od y , pa je

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

22 M. Čorba, Varijacioni račun i metoda Galerkina, str. 20-25; N. Đukanović, Hamiltonov princip i parcijalne diferencijalne jednačine, PMF Novi Sad, 2014, str. 29.

odakle sledi da je y' konstanta. Ekstremalna kriva je, dakle, prava linija. Činjenica da ona zaista daje minimum može se potvrditi geometrijski ili dodatnom analizom funkcionala.²³

3.4. Klasični varijacioni problemi

Klasični varijacioni problemi imaju dvostruku ulogu u ovom radu. Sa jedne strane, oni pokazuju istorijski i teorijski značaj varijacionog računa. Sa druge strane, oni služe kao jasni primeri pomoću kojih se apstraktni pojmovi mogu približiti elementarnoj matematici.

Zbog toga se u ovom poglavlju ne ide u detaljno rešavanje svih klasičnih problema, već se prikazuje njihova osnovna formulacija i ideja.

Prvi i najjednostavniji primer jeste problem najkraćeg puta. Ako su zadate dve tačke u ravni, traži se kriva koja ih spaja i ima najmanju dužinu. Intuitivno je jasno da je rešenje prava linija, ali varijacioni račun pokazuje kako se ta činjenica dobija iz opšteg principa minimizacije funkcionala dužine. Ovaj primer je pogodan za uvodno objašnjenje jer koristi poznate geometrijske pojmove, a istovremeno uvodi ideju da predmet optimizacije može biti cela kriva.

Drugi značajan primer jeste problem brahistohrone, odnosno problem najbržeg spuštanja. U njemu se traži kriva duž koje se materijalna tačka, pod dejstvom gravitacije i bez trenja, spušta iz jedne tačke u drugu za najkraće vreme. Taj problem je istorijski važan jer je snažno uticao na razvoj varijacionog računa, a u matematičkoj formulaciji vodi ka minimizaciji integrala koji opisuje vreme kretanja. U literaturi se brahistohrona često navodi kao jedan od osnovnih motivacionih primera varijacionog računa.²⁴

Treći tip problema čine izoperimetrijski problemi. Njihova najpoznatija elementarna formulacija glasi: među svim zatvorenim krivama datog obima treba pronaći onu koja obuhvata najveću površinu. Rešenje je krug, ali su razlozi koji vode do tog rezultata mnogo dublji od jednostavne geometrijske intuicije. Izoperimetrijski problem je važan za ovaj rad zato što neposredno povezuje elementarnu geometriju sa varijacionim principima i pokazuje kako se ograničenja uvode u problem optimizacije.²⁵

Četvrti primer odnosi se na principe minimalne energije. U mnogim matematičkim i fizičkim modelima traži se funkcija koja minimizuje energiju sistema. Iako se takvi problemi mogu razviti u veoma složenu teoriju, njihova osnovna ideja je jednostavna: stabilno stanje

23 M. Čorba, Varijacioni račun i metoda Galerkina, str. 30.

24 N. Đukanović, Hamiltonov princip i parcijalne diferencijalne jednačine, str. 26, 29-31; J. Mitrović, Varijacioni račun i modeli rasta, str. 15-16.

25 J. Mitrović, Varijacioni račun i modeli rasta, str. 14-16.

sistema često odgovara minimumu odgovarajućeg energetskog funkcionala. Kvadratne norme i integrali kvadrata funkcija pojavljuju se i u energetske funkcionalima i u funkcionalima kvadratne greške, što omogućava njihovo kasnije povezivanje sa Furijeovom aproksimacijom.

U kontekstu ovog master rada posebno je važno da se klasični varijacioni problemi ne posmatraju kao izolovani primeri iz fizike ili geometrije, već kao modeli jednog opšteg načina mišljenja. Umesto da se traži samo broj koji daje ekstrem, traži se funkcija, kriva ili oblik koji optimizuje zadati kriterijum. Upravo takav način razmišljanja biće ključan u narednim poglavljima, posebno kada se Furijeov red bude tumačio kao najbolja aproksimacija funkcije u smislu srednje kvadratne greške.

4. ELEMENTARNE PRIMENE VARIJACIONOG RAČUNA

Nakon uvođenja osnovnih pojmova varijacionog računa, potrebno je pokazati kako se ti pojmovi koriste u jednostavnijim matematičkim situacijama. U ovom poglavlju pažnja je usmerena na primere koji ne zahtevaju razvijenu teoriju funkcionalne analize, već se mogu razumeti pomoću osnovnih znanja iz diferencijalnog i integralnog računa. Zbog toga se primene biraju tako da budu dovoljno jasne za elementarni nivo, ali i dovoljno sadržajne da pokažu smisao varijacionog pristupa.

Zajednička osobina svih primera jeste da se ne traži samo broj koji daje ekstrem, već funkcija, kriva ili oblik koji optimizuje dati kriterijum. U tom smislu varijacioni račun proširuje poznatu ideju o minimumu i maksimumu funkcije. Umesto izraza $f(x)$, posmatra se funkcional $J[y]$, a umesto promene broja x posmatra se promena cele funkcije y . Upravo zato su minimizacija integrala, metod najmanjih kvadrata, izoperimetrijski problemi i princip minimalne energije pogodni primeri za temu ovog rada.²⁶

4.1. Minimizacija integrala

Posmatrajmo funkcional

$$J[y] = \int_a^b (y'(x))^2 dx$$

na skupu funkcija koje zadovoljavaju granične uslove

$$y(a) = A, y(b) = B.$$

Za integrand $F = (y')^2$ Euler-Lagrangeova jednačina daje

$$0 - \frac{d}{dx}(2y') = 0,$$

odnosno

$$y'' = 0.$$

Stacionarna funkcija je linearna:

$$y_0(x) = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a).$$

Međutim, dobijanje Euler-Lagrangeove jednačine potvrđuje samo stacionarnost. Da bi se dokazalo da y_0 zaista daje minimum, neka je svaka druga dopuštena funkcija oblika

$$y(x) = y_0(x) + h(x), h(a) = h(b) = 0.$$

Tada je

26 J. Mitrović, Varijacioni račun i modeli rasta, PMF Novi Sad, 2011, str. 12-13; M. Čorba, Varijacioni račun i metoda Galerkina, PMF Novi Sad, 2014, str. 11-13.

$$J[y] = \int_a^b (y_0' + h')^2 dx.$$

$$J[y] = J[y_0] + 2y_0' \int_a^b h'(x) dx + \int_a^b (h'(x))^2 dx.$$

Pošto je y_0' konstanta i

$$\int_a^b h'(x) dx = h(b) - h(a) = 0,$$

dobija se

$$J[y] = J[y_0] + \int_a^b (h'(x))^2 dx \geq J[y_0].$$

Jednakost važi samo ako je $h' \equiv 0$, a zbog graničnih uslova tada je $h \equiv 0$. Prema tome, y_0 je jedinstveni minimizator funkcionala. Ovaj račun je važan jer jasno razlikuje stacionarnu funkciju od stvarnog minimuma.²⁷

Isti princip kasnije se pojavljuje kod Furijeove aproksimacije: ukupna kvadratna greška rastavlja se na minimalnu grešku i nenegativan dodatni član.

4.2. Metod najmanjih kvadrata

Metod najmanjih kvadrata predstavlja jednu od najpristupačnijih varijacionih ideja. U najjednostavnijoj formi, on se javlja kada se od više mogućih aproksimacija bira ona koja daje najmanju ukupnu kvadratnu grešku. Ako su dati podaci $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ i ako se traži prava $y=ax+b$ koja ih najbolje opisuje, tada se minimizuje funkcija

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2.$$

Iako je ovde reč o funkciji dve promenljive a i b a ne o funkcionalu u punom smislu, sama ideja je varijaciona: najbolji izbor se dobija minimizacijom kvadratne greške. Uslovi minimuma dobijaju se iz jednačina

$$\partial S / \partial a = 0, \partial S / \partial b = 0,$$

što vodi ka sistemu normalnih jednačina. Ovaj elementarni primer je koristan jer pokazuje kako se prirodno pojavljuje kriterijum kvadratne greške, koji će kasnije biti ključan i za Furijeove redove.

Neprekidna verzija iste ideje dobija se kada se funkcija f na intervalu $[a, b]$ aproksimira funkcijom g iz neke zadate klase. Tada se greška može meriti funkcionalom

$$E[g] = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx.$$

Cilj je pronaći onu funkciju g za koju je $E[g]$ najmanje. Ako se funkcija g traži u obliku linearne kombinacije poznatih funkcija

$$g(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x),$$

onda se minimizacija svodi na određivanje koeficijenata $c_1, c_2, \dots, c_n$. Uslovi minimuma daju sistem jednačina koji određuje najbolju aproksimaciju. U metodama težinskih reziduala i Galerkinovoj metodi ova ideja se javlja kroz izbor baznih i težinskih funkcija, a kao poseban slučaj pominje se i metod najmanjih kvadrata.²⁸

Posebno važan slučaj nastaje kada su funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ međusobno ortogonalne. Tada se normalne jednačine znatno pojednostavljaju i koeficijenti se mogu izračunati pojedinačno. Ako je skalarni proizvod definisan izrazom

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

a sistem funkcija je ortogonalan, tada koeficijent najbolje aproksimacije ima oblik

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle / \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle.$$

Ova formula je neposredno povezana sa Furijeovim koeficijentima. Kada se za funkcije φ_k uzmu sinusne i kosinusne funkcije, dobija se upravo struktura Furijeovog reda. Zbog toga se metod najmanjih kvadrata može posmatrati kao najprirodniji most između varijacionog računa i Furijeove analize: Furijeov polinom nije samo formalni zbir trigonometrijskih funkcija, već najbolja aproksimacija u smislu najmanje srednje kvadratne greške.

Na ovom mestu važno je naglasiti da se u radu ne uvodi apstraktna teorija Hilbertovih prostora, već se koristi samo njena elementarna ideja. Dovoljno je znati da integral proizvoda dve funkcije može igrati ulogu skalarnog proizvoda, kao što u analitičkoj geometriji skalarni proizvod vektora omogućava pojam ortogonalnosti. Na taj način se učeniku ili studentu može približiti dublja činjenica da su Furijeovi redovi, aproksimacija i minimizacija greške deo iste matematičke slike.

4.3. Izoperimetrijski problemi

Izoperimetrijski problemi predstavljaju klasičnu grupu varijacionih problema u kojima se ekstrem traži uz dodatno ograničenje. Najpoznatija elementarna formulacija glasi:

među svim zatvorenim krivama zadatog obima treba pronaći onu koja obuhvata najveću površinu. Rešenje je krug, ali sama formulacija problema jasno pokazuje suštinu varijacionog računa: traži se oblik, a ne samo broj.

U elementarnoj nastavi ovaj problem se može približiti kroz jednostavniji zadatak sa pravougaonicima. Neka je obim pravougaonika jednak P . Ako su stranice x i y , tada važi

$$2x + 2y = P, \text{ odnosno } y = P/2 - x.$$

Površina pravougaonika je

$$A(x) = xy = x(P/2 - x) = (P/2)x - x^2.$$

Maksimum ove kvadratne funkcije dobija se za $x=P/4$, pa je i $y=P/4$. Dakle, među pravougaonicima datog obima najveću površinu ima kvadrat. Ovaj primer nije pun varijacioni problem, jer se optimizacija svodi na jednu promenljivu, ali ima važnu didaktičku vrednost: pokazuje kako ograničenje utiče na ekstrem.

Opšti izoperimetrijski problem može se formulisati na sledeći način: među svim dovoljno glatkim jednostavnim zatvorenim krivama zadate dužine treba pronaći onu koja obuhvata najveću površinu. Ako je kriva zadata parametrizacijom $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, $t \in [a,b]$, pri čemu je $\gamma(a)=\gamma(b)$, njena dužina je

$$L[\gamma] = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Ako je kriva pozitivno orijentisana, površina oblasti koju obuhvata može se zapisati u obliku

$$A[\gamma] = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt$$

Izoperimetrijski problem tada se sastoji u maksimizaciji $A[\gamma]$, uz ograničenje $L[\gamma]=L_0$. Takvi varijacioni problemi rešavaju se uvođenjem Lagrangeovog množitelja. Za potrebe ovog rada dovoljno je istaći ovu formulaciju, bez izvođenja opšteg rešenja.²⁹³⁰

4.4. Princip minimalne energije

Princip minimalne energije predstavlja jedan od najčešćih motiva za primenu varijacionog računa. U mnogim situacijama stabilno stanje sistema može se opisati kao stanje u kome određeni energetska funkcional ima najmanju vrednost. Iako ovakvi problemi najčešće

29 M. Čorba, Varijacioni račun i metoda Galerkina, str. 34-36.

30 J. Mitrović, Varijacioni račun i modeli rasta, str. 13-16; N. Đukanović, Hamiltonov princip i parcijalne diferencijalne jednačine, PMF Novi Sad, 2014, str. 4-5.

potiču iz fizike, njihova matematička struktura može se objasniti veoma jednostavno: traži se funkcija koja minimizuje integral koji meri ukupnu energiju.

Najjednostavniji model jeste Dirichletov tip energije

$$E[y] = \frac{1}{2} \int_a^b (y'(x))^2 dx.$$

Ovaj funkcional je blizak primeru iz poglavlja 4.1, samo što je dodat faktor 1/2 radi jednostavnijeg računa. Ako su krajnje vrednosti funkcije fiksirane, minimum se opet dobija za linearnu funkciju. Matematički razlog je isti: Euler-Lagrangeova jednačina vodi ka $y''=0$. Intuitivno, funkcija koja ima najmanju energiju jeste ona koja se menja najpravnomernije između zadatih krajeva.

U mehanici se često posmatra razlika kinetičke i potencijalne energije, a Hamiltonov princip opisuje kretanje preko stacionarnosti odgovarajućeg funkcionala akcije. Za potrebe ovog rada nije potrebno ulaziti u sve fizičke detalje, ali je korisno zapaziti da se i tamo pojavljuje ista matematička struktura: integral zavisi od funkcije i njenog izvoda, a traži se putanja za koju je taj integral stacionaran. Domaći radovi o Hamiltonovom principu upravo naglašavaju vezu između energije, akcije i varijacionog pristupa.³¹

Princip minimalne energije može se povezati i sa aproksimacijom. Ako aproksimacija ima veliki broj oscilacija, njen izvod je velik i energetski funkcional raste. Zato se u mnogim metodama traži kompromis između vernog predstavljanja funkcije i „mirnog” ponašanja aproksimacije. U tom smislu kvadratni integrali, bilo da mere grešku funkcije ili veličinu izvoda, prirodno povezuju varijacioni račun sa Furijeovom analizom.

Ovaj princip je posebno važan za dalji tok rada. U narednom poglavlju Furijeovi redovi neće biti posmatrani samo kao sredstvo za razvoj funkcije u trigonometrijski red, već i kao rezultat minimizacije greške u prostoru ortogonalnih funkcija. To znači da se iza poznatih formula za Furijeove koeficijente nalazi varijaciona ideja: od svih mogućih trigonometrijskih polinoma određenog stepena bira se onaj koji najbolje aproksimira zadatu funkciju u smislu najmanje srednje kvadratne greške.

Na taj način se zatvara osnovni krug ovog poglavlja. Minimizacija integrala pokazuje osnovni oblik varijacionog problema; metod najmanjih kvadrata uvodi kriterijum optimalne aproksimacije; izoperimetrijski problemi prikazuju ulogu ograničenja; princip minimalne energije daje prirodnu interpretaciju kvadratnih funkcionala. Sva četiri primera pripremaju teren za centralnu vezu rada - povezivanje Furijeovih redova i varijacionih metoda.

5. VEZA FURIJEOVIH REDOVA I VARIJACIONIH METODA

Posle odvojenog prikaza Furijeovih redova i osnovnih pojmova varijacionog računa, centralni deo rada čini njihovo povezivanje. Na prvi pogled ove oblasti mogu delovati udaljeno: Furijeovi redovi se najčešće uvode kroz trigonometrijske funkcije i razvoj periodičnih funkcija, dok se varijacioni račun vezuje za minimizaciju funkcionala i traženje ekstremalnih krivih. Međutim, zajednička osnova postoji u pojmovima ortogonalnosti, projekcije i minimizacije kvadratne greške.

Upravo zbog toga Furijeov red ne treba posmatrati samo kao formalni trigonometrijski razvoj, već i kao rezultat jednog optimizacionog postupka. Kada se funkcija približava trigonometrijskim polinomom, koeficijenti Furijeovog reda biraju se tako da greška u srednjem kvadratnom smislu bude najmanja. Na taj način se Furijeova analiza prirodno povezuje sa varijacionom idejom minimizacije funkcionala greške.³²

5.1. Ortogonalnost kao zajednička osnova

Veza Furijeovih redova i varijacionih metoda najjasnije se vidi u prostoru $L^2[-\pi, \pi]$. Za realne funkcije uvodimo skalarni proizvod i normu

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle.$$

Neka je

$$V_n = \text{span}\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx\}$$

prostor trigonometrijskih polinoma stepena najviše n . Furijeova parcijalna suma $S_n f$ pripada prostoru V_n , a iz formula za koeficijente sledi

$$\langle f - S_n f, 1 \rangle = 0,$$

$$\langle f - S_n f, \cos(kx) \rangle = 0, \langle f - S_n f, \sin(kx) \rangle = 0, k = 1, \dots, n.$$

Dakle, greška $f - S_n f$ ortogonalna je na ceo prostor V_n . To znači da je $S_n f$ ortogonalna projekcija funkcije f na konačnodimenzionalni prostor trigonometrijskih polinoma. U varijacionom jeziku isti uslov označava da nijedna mala promena aproksimacije unutar prostora V_n ne može smanjiti grešku u prvom redu. Ovaj princip ortogonalne projekcije predstavlja osnovu najbolje aproksimacije i klasično se izlaže u teoriji ortogonalnih razvoja.³³

32 M. Svetlik, Matematika 3 - Furijeovi redovi, Matematički fakultet, Beograd, str. 5-7; M. Čorba, Varijacioni račun i metoda Galerkina, PMF Novi Sad, 2014, str. 43-44.

33 R. Courant i D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Volume I*, Interscience Publishers, New York, 1953, poglavlje II, str. 49-55.

5.2. Furijeov red kao najbolja aproksimacija funkcije

Teorema 5.1 (najbolja trigonometrijska aproksimacija). Neka je $f \in L^2[-\pi, \pi]$ i neka je $S_n f$ n -ta parcijalna suma njenog Furijeovog reda. Tada za svaki trigonometrijski polinom $T_n \in V_n$ važi

$$\|f - S_n f\|_2^2 \leq \|f - T_n\|_2^2.$$

Jednakost važi ako i samo ako je $T_n = S_n f$.

Dokaz. Pošto i $S_n f$ i T_n pripadaju prostoru V_n , njihova razlika $S_n f - T_n$ takođe pripada tom prostoru. Greška $f - S_n f$ ortogonalna je na V_n , pa je

$$\langle f - S_n f, S_n f - T_n \rangle = 0.$$

Dalje,

$$f - T_n = (f - S_n f) + (S_n f - T_n).$$

Primena Pitagorine formule daje

$$\|f - T_n\|_2^2 = \|f - S_n f\|_2^2 + 2\langle f - S_n f, S_n f - T_n \rangle + \|S_n f - T_n\|_2^2.$$

$$\|f - T_n\|_2^2 = \|f - S_n f\|_2^2 + \|S_n f - T_n\|_2^2 \geq \|f - S_n f\|_2^2.$$

Jednakost je moguća samo kada je $\|S_n f - T_n\|_2 = 0$, odnosno kada je $T_n = S_n f$ u L^2 -smislu. ▀

Teorema pokazuje da Furijeovi koeficijenti nisu proizvoljno izabrani koeficijenti dobijeni formalnim računom. Oni jedinstveno određuju trigonometrijski polinom koji minimizuje kvadratnu grešku. To je precizna matematička veza između Furijeove analize i varijacionog principa: traži se element konačnodimenzionalnog prostora za koji funkcional greške

$$E[T] = \|f - T\|_2^2$$

ima najmanju vrednost.³⁴

5.3. Parsevalova formula i minimizacija greške

Za parcijalnu sumu $S_n f$ ortogonalnost daje Pitagorinu relaciju

$$\|f\|_2^2 = \|S_n f\|_2^2 + \|f - S_n f\|_2^2.$$

Pošto su članovi trigonometrijskog sistema ortogonalni,

$$\|S_n f\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Zato je kvadratna greška parcijalne sume

$$\|f - S_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Povećavanjem n zbir na desnoj strani raste, pa se greška ne povećava. Ako je trigonometrijski sistem potpun i $S_n f \rightarrow f$ u L^2 -smislu, tada $\|f - S_n f\|_2 \rightarrow 0$ i u graničnom slučaju dobijamo Parsevalovu jednakost

$$\|f\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Prema tome, Parsevalova formula nije samo identitet za računanje „energije” funkcije. Ona je funkcionalni analog Pitagorine teoreme i pokazuje da se minimizacija kvadratne greške svodi na ortogonalnost ostatka na prostor aproksimacije. Upravo taj princip objedinjuje Furijeove redove, metodu najmanjih kvadrata i varijacione metode.³⁵

5.4. Galerkinova metoda kao most između dve oblasti

Galerkinova metoda predstavlja jedan od načina na koji se varijaciona ideja i ortogonalnost koriste u rešavanju diferencijalnih jednačina i aproksimacionih problema. Iako se u ovom radu ne ulazi u tehnički zahtevne primene, osnovna ideja metode je veoma bliska prethodno razmatranoj vezi Furijeovih redova i minimizacije greške.

Pretpostavimo da se traži približno rešenje nekog problema u obliku

$$u_n(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x),$$

gde su $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ unapred izabrane bazne funkcije. Kada se ovo približno rešenje ubaci u jednačinu, uopšteno se ne dobija tačno nula, već rezidual, odnosno greška jednačine. Galerkinova ideja je da se koeficijenti $c_1, c_2, \dots, c_n$ izaberu tako da rezidual bude ortogonalan na sve bazne funkcije.

$$\langle R, \varphi_i \rangle = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Ovaj uslov je po obliku isti kao uslov koji se javlja kod Furijeove aproksimacije: greška mora biti ortogonalna na prostor dozvoljenih aproksimacija. Zbog toga Galerkinova metoda može poslužiti kao most između Furijeove analize i varijacionog računa. U domaćoj literaturi se Galerkinova metoda prikazuje upravo u okviru varijacionog računa i metoda težinskih reziduala, što potvrđuje da je ortogonalnost jedan od ključnih principa ove vrste aproksimacije.³⁶

35 M. Svetlik, Matematika 3 - Furijeovi redovi, str. 18-20; E. Jodal, O konvergenciji trigonometrijskih redova, master rad, PMF Novi Sad, str. 61-66.

36 M. Čorba, Varijacioni račun i metoda Galerkina, PMF Novi Sad, 2014, str. 43-44.

Ako se kao bazne funkcije izaberu sinusne ili kosinusne funkcije, Galerkinova metoda vodi ka trigonometrijskoj aproksimaciji, pri čemu uslovi ortogonalnosti određuju njene koeficijente. Ovaj postupak je po svojoj strukturi blizak Furijeovoj projekciji, jer se u oba slučaja koeficijenti određuju uslovima ortogonalnosti. Ipak, u opštem Galerkinovom problemu dobijeni koeficijenti nisu nužno Furijeovi koeficijenti zadate funkcije.

Za potrebe ovog master rada Galerkinova metoda nije centralna tema, ali je značajna zato što pokazuje širi kontekst. Ona potvrđuje da formule Furijeove analize nisu izolovan postupak, već deo opštije matematičke metode u kojoj se problemi rešavaju preko projekcija, minimizacije i ortogonalnosti. Na taj način rad dobija jasniju celinu: od elementarnih trigonometrijskih redova dolazi se do principa koji se koriste i u savremenim aproksimacionim metodama.

5.5. Jednostavan primer povezivanja Furijeovih redova i varijacionog pristupa

Neka se funkcija $f(x) = x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ aproksimira funkcijom $g(x) = b \sin x$. Kvadratna greška je

$$E(b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - b \sin x)^2 dx.$$

Uslov $E'(b) = 0$ daje

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x - b \sin x) \sin x dx = 0.$$

To znači da je greška ortogonalna na pravac u kome se aproksimacija može menjati, odnosno na funkciju $\sin x$. Dobija se

$$b = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx} = \frac{2\pi}{\pi} = 2.$$

Dakle, najbolja aproksimacija u jednodimenzionalnom prostoru $\text{span}\{\sin x\}$ jeste $g(x) = 2 \sin x$, a broj 2 upravo je prvi sinusni Furijeov koeficijent funkcije x . Potpuna računaska provera i vrednost minimalne greške dati su u poglavlju 6.4.³⁷

37 Autorska obrada prema formulama za sinusne Furijeove koeficijente u: D. Kečkić, Furijeovi redovi, str. 1-4; M. Svetlik, Matematika 3 - Furijeovi redovi, str. 5-7.

6. ODABRANI PRIMERI I ZADACI

U ovom poglavlju teorijski rezultati primenjuju se kroz potpuno rešene zadatke. Prva dva primera ponavljaju razvoj funkcija x i x^2 sa naglaskom na računске korake. Treći primer koristi Parsevalovu formulu za dobijanje sume recipročnih kvadrata. Četvrti primer određuje najbolju aproksimaciju funkcije x jednim sinusnim članom i proverava minimum. Peti primer rešava jednostavan varijacioni problem, dok šesti donosi celovit dokaz Virtingerove nejednakosti.

6.1. Primer razvoja funkcije $f(x)=x$

Neka je data funkcija $f(x)=x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ i neka se periodično produži sa periodom 2π . Pošto je funkcija f neparna, njen Furijeov red sadrži samo sinusne članove. To znači da su koeficijenti a_0 i a_n jednaki nuli, dok se koeficijenti b_n računaju po formuli³⁸

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx.$$

Pošto je proizvod $x \sin nx$ parna funkcija, integral se može svesti na interval $[0, \pi]$:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx.$$

Integral se računa parcijalnom integracijom. Uzimamo $u=x$ i $dv=\sin nx \, dx$, pa je $du=dx$ i $v=-\cos nx/n$. Dobija se

$$\int_0^{\pi} x \sin nx dx = [-x \cos nx / n]_0^{\pi} + 1/n \int_0^{\pi} \cos nx dx.$$

Drugi integral je jednak nuli, pošto je $\sin(n\pi)=\sin(0)=0$. Zato ostaje

$$\int_0^{\pi} x \sin nx dx = -\pi \cos n\pi / n = -\pi (-1)^n / n.$$

Otuda je

$$b_n = 2(-1)^{n+1} / n.$$

Furijeov red funkcije $f(x)=x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ zato ima oblik

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin nx / n, \quad -\pi < x < \pi.$$

Ovaj primer je elementaran jer koristi samo svojstvo neparnosti i parcijalnu integraciju, ali istovremeno pokazuje suštinu Furijeovog postupka. Funkcija koja nije

38 D. Kečkić, Furijeovi redovi, Matematički fakultet, Beograd, str. 1-4; M. Svetlik, Matematika 3 - Furijeovi redovi, Matematički fakultet, Beograd, str. 5-7.

trigonometrijska predstavljena je kao beskonačna suma sinusnih funkcija. Ako se u dobijenoj formuli uzme, na primer, $x=\pi/2$ dobija se veza sa poznatim alternirajućim redom

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$$

Na taj način razvoj funkcije u Furijeov red ne ostaje samo formalni rezultat, već daje i konkretan način dobijanja klasičnih numeričkih identiteta.

6.2. Primer razvoja funkcije $f(x)=x^2$

Drugi primer je funkcija $f(x)=x^2$ na istom intervalu $[-\pi, \pi]$. Ova funkcija je parna, pa njen Furijeov red sadrži samo kosinusne članove. Prema tome, svi koeficijenti b_n jednaki su nuli, dok se računaju a_0 i a_n .³⁹

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = 2\pi^2/3.$$

Zbog toga je slobodni član Furijeovog reda jednak

$$a_0/2 = \pi^2/3.$$

Za koeficijente a_n važi

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx.$$

Integral se računa dvostrukom parcijalnom integracijom. Prvo se uzima $u=x^2$, $dv=\cos nx dx$, pa se dobija izraz koji sadrži integral $\int x \sin nx dx$. Posle drugog koraka dobija se poznati rezultat

$$a_n = 4(-1)^n/n^2.$$

Zato je Furijeov red funkcije x^2 oblika

$$x^2 = \pi^2/3 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos nx / n^2.$$

Ovaj razvoj omogućava da se dobiju i neke poznate sume. Ako se stavi $x=\pi$ i koristi $\cos n\pi=(-1)^n$ dobija se

$$\pi^2 = \pi^2/3 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2.$$

Oдавде sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6.$$

Ako se umesto toga uzme $x=0$, dobija se alternirajuća suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n^2 = \pi^2/12.$$

Ovaj primer pokazuje zašto Furijeovi redovi imaju posebnu vrednost u elementarnoj matematici. Polazna funkcija x^2 je veoma jednostavna, ali njen trigonometrijski razvoj vodi do preciznih vrednosti redova koji se u elementarnom računu ne dobijaju neposredno.

6.3. Primena Parsevalove formule

Parsevalova formula pruža još jedan način da se dođe do klasičnih numeričkih rezultata. U ovom primeru ponovo se posmatra funkcija $f(x)=x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$. Već je pokazano da za ovu funkciju važi

$$b_n = 2(-1)^{n+1}/n, a_0 = a_n = 0.$$

Za neparnu funkciju $f(x)=x$ Parsevalova formula se svodi na oblik⁴⁰

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Leva strana je

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} x^2 dx = 2\pi^2/3.$$

Desna strana je

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} [2(-1)^{n+1}/n]^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2.$$

Izjednačavanjem leve i desne strane dobija se

$$2\pi^2/3 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2.$$

Dakle,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6.$$

Prednost ovog postupka jeste u tome što se numerička suma dobija iz opšteg principa očuvanja kvadratne veličine funkcije. Drugim rečima, zbir kvadrata Furijeovih koeficijenata nosi istu informaciju kao integral kvadrata funkcije. U elementarnom prikazu to se može

40 M. Svetlik, Matematika 3 - Furijeovi redovi, str. 18-20; E. Jodal, O konvergenciji trigonometrijskih redova, master rad, PMF Novi Sad, str. 61-66.

tumačiti kao analogija sa Pitagorinom teoremom: ukupna „kvadratna veličina” funkcije raspoređuje se po njenim međusobno ortogonalnim trigonometrijskim komponentama.

6.4. Najbolja aproksimacija trigonometrijskim polinomom

Neka se funkcija $f(x) = x$ aproksimira funkcijom oblika

$$g(x) = b \sin x.$$

Koeficijent b biramo tako da kvadratna greška

$$E(b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - b \sin x)^2 dx$$

bude minimalna. Diferenciranjem dobijamo

$$E'(b) = -2 \int_{-\pi}^{\pi} (x - b \sin x) \sin x dx.$$

Uslov $E'(b) = 0$ daje

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = b \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx.$$

Parcijalnom integracijom,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = 2 \int_0^{\pi} x \sin x dx = 2\pi,$$

a iz ortogonalnosti sledi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \pi.$$

Zato je

$$b = 2,$$

pa je najbolja aproksimacija

$$g(x) = 2 \sin x.$$

Da je reč o minimumu vidi se i iz drugog izvoda:

$$E''(b) = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = 2\pi > 0.$$

Minimalna greška iznosi

$$E(2) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - 2 \sin x)^2 dx.$$

$$E(2) = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx - 4 \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx + 4 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx.$$

$$E(2) = \frac{2\pi^3}{3} - 8\pi + 4\pi = \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi.$$

Koeficijent $b = 2$ jednak je prvom sinusnom Furijeovom koeficijentu funkcije x . Primer zato neposredno potvrđuje teoremu o najboljoj aproksimaciji.⁴¹

6.5. Jednostavan varijacioni problem

Kao poslednji primer posmatra se jednostavan varijacioni problem koji se može rešiti bez tehnički zahtevne teorije. Potrebno je među svim funkcijama y koje zadovoljavaju uslove

$$y(0) = 0, y(1) = 1$$

pronaći onu za koju je funkcional

$$J[y] = \int_0^1 (y')^2 dx$$

najmanji. Ovaj funkcional može se tumačiti kao mera „promenljivosti” funkcije: što je izvod veći, to je i vrednost integrala veća. U skladu sa Euler-Lagrangeovom jednačinom, za integrand⁴²

$$F(y, y', x) = (y')^2$$

važi

$$\partial F / \partial y = 0, \partial F / \partial y' = 2y'.$$

Euler-Lagrangeova jednačina glasi

$$\partial F / \partial y - \frac{d}{dx} (\partial F / \partial y') = 0,$$

pa se dobija

$$0 - d(2y')/dx = 0, \text{ odnosno } y'' = 0.$$

Opšte rešenje ove jednačine je linearna funkcija

$$y(x) = C_1 x + C_2.$$

Iz uslova $y(0)=0$ sledi $C_2=0$, a iz uslova $y(1)=1$ sledi $C_1=1$. Zato je ekstremalna funkcija

$$y(x) = x.$$

Da se zaista radi o minimumu može se pokazati i direktno. Neka je svaka druga dozvoljena funkcija zapisana kao

$$y(x) = x + \eta(x),$$

gde je $\eta(0)=\eta(1)=0$. Tada je

41 Y. B. Jia, Orthogonal Functions and Fourier Series, Iowa State University, str. 1-5; M. Svetlik, Matematika 3 - Furijeovi redovi, str. 5-7.

42 M. Čorba, Varijacioni račun i metoda Galerkina, PMF Novi Sad, 2014, str. 7-12; J. Mitrović, Varijacioni račun i modeli rasta, PMF Novi Sad, 2011, str. 4-9.

$$J[x + \eta] = \int_0^1 (1 + \eta')^2 dx.$$

Razvijanjem kvadrata dobija se

$$J[x + \eta] = \int_0^1 1 dx + 2 \int_0^1 \eta' dx + \int_0^1 (\eta')^2 dx.$$

Srednji član je jednak nuli, jer je $\int_0^1 \eta'(x) dx = \eta(1) - \eta(0) = 0$. Dakle,

$$J[x + \eta] = 1 + \int_0^1 (\eta')^2 dx \geq 1 = J[x].$$

Ovim je pokazano da funkcija $y(x)=x$ daje minimum funkcionala. Primer je značajan jer je potpuno elementaran: rešava se običnom diferencijalnom jednačinom i osnovnim integralnim računom, ali jasno prikazuje suštinu varijacionog metoda. Umesto da se traži ekstrem funkcije jedne promenljive, traži se funkcija koja minimizuje dati integral.

U poređenju sa prethodnim Furijeovim primerima, ovaj zadatak pokazuje drugu stranu iste ideje. Kod Furijeove aproksimacije minimizuje se kvadratna greška između funkcije i trigonometrijskog polinoma. Kod varijacionog problema minimizuje se integral koji zavisi od same funkcije i njenog izvoda. U oba slučaja najvažniji korak jeste pravilno postavljanje funkcionala, a zatim izvođenje uslova koji obezbeđuje minimum.

6.6. Potpun dokaz Virtingerove nejednakosti

Zadatak. Neka je $f \in C^1(\mathbb{R})$ realna i 2π -periodična funkcija za koju važi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Dokazati da je

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx$$

i odrediti kada važi jednakost.

Rešenje. Označimo Furijeove koeficijente funkcije f sa a_k i b_k . Uslov srednje vrednosti daje $a_0=0$. Parsevalova formula za f glasi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

Pošto je $f \in C^1(\mathbb{R})$ i 2π -periodična, Furijeovi koeficijenti njenog izvoda f' dobijaju se parcijalnom integracijom. Za $k \geq 1$ važi

$$a_k(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx) dx = kb_k$$

jer granični član nestaje zbog periodičnosti funkcije f . Analogno,

$$b_k(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(kx) dx = -ka_k$$

Osim toga, $a_0(f')=0$. Primena Parsevalove formule na f' daje

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2)$$

Oduzimanjem dve Parsevalove jednakosti dobijamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - 1) (a_k^2 + b_k^2) \geq 0$$

Time je nejednakost dokazana. Jednakost važi ako i samo ako su $a_k=b_k=0$ za sve $k \geq 2$.

Kako je $a_0=0$, preostaje samo prvi harmonik, odnosno

$$f(x) = A \cos x + B \sin x.$$

za neke $A, B \in \mathbb{R}$. Obrnuto, za svaku takvu funkciju jednakost neposredno važi.

Ovaj oblik je ujedno i varijaciona interpretacija rezultata: među periodičnim funkcijama srednje vrednosti nula, uz fiksiranu kvadratnu normu, prvi harmonik ima najmanju energiju izvoda.

7. ZNAČAJ ANALITIČKIH METODA U ELEMENTARNOJ MATEMATICI

Prethodna poglavlja pokazuju da Furijeovi redovi i varijacioni račun nisu dve nepovezane oblasti. Ortogonalnost određuje Furijeove koeficijente, isti koeficijenti daju najbolju aproksimaciju, a uslov ortogonalnosti greške predstavlja stacionarni uslov funkcionala kvadratne greške. Tako se klasični računski postupci povezuju sa geometrijom prostora funkcija i principom minimizacije.

7.1. Elementarni problemi kao polazište za višu analizu

Elementarni problemi imaju posebnu vrednost zato što omogućavaju da se apstraktni pojmovi uvedu postepeno. Na primer, razvoj funkcije $f(x)=x$ ili $f(x)=x^2$ u Furijeov red ne zahteva složenu početnu postavku, ali vodi ka važnim pojmovima kao što su ortogonalnost trigonometrijskog sistema, koeficijenti razvoja i konvergencija reda. Iz takvih primera jasno se vidi kako se poznate funkcije mogu predstaviti pomoću sinusnih i kosinusnih članova, što je osnovna ideja Furijeove analize.⁴³

Slično tome, primena Parsevalove formule na jednostavne funkcije pokazuje da elementarni integrali mogu dovesti do vrednosti beskonačnih redova. U radu je prikazano kako se iz razvoja funkcije x^2 ili iz Parsevalove formule može dobiti suma $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$. Ovakav rezultat je značajan jer povezuje geometrijsko-analitičku interpretaciju kvadratne norme funkcije sa numeričkim vrednostima redova. Student tako ne dobija samo gotovu formulu, već vidi zašto se ona pojavljuje i iz kog opšteg principa proizlazi.

Varijacioni primeri imaju sličnu ulogu. Jednostavan problem minimizacije integrala $\int_0^1 (y')^2 dx$ pokazuje da se ekstrem ne mora tražiti samo među brojevima, već među funkcijama. Iako se zadatak rešava relativno jednostavno, on uvodi osnovni način mišljenja varijacionog računa: najpre se postavlja funkcional, zatim se određuje uslov za ekstrem, a na kraju se proverava značenje dobijenog rešenja. Time se elementarni račun povezuje sa višom analizom bez naglog prelaska na previše apstraktan nivo.

7.2. Didaktička vrednost izabranog pristupa

Didaktička vrednost ovakvog pristupa ogleda se u tome što se složeniji matematički pojmovi objašnjavaju kroz računski poznate situacije. Kada se Furijeov red uvede samo kao formula, postoji opasnost da se izgubi njegova suština. Međutim, kada se pokaže da su

koeficijenti povezani sa ortogonalnošću i najmanjom kvadratnom greškom, Furijeov red dobija jasnije značenje. On se više ne posmatra samo kao beskonačan trigonometrijski izraz, već kao najbolji način da se funkcija predstavi pomoću odabranog sistema funkcija.⁴⁴

Takav pristup je koristan i za razumevanje varijacionog računa. Pojam funkcionala studentima može delovati apstraktno zato što se ne radi o funkciji koja broju pridružuje broj, već o preslikavanju koje celoj funkciji pridružuje broj. Ipak, kada se funkcional prikaže kao integral koji meri dužinu, energiju, vreme ili grešku, njegova uloga postaje razumljivija. U tom smislu, primeri imaju pedagošku funkciju: oni prevode apstraktnu definiciju u konkretnu matematičku situaciju.

Posebno je važno što se kroz ovu temu može pokazati jedinstvo različitih matematičkih oblasti. Trigonometrija, integralni račun, teorija redova, diferencijalne jednačine, aproksimacija i optimizacija ne pojavljuju se kao odvojeni sadržaji, već kao delovi jedne logičke celine. Upravo zato ovakav rad ima vrednost ne samo kao teorijsko-matematički prikaz, već i kao način da se studentima približi razvoj matematičkih ideja od elementarnih postupaka ka naprednijim metodama.

7.3. Ograničenja i mogućnosti daljeg istraživanja

Rad je namerno ograničen na primere koji se mogu jasno proveriti i objasniti u okviru master rada ovog obima. Zbog toga nisu detaljno obrađeni napredniji rezultati harmonijske analize, teorije Hilbertovih prostora, distribucija, spektralnih metoda ili savremenih direktnih metoda varijacionog računa. Takvo ograničenje je opravdano jer je osnovna namera rada da se pokaže primena analitičkih metoda na elementarne probleme, a ne da se izgradi potpuna teorija Furijeove analize ili varijacionog računa.

Mogućnosti daljeg istraživanja su brojne. Jedan pravac bio bi detaljnije proučavanje konvergencije Furijeovih redova i fenomena koji se javljaju kod funkcija sa prekidima. Drugi pravac mogao bi biti proširenje rada na probleme parcijalnih diferencijalnih jednačina, posebno jednačinu toplote i talasnu jednačinu, gde se Furijeovi redovi prirodno pojavljuju. Treći pravac bio bi razvoj veze sa numeričkim metodama, posebno Galerkinovom metodom, gde se aproksimacija rešenja gradi u konačnodimenzionalnim prostorima funkcija.⁴⁵

44 Y. B. Jia, *Orthogonal Functions and Fourier Series*, str. 1-3.

45 M. Čorba, *Varijacioni račun i metoda Galerkina*, str. 10-12; N. Đukanović, *Hamiltonov princip i parcijalne diferencijalne jednačine*, PMF Novi Sad, str. 6-10.

Dalje istraživanje moglo bi obuhvatiti i metodičku stranu teme: kako se Furijeovi redovi i osnovne varijacione ideje mogu uvoditi u nastavi tako da ne budu predstavljeni kao izolovane formule, već kao prirodan nastavak elementarne matematike. Time bi se dodatno osnažila osnovna teza ovog rada: napredne analitičke metode mogu imati jasnu pedagošku i konceptualnu vrednost ukoliko se pažljivo povežu sa poznatim primerima i postupcima.

8. ZAKLJUČAK

U radu je prikazana primena Furijeovih redova i elemenata varijacionog računa u problemima koji se oslanjaju na elementarnu matematiku. Polazna ideja bila je da se od poznatih trigonometrijskih funkcija, integrala i ekstrema dođe do opštijih analitičkih principa bez gubitka matematičke preciznosti.

Najpre su potpuno navedene relacije ortogonalnosti trigonometrijskog sistema, formule za Furijeove koeficijente i dovoljni uslovi konvergencije. Razvoji funkcija $f(x) = x$ i $f(x) = x^2$ izvedeni su parcijalnom integracijom, a iz njih su dobijeni Leibnizov red i klasične sume

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Posebna primena Furijeovih koeficijenata prikazana je dokazom Virtingerove nejednakosti. Dokaz pokazuje da se integralna nejednakost svodi na poređenje koeficijenata $a_k^2 + b_k^2$ i $k^2(a_k^2 + b_k^2)$, pri čemu se tačno određuje i slučaj jednakosti.

U delu posvećenom varijacionom računu standardno su definisane prva varijacija i Euler-Lagrangeova jednačina. Naglašeno je da Euler-Lagrangeova jednačina daje potreban uslov za ekstrem, pa je kod funkcionala $J[y] = \int_a^b (y')^2 dx$ minimum dodatno potvrđen neposrednim rastavljanjem

$$J[y_0 + h] = J[y_0] + \int_a^b (h')^2 dx.$$

Centralni rezultat rada jeste teorema o najboljoj aproksimaciji. Dokazano je da za svaki trigonometrijski polinom T_n stepena najviše n važi

$$\|f - S_n f\|_2^2 \leq \|f - T_n\|_2^2,$$

pri čemu jednakost važi samo za $T_n = S_n f$. Ovaj rezultat precizno povezuje Furijeove redove sa varijacionim pristupom: parcijalna suma je ortogonalna projekcija funkcije i jedinstveni minimizator funkcionala kvadratne greške. Parsevalova formula pojavljuje se kao Pitagorina teorema u prostoru funkcija i objašnjava zašto se minimizacija greške svodi na ortogonalnost ostatka.

Na osnovu prikazanih rezultata može se zaključiti da elementarni problemi predstavljaju pogodno polazište za uvođenje dubljih analitičkih ideja. Furijeovi redovi ne služe samo za formalno predstavljanje funkcija, a varijacioni račun nije samo apstraktna teorija ekstrema funkcionala. Njihova zajednička osnova nalazi se u ortogonalnosti, projekciji i minimizaciji, čime se potvrđuje osnovna osa rada: **ortogonalnost → Furijeovi koeficijenti → najbolja aproksimacija → varijacioni princip.**

LITERATURA

1. Kečkić, D. (b. g.). *Furijeovi redovi*. Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu. Dostupno na: <https://poincare.matf.bg.ac.rs/~dragoljub.keckic/Furijeovi%20redovi.pdf>
2. Svetlik, M. (2023/2024). *Matematika 3 - Furijeovi redovi*. Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu. Dostupno na: https://enastava.matf.bg.ac.rs/~marek.svetlik/MaterijaliM3_2324/Skripta/Matematika3_20232024FurijeoviRedovi.pdf
3. Teofanov, N. (2016). *Harmonijska analiza - nastanak i nasleđe*. Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu. Dostupno na: <https://personal.pmf.uns.ac.rs/nenad.teofanov/wp-content/uploads/sites/17/2016/03/harmonijska-analiza.pdf>
4. Jodal, E. (b. g.). *O konvergenciji trigonometrijskih redova*. Master rad, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu.
5. Čorba, M. (2014). *Varijacioni račun i metoda Galerkina*. Master rad, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu. Dostupno na: https://matematika.pmf.uns.ac.rs/wp-content/uploads/zavrsni-radovi/primenjena_matematika/MilotaCorba.pdf
6. Đukanović, N. (2014). *Hamiltonov princip i parcijalne diferencijalne jednačine*. Master rad, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu. Dostupno na: https://matematika.pmf.uns.ac.rs/wp-content/uploads/zavrsni-radovi/primenjena_matematika/NikolaDjukanovic.pdf
7. Mitrović, J. (2011). *Varijacioni račun i modeli rasta*. Master rad, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu. Dostupno na: https://matematika.pmf.uns.ac.rs/wp-content/uploads/zavrsni-radovi/primenjena_matematika/JelenaMitrovic.pdf
8. Jia, Y. B. (2024). *Orthogonal Functions and Fourier Series*. Iowa State University. Dostupno na: <https://faculty.sites.iastate.edu/jia/files/inline-files/fourier-series.pdf>
9. Courant, R., & Hilbert, D. (1953). *Methods of Mathematical Physics, Volume I*. New York: Interscience Publishers.

BIOGRAFIJA

Jasmina Kozomora rođena je 04. marta 1993. godine u Novom Sadu. Osnovne akademske studije završila je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, na studijskom programu diplomirani profesor matematike 2018. godine. Master akademske studije upisala je 2022. godine na Matematičkom fakultetu u Beogradu.

Trenutno radi u Osnovnoj školi “Slavko Rodić” u Bačkom Jarku kao nastavnik matematike.

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Autor	Jasmina Kozomora
Naslov rada	Primena Furijeovih redova i elemenata varijacionog računa u elementarnoj matematici
Mentor	prof. dr M. Knežević
Vrsta rada	Master rad
Fakultet	Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet.
Departman	Departman za matematiku
Studijski program	Master akademske studije - matematika
Ključne reči	Furijeovi redovi; varijacioni račun; ortogonalnost; najbolja aproksimacija; Virtingerova nejednakost; elementarna matematika
UDK	_____
Broj strana	45
Broj tabela	1
Broj bibliografskih jedinica	9
Kratak opis rada	Rad prikazuje Furijeove redove i osnovne elemente varijacionog računa, a zatim ih povezuje preko ortogonalnosti, Parsevalove formule, najbolje trigonometrijske aproksimacije i minimizacije kvadratne greške. Posebno su izvedeni razvoji funkcija x i x^2 , dokaz Virtingerove nejednakosti i provera minimuma jednostavnog funkcionala.
Godina	2026.

KEY WORDS DOCUMENTATION

Author	Jasmina Kozomora
Title	Application of Fourier Series and Elements of the Calculus of Variations in Elementary Mathematics
Mentor	Prof. Dr. M. Knežević
Type of document	Master's thesis
Institution	University of Belgrade, Faculty of Mathematics.
Department	Department of Mathematics
Study programme	Master's Academic Studies - Mathematics
Keywords	Fourier series; calculus of variations; orthogonality; best approximation; Wirtinger's inequality; elementary mathematics
UDC	_____
Pages	45
Tables	1
References	9
Brief description	The thesis presents Fourier series and the basic elements of the calculus of variations and connects them through orthogonality, Parseval's formula, best trigonometric approximation and minimization of quadratic error. It includes complete derivations for the Fourier series of x and x^2 , a proof of Wirtinger's inequality and a direct verification of the minimum of a simple functional.
Year	2026.