

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Наташа Костадиновић

КЛАСИЧНЕ НЕЈЕДНАКОСТИ У
ЕЛЕМЕНТАРНОЈ И ФУНКЦИОНАЛНОЈ
АНАЛИЗИ И ЊИХОВЕ ПРИМЕНЕ У
НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

мастер рад

Београд, 2026.

Ментор:

доц. др Миљан КНЕЖЕВИЋ

Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

доц. др Марек СВЕТЛИК

Универзитет у Београду, Математички факултет

доц. др Стефан МИЛОШЕВИЋ

Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: _____

Мојим родитељима

Наслов мастер рада: Класичне неједнакости у елементарној и функционалној анализи и њихове примене у настави математике

Резиме: Предмет овог мастер рада су класичне неједнакости математичке анализе — Хелдерова, Минковскијева и Јенсенова неједнакости — са посебним нагласком на њихову улогу у елементарној и функционалној анализи и настави математике. Такође, поред ових неједнакости, биће приказане и елементарне неједнакости — неједнакост између аритметичке и геометријске средине, Коши–Шварцова неједнакост и последице тих неједнакости. У раду се систематски излажу докази ових неједнакости прилагођени различитим нивоима знања, разматрају варијације и несиметрични облици, те успоставља хијерархијска веза са елементарним неједнакостима. Посебна пажња посвећена је примени у анализи функција, оцени интеграла и сума, те решавању задатака из такмичарске математике. Рад укључује и предлоге методичких приступа за обраду ових тема у средњој школи и на факултету, са циљем да послужи као користан ресурс наставницима математике и студентима.

Кључне речи: неједнакости, Хелдерова неједнакост, Минковскијева неједнакост, Јенсенова неједнакост, АМ–ГМ неједнакост, Коши–Шварцова неједнакост, конвексне функције, елементарна анализа, функционална анализа, настава математике

Садржај

1	Увод	1
2	Елементарне неједнакости	3
2.1	Неједнакост између аритметичке и геометријске средине	3
2.2	Коши–Шварцова неједнакост	9
2.3	Последице елементарних неједнакости	14
3	Класичне неједнакости математичке анализе	18
3.1	Јенсенова неједнакост	18
3.2	Хелдерова неједнакост	27
3.3	Минковскијева неједнакост	35
4	Варијације и несиметрични облици неједнакости	41
4.1	Обрнута Хелдерова и Минковскијева неједнакост	41
4.2	Петровићева неједнакост	44
4.3	Караматина неједнакост	45
4.4	Шурова неједнакост	48
5	Веза класичних и елементарних неједнакости	50
5.1	Хијерархија неједнакости — општа слика	50
5.2	Елементарне неједнакости као специјални случајеви	51
5.3	Степене средине и уопштена хијерархија	53
5.4	Исти задатак, различите методе	56
6	Примена класичних неједнакости	58
6.1	Примена у анализи функција, интеграла и сума	58
6.2	Улога у такмичарској математици	60
6.3	Методички приступи у настави	64

САДРЖАЈ

7 Закључак	68
Литература	70

Глава 1

Увод

Неједнакости представљају једну од најстаријих и најплодотворнијих области математике. Идеја упоређивања величина — одређивања да ли је нешто веће, мање или једнако нечем другом — присутна је од самих почетака математичког мишљења, а данас је неједнакостима посвећена обимна теорија са дубоким везама са готово свим гранама математике.

Међу свим неједнакостима посебно место заузимају оне које данас називамо *класичним неједнакостима математичке анализе* — Хелдерова, Минковскијева и Јенсенова неједнакости. Ове три неједнакости нису само важни теоријски резултати; оне представљају универзалне алате које аналитичар, по правилу, примењује у свакој озбиљнијој процени. Омогућавају оцену интеграла и сума, доказивање конвергенције низова и редова, анализу норми у функционалним просторима, као и разумевање темељних појмова попут ограничености, стабилности и континуитета.

Оно што их чини посебно занимљивим је то да се исте неједнакости јављају на веома различитим нивоима апстракције. На елементарном нивоу, у облику неједнакости између средина или Коши–Шварцове неједнакости, с њима се среће сваки ученик математичке гимназије или студент прве године. На вишем нивоу, у оквиру функционалне анализе, оне дефинишу структуру Лебегових простора L^p и постају кичма читаве теорије. Овакав распон примена, од школских задатака до апстрактне теорије функционалних простора, издваја ове неједнакости као тему вредну пажљивог и свеобухватног излагања.

Циљ овог рада је да покаже то јединство. Структура рада прати природну хијерархију: почев од елементарних неједнакости између средина и Коши–Шварцове неједнакости, преко Јенсенове неједнакости и конвексности, до

Хелдерове и Минковскијеве неједнакости, уз иштицање веза између општих и елементарних облика, и приказа варијација и несиметричних облика ових неједнакости. Поред теоријског излагања са доказима, рад садржи и примере примена у такмичарској математици, као и предлоге методичких приступа за обраду ових тема у настави.

Глава 2

Елементарне неједнакости

Пре него што пређемо на класичне неједнакости математичке анализе, неопходно је да се упознамо са основним елементарним неједнакостима које чине темељ на коме ће се градити читава даља теорија. У овој глави уводимо неједнакост између средина и Коши–Шварцову неједнакост — два резултата чија се снага и велика корист осећа у широком распону, од задатака намењених ученицима средње школе до доказа класичних неједнакости анализе. Поред самих неједнакости, разматрамо и њихове важне последице — тежинску АМ–ГМ неједнакост, Чебишевљеву неједнакост и неједнакост о преуређивању — које ће наћи непосредну примену у каснијим главама.

2.1 Неједнакост између аритметичке и геометријске средине

Међу свим неједнакостима које се тичу средина, *неједнакост аритметичке и геометријске средине* (у наставку: АМ–ГМ неједнакост) заузима централно место. Она представља полазну тачку за разумевање хијерархије свих средина, а у доказима неједнакости користи се свакодневно.

Дефиниција 2.1. Нека су $a, b > 0$. Дефинишемо:

$$\begin{aligned} \text{аритметичка средина: } A_2 &= \frac{a+b}{2}, \\ \text{геометријска средина: } G_2 &= \sqrt{ab}, \\ \text{хармонијска средина: } H_2 &= \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \\ \text{квадратна средина: } K_2 &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}. \end{aligned}$$

За n позитивних реалних бројева $a_1, a_2, \dots, a_n$ ове средине уопштавамо на следећи начин:

$$A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, \quad G_n = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}, \quad H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}, \quad K_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Теорема 2.2 (АМ–ГМ за два броја). *За произвољне бројеве $a, b \geq 0$ важи неједнакост*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

са једнакошћу ако и само ако је $a = b$.

Доказ. Полазимо од очигледне неједнакости

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Развијањем добијамо $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, одакле непосредно следи $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Једнакост важи ако и само ако је $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, тј. $a = b$. $\square$

Исту идеју примењујемо и на три броја.

Теорема 2.3 (АМ–ГМ за три броја). *За произвољне бројеве $x, y, z \geq 0$ важи неједнакост*

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3},$$

са једнакошћу ако и само ако је $x = y = z$.

Доказ. Уводимо смену $x = a^3, y = b^3, z = c^3$ за $a, b, c \geq 0$. Неједнакост постаје $abc \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$, тј. $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. Ово следи из неједнакости

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0.$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$, тј. $x = y = z$. $\square$

Природно уопштење на произвољан број бројева добија се индукцијом.

Теорема 2.4 (АМ–ГМ — општи случај). *Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ позитивни реални бројеви. Тада важи*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

са једнакошћу ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Доказ. Доказујемо индукцијом по n неједнакост

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n, \quad \text{кад год је } x_1 x_2 \cdots x_n = 1, \quad x_i > 0. \quad (2.1)$$

Ставимо $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$; тада је $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ и неједнакост (2.1) еквивалентна је тврђењу теореме.

За $n = 1$ тврђење је очигледно, а за $n = 2$ следи из Теореме 2.2. Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$. Нека су $x_1, \dots, x_{k+1} > 0$ такви да је $x_1 \cdots x_{k+1} = 1$.

Ако су сви $x_i = 1$, тврђење је јасно. Иначе постоје индекси i, j такви да је $x_i < 1 < x_j$; без умањења општости $x_1 < 1 < x_2$. За k -торку $x_1 x_2, x_3, \dots, x_{k+1}$ важи $(x_1 x_2) x_3 \cdots x_{k+1} = 1$, па по индукцијској хипотези

$$x_1 x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1} \geq k.$$

Из $x_1 < 1 < x_2$ следи $(x_2 - 1)(1 - x_1) > 0$, тј. $x_1 + x_2 > x_1 x_2 + 1$, па је

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} > x_1 x_2 + 1 + x_3 + \cdots + x_{k+1} \geq k + 1.$$

По принципу математичке индукције, (2.1) важи за све $n \in \mathbb{N}$. □

Поред аритметичке и геометријске, у математичкој анализи јављају се и хармонијска и квадратна средина. Све четири средине повезане су следећом хијерархијом.

Теорема 2.5 (Хијерархија средина). *Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Тада важи*

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n,$$

са једнакошћу у свим члановима ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Доказ. Неједнакост $G_n \leq A_n$ доказана је у Теорему 2.4.

$H_n \leq G_n$: Применом АМ–ГМ неједнакости на бројеве $\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}$ добијамо

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \cdots a_n}} = \frac{1}{G_n},$$

одакле $H_n \leq G_n$.

$A_n \leq K_n$: Из Коши–Шварцове неједнакости (в. Теорему 2.13) примењене на низове $(a_1, \dots, a_n)$ и $(1, \dots, 1)$ следи

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \cdots + a_n^2),$$

тј. $A_n^2 \leq K_n^2$, па $A_n \leq K_n$. □

Напомена. Неједнакости из Теореме 2.5 се кратко записују као $H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n$ и представљају темељ за разумевање природе свих средина. Специјално за $n = 2$ добијамо:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

са једнакошћу ако и само ако је $a = b$.

Следи неколико карактеристичних примера примене АМ–ГМ неједнакости.

Пример 2.6. Доказати да за позитивне бројеве a, b и c важи

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c.$$

Решење. Применом АМ–ГМ неједнакости на сваки пар:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b, \quad \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c, \quad \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a.$$

Сабирањем и дељењем са 2 добијамо тражену неједнакост. Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$.

Пример 2.7. Нека су $x, y, z > 0$ такви да је $x + y + z = 1$. Доказати да је

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 1.$$

Решење. Из АМ–ГМ неједнакости:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \right) \geq y, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right) \geq z, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \right) \geq x.$$

Сабирањем: $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z = 1$. Једнакост важи за $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Пример 2.8. Доказати да за позитивне бројеве a, b, c важи

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

Решење. Из АМ–ГМ неједнакости следи $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a$, аналогно $\frac{b^2}{c} + c \geq 2b$ и $\frac{c^2}{a} + a \geq 2c$. Сабирањем сва три броја:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + (a + b + c) \geq 2(a + b + c),$$

одакле следи тврђење. Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$.

Пример 2.9. Нека су $x, y, z > 0$ такви да је $xyz = 1$. Доказати да је

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geq 6.$$

Решење. Из АМ–ГМ неједнакости примењене на свих шест чланова:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx}{6} \geq \sqrt[6]{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot xy \cdot yz \cdot zx} = \sqrt[6]{x^4 y^4 z^4} = (xyz)^{2/3} = 1,$$

одакле следи тврђење. Једнакост важи ако и само ако је $x = y = z = 1$.

Пример 2.10. Нека су $x, y \in \mathbb{R}^+$ такви да је $x + y = 2$. Доказати да је $x^3 y^3 (x^3 + y^3) \leq 2$.

Решење. Из АМ–ГМ следи $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = 1$, па $xy \leq 1$. Нека је $t = xy$, $0 < t \leq 1$. Тада је:

$$\begin{aligned} x^3 y^3 (x^3 + y^3) &= (xy)^3 [(x+y)^3 - 3xy(x+y)] \\ &= t^3 (8 - 6t) = 2t^3 (4 - 3t). \end{aligned}$$

Применом АМ–ГМ на четири члана $t, t, t, 4 - 3t$ (чији је збир 4):

$$\frac{t + t + t + (4 - 3t)}{4} \geq \sqrt[4]{t^3 (4 - 3t)},$$

тј. $1 \geq \sqrt[4]{t^3 (4 - 3t)}$, па $t^3 (4 - 3t) \leq 1$. Стога $x^3 y^3 (x^3 + y^3) = 2t^3 (4 - 3t) \leq 2$. Једнакост важи ако и само ако је $t = 1$, тј. $x = y = 1$.

Пре него што пређемо на Коши–Шварцову неједнакост, наводимо важно уопштење АМ–ГМ неједнакости које ће имати кључну улогу у Глави 3 при доказу Јенсенове и Хелдјерове неједнакости.

Теорема 2.11 (Тежинска АМ–ГМ неједнакост). *Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ позитивни реални бројеви и нека су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ такви да је $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Тада важи*

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n,$$

са једнакошћу ако и само ако су међусобно једнаки сви бројеви a_i за које је $\lambda_i > 0$.

Доказ. Доказујемо неједнакост $e^t \geq 1 + t$ за све $t \in \mathbb{R}$, са једнакошћу само за $t = 0$. Ово следи из конвексности функције e^t (или из развоја у Тејлоров ред).

Заменом $t = \frac{a_i}{c} - 1$ где је $c = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$, добијамо $\frac{a_i}{c} \leq e^{a_i/c - 1}$ за свако i . Логаритмовањем:

$$\lambda_i \ln a_i \leq \lambda_i \ln c + \lambda_i \left(\frac{a_i}{c} - 1 \right).$$

Сумирањем по $i = 1, \dots, n$ и користећи $\sum \lambda_i = 1$ и $\sum \lambda_i a_i = c$:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln a_i \leq \ln c + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i - 1 = \ln c,$$

одакле $\ln(a_1^{\lambda_1} \dots a_n^{\lambda_n}) \leq \ln c$, тј. $a_1^{\lambda_1} \dots a_n^{\lambda_n} \leq c$. □

Напомена. За $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ тежинска АМ–ГМ неједнакост своди се на обичну АМ–ГМ неједнакост из Теореме 2.4. Тежинска верзија природно се јавља у доказу Јенсенове неједнакости — у Глави 3 биће показано да је тежинска АМ–ГМ у ствари специјалан случај Јенсенове неједнакости за конвексну функцију $f(x) = -\ln x$.

Пример 2.12. Нека су $\alpha, \beta, \gamma > 0$ такви да је $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Доказати да је $\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma \geq \frac{1}{3}$.

Решење. Узмемо $a_i = \frac{1}{\lambda_i}$ у тежинској АМ–ГМ неједнакости са $\lambda_i = \alpha_i$. Тада:

$$\frac{1}{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma} = \left(\frac{1}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{1}{\beta} \right)^\beta \left(\frac{1}{\gamma} \right)^\gamma \leq \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \beta \cdot \frac{1}{\beta} + \gamma \cdot \frac{1}{\gamma} = 3,$$

одакле $\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma \geq \frac{1}{3}$. Једнакост важи за $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$.

2.2 Коши–Шварцова неједнакост

Коши–Шварцова неједнакост добила је назив по математичарима који су је открили и усавршавали. **Огистен Луј Коши** (1789–1857) први је забележио њен елементаран облик 1821. године. Независно један од другог, неједнакост су генерализовали **Виктор Јаковљевич Буњаковски** (1804–1889) у раду из 1859. и **Херман Агатус Шварц** (1843–1921) 1888. године. Зато се у руској литератури ова неједнакост назива и *Коши–Буњаковски–Шварцова неједнакост* [8].

Теорема 2.13 (Коши–Шварцова неједнакост). *Нека су $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ реални бројеви. Тада важи*

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right),$$

са једнакошћу ако и само ако су вектори $(a_1, \dots, a_n)$ и $(b_1, \dots, b_n)$ линеарно зависни.

Дајемо два различита доказа.

Доказ 1 (преко квадратног тринома). Ако је $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 0$, онда је $a_k = 0$ за свако k , па су обе стране неједнакости једнаке нули, а вектори су линеарно зависни (нула-вектор је линеарно зависан са сваким вектором). Претпоставимо зато да је $\sum_{k=1}^n a_k^2 > 0$.

Посматрамо квадратни трином по x :

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) x^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

Пошто је водећи коефицијент позитиван и $f(x) \geq 0$ за све $x \in \mathbb{R}$, дискриминанта овог тринома не може бити позитивна:

$$D = 4 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \leq 0,$$

што је еквивалентно тврђењу теореме. Једнакост важи ако и само ако f има реалан корен x_0 , тј. ако је $a_k x_0 + b_k = 0$ за свако k , а то значи да су посматрани вектори линеарно зависни. $\square$

Доказ 2 (нормализацијом). Означимо $A = \sum_{k=1}^n a_k^2$ и $B = \sum_{k=1}^n b_k^2$. Ако је $A = 0$ или $B = 0$, онда су сви a_k или сви b_k једнаки нули, па су обе стране неједнакости једнаке нули и тврђење важи. Претпоставимо зато да је $A > 0$ и $B > 0$.

Уводимо $A_k = \frac{a_k}{\sqrt{A}}$ и $B_k = \frac{b_k}{\sqrt{B}}$, па важи $\sum_{k=1}^n A_k^2 = 1 = \sum_{k=1}^n B_k^2$. Из АМ–ГМ неједнакости $|A_k B_k| \leq \frac{A_k^2 + B_k^2}{2}$, па сумирањем:

$$\sum_{k=1}^n |A_k B_k| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n B_k^2 = 1.$$

Пошто је $\sum_{k=1}^n |A_k B_k| = \frac{1}{\sqrt{AB}} \sum_{k=1}^n |a_k b_k|$, добијамо

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2},$$

одакле квадрирањем следи тврђење. $\square$

Напомена. За $n = 3$ Коши–Шварцова неједнакост добија геометријску интерпретацију. За векторе $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ она гласи $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$, што је еквивалентно тврђењу $|\cos(\vec{a}, \vec{b})| \leq 1$.

Посебно важан облик Коши–Шварцове неједнакости у примени је такозвани *Енџелов облик*.

Последица 2.14 (Енџелов облик). *Нека су $a_1, \dots, a_n$ реални бројеви и $b_1, \dots, b_n > 0$. Тада важи*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n},$$

са једнакошћу ако и само ако је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Доказ. Применом Коши–Шварцове неједнакости на низове $\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \dots, \frac{a_n}{\sqrt{b_n}} \right)$ и $(\sqrt{b_1}, \dots, \sqrt{b_n})$ добијамо

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt{b_k}} \cdot \sqrt{b_k} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{b_k} \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right),$$

одакле следи тврђење. $\square$

Следи неколико карактеристичних примена Коши–Шварцове неједнакости и Енгеловог облика.

Пример 2.15. Ако је $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, доказати да је $|ax + by + cz| \leq 1$.

Решење. Из Коши–Шварцове неједнакости:

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 1,$$

одакле $|ax + by + cz| \leq 1$.

Пример 2.16 (Несбитова неједнакост). Доказати да за позитивне бројеве a, b, c важи

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Решење. Применом Коши–Шварцове неједнакости на низове $(\sqrt{b+c}, \sqrt{c+a}, \sqrt{a+b})$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}}, \frac{1}{\sqrt{c+a}}, \frac{1}{\sqrt{a+b}}\right)$ добијамо:

$$2(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9.$$

Из $\frac{a+b+c}{b+c} = 1 + \frac{a}{b+c}$ следи $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$. Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$.

Пример 2.17. Нека су $a, b, c > 0$ и $ab + bc + ca = 1$. Доказати да је

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решење. Из Коши–Шварцове неједнакости:

$$\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) \cdot 2(a+b+c) \geq (a+b+c)^2,$$

па $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$. Из $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 3$ следи $a+b+c \geq \sqrt{3}$, па је тражена неједнакост доказана. Једнакост важи за $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 2.18 (ИМО 1995, задатак 2). Нека су $a, b, c > 0$ и $abc = 1$. Доказати да је

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Решење. Заменом $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ (уз услов $xyz = 1$) неједнакост прелази у

$$L = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Применом Енгеловог облика (Последица 2.14):

$$L \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Поред дискретног облика, Коши–Шварцова неједнакост има и интегрални облик који је кључан у функционалној анализи и директно мотивише Хелде-рову неједнакост за интеграле.

Теорема 2.19 (Интегрални облик Коши–Шварцове неједнакости). *Нека су $f, g \in L^2([a, b])$. Тада важи*

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right),$$

са једнакошћу ако и само ако су f и g линеарно зависне у простору $L^2([a, b])$, тј. ако постоје $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, не оба једнака нули, такви да је $\alpha f + \beta g = 0$ скоро свуда.

Доказ. Претпоставка $f, g \in L^2([a, b])$ обезбеђује да су f^2 , g^2 и fg интеграбилни, па су сви интегрални у исказу коначни.

Ако је $\int_a^b g^2 dx = 0$, онда је $g = 0$ скоро свуда, па су обе стране неједнакости једнаке нули, а f и g су линеарно зависне (узмимо $\alpha = 0$, $\beta = 1$). Претпоставимо зато да је $\int_a^b g^2 dx > 0$ и посматрамо функцију

$$h(t) = \int_a^b (f(x) + t g(x))^2 dx \geq 0$$

за све $t \in \mathbb{R}$. Развијањем добијамо квадратни трином

$$h(t) = \left(\int_a^b g^2 dx \right) t^2 + 2 \left(\int_a^b f g dx \right) t + \int_a^b f^2 dx \geq 0.$$

Пошто је водећи коефицијент позитиван и $h(t) \geq 0$ за све t , дискриминанта не може бити позитивна:

$$D = 4 \left(\int_a^b f g dx \right)^2 - 4 \left(\int_a^b f^2 dx \right) \left(\int_a^b g^2 dx \right) \leq 0,$$

одакле следи тврђење. Једнакост важи ако и само ако постоји $t_0 \in \mathbb{R}$ такво да је $h(t_0) = 0$, тј. $f + t_0 g = 0$ скоро свуда, што је управо линеарна зависност функција f и g у $L^2([a, b])$. $\square$

Напомена. Интегрални облик Коши–Шварцове неједнакости је специјалан случај ($p = q = 2$) Хелдгерове неједнакости за интеграле, која ће бити детаљно изложена у Глави 3. Тамо ће бити показано да оба резултата — дискретни и интегрални — произилазе из јединственог оквира Хелдгерове неједнакости.

Завршавамо секцију Чебишевљевог неједнакошћу — резултатом који повећује монотоност низова са величином сума производа.

Теорема 2.20 (Чебишевљева неједнакост). *Нека су $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ реални бројеви (оба низа моноџоно расту). Тада важи*

$$n \sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right).$$

Ако један низ расту а други опада, неједнакост се обрће.

Доказ. Посматрамо суму

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j).$$

Пошто оба низа моноџоно расту, за $i \geq j$ важи $a_i \geq a_j$ и $b_i \geq b_j$, па $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ за све i, j . Дакле $S \geq 0$.

Развијањем:

$$S = 2n \sum_{k=1}^n a_k b_k - 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \geq 0,$$

одакле следи тврђење. $\square$

Пример 2.21. Доказати да за позитивне бројеве $a \geq b \geq c$ важи

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

Решење. Из АМ–ГМ неједнакости за два броја следи

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a, \quad \frac{b^2}{c} + c \geq 2b, \quad \frac{c^2}{a} + a \geq 2c.$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + (a + b + c) \geq 2(a + b + c),$$

одакле следи тврђење. Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$ (в. Пример 2.8).

2.3 Последице елементарних неједнакости

У овом одељку изводимо неколико важних последица АМ–ГМ и Коши–Шварцове неједнакости, и разматрамо методолошки значајан концепт *шачака подударња*.

Последица 2.22. За позитивне реалне бројеве $a_1, \dots, a_n$ важи

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2,$$

са једнакошћу ако и само ако је $a_1 = \dots = a_n$.

Доказ. Применом Коши–Шварцове неједнакости на низове $(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$:

$$n^2 = \left(\sum_{k=1}^n 1 \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right). \quad \square$$

Напомена. Последица 2.22 се може кратко записати као $A_n \cdot H_n^{-1} \geq 1$, тј. $H_n \leq A_n$, па представља директну везу хармонијске и аритметичке средине.

Важан методолошки концепт приликом примене АМ–ГМ неједнакости је концепт *шачке подударња*. Наиме, у неједнакости $A_n \geq G_n$ једнакост важи када су сви бројеви једнаки. Та вредност назива се *шачком подударња*. При примени АМ–ГМ неједнакости, неопходно је да тачка подударња буде управо на месту где желимо једнакост — у противном, директна примена неједнакости не даје оптималну оцену.

Пример 2.23. Наћи минималну вредност израза $f(x) = x + \frac{1}{x}$ за $x > 0$.

Решење. Из АМ–ГМ неједнакости: $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, са једнакошћу за $x = \frac{1}{x}$, тј. $x = 1$. Дакле, $\min f = 2$.

Пример 2.24. Наћи минималну вредност израза $g(x) = x + \frac{1}{x}$ за $x \geq 3$.

Решење. Тачка подударана $x = 1$ не припада области $[3, +\infty)$, па директна примена АМ–ГМ не ради. Желимо једнакост у $x = 3$, па тражимо разбијање које даје једнакост на том месту.

Пишемо $g(x) = \frac{x}{9} + \frac{1}{x} + \frac{8x}{9}$. Применом АМ–ГМ на прва два члана:

$$\frac{x}{9} + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{9} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{2}{3},$$

са једнакошћу за $\frac{x}{9} = \frac{1}{x}$, тј. $x = 3$. Стога $g(x) \geq \frac{2}{3} + \frac{8 \cdot 3}{9} = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$, и једнакост се достиже за $x = 3$.

Напомена. Концепт тачке подударана показује да примена АМ–ГМ неједнакости захтева пажљиво бирање облика у коме се неједнакост примењује. Само ако је тачка подударана унутар допуштеног скупа, добијамо оптималну оцену.

Завршавамо одељак важном последицом која ће наћи примену у каснијим главама.

Теорема 2.25 (Неједнакост о преуређивању). *Нека су $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ реални бројеви. За произвољну пермутацију $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ низа $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ важи*

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1 \leq x_1b_1 + x_2b_2 + \dots + x_nb_n \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

Другим речима, сума производа је највећа кад су оба низа сортирана у истом смеру, а најмања кад су сортирана у супротном смеру.

Доказ. Десна неједнакост. Посматрамо пермутацију $(x_1, \dots, x_n)$ низа $(a_1, \dots, a_n)$ за коју је сума $S = \sum_{k=1}^n x_k b_k$ максимална (таква постоји јер пермутација има коначно много). Ако је $x_i > x_j$ за неке индексе $i < j$, разменом чланова x_i и x_j сума се мења за

$$\Delta S = x_j b_i + x_i b_j - x_i b_i - x_j b_j = (x_i - x_j)(b_j - b_i) \geq 0,$$

јер је $x_i > x_j$ и $b_j \geq b_i$. Дакле размена не смањује суму, па се максимум достиже за растуће поређан низ, тј. за $(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n)$.

Лева неједнакост. Сада посматрамо пермутацију за коју је сума S минимална. Ако је $x_i < x_j$ за неке индексе $i < j$, истим рачуном добијамо

$$\Delta S = (x_i - x_j)(b_j - b_i) \leq 0,$$

па размена не повећава суму. Зато се минимум достиже за опадајуће поређан низ, тј. за $(x_1, \dots, x_n) = (a_n, \dots, a_1)$, што даје

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n. \quad \square$$

Последица 2.26. Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n$ реални бројеви и $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ произвољна пермутација. Тада

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

Пример 2.27. Доказати Несбитову неједнакост употребом неједнакости о преуређивању: за позитивне a, b, c важи

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Решење. Без умањења општости нека је $a \geq b \geq c$. Тада је $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$. Из неједнакости о преуређивању:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$$

и

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}.$$

Сабирањем ових двеју неједнакости:

$$2 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \geq \frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} = 3,$$

одакле следи тврђење.

Пример 2.28. Доказати да за позитивне a, b, c важи

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq a^4 b + b^4 c + c^4 a.$$

Решење. Пошто је функција $t \mapsto t^4$ растућа на $(0, +\infty)$, низови (a^4, b^4, c^4) и (a, b, c) уређени су на исти начин: већем члану једног низа одговара већи члан другог. По неједнакости о преуређивању (Теорема 2.25) истоимено спаривање даје максималну суму производа, па је за сваку пермутацију (x, y, z) низа (a, b, c)

$$a^4 x + b^4 y + c^4 z \leq a^4 a + b^4 b + c^4 c = a^5 + b^5 + c^5.$$

Специјално, за пермутацију (b, c, a) добијамо

$$a^4 b + b^4 c + c^4 a \leq a^5 + b^5 + c^5.$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$.

Напомена. Коши–Шварцова неједнакост из Теореме 2.13 специјалан је случај једног општијег резултата. Наиме, за позитивне реалне бројеве $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ и за $p, q > 1$ са $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ важи

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

што је *Хелдјева неједнакост* за суме. Она ће бити формулисана и доказана у Глави 3 (Теорема 3.23); за $p = q = 2$ из ње се непосредно добија Коши–Шварцова неједнакост, па Хелдјева неједнакост представља природно уопштење резултата из овог одељка.

Пример 2.29. Доказати да за позитивне бројеве $a_1, \dots, a_n$ важи

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Одредити вредности за које се достиже једнакост.

Решење. Непосредно следи из Последице 2.22. Једнакост се достиже ако и само ако је $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Глава 3

Класичне неједнакости математичке анализе

У претходној глави поставили смо елементарне основе теорије неједнакости. Сада прелазимо на три резултата која чине окосницу класичне математичке анализе — Јенсенову, Хелдерову и Минковскијеву неједнакост. Ове три неједнакости нису само логичан наставак елементарних резултата; оне представљају прелаз ка апстрактнијем нивоу анализе и отварају врата функционалним просторима, теорији мере и математичкој физици.

3.1 Јенсенова неједнакост

Лудвиг Вилијам Валдемар Јенсен, познатији као **Јохан Јенсен** (1859–1925), био је дански математичар и инжењер. Иако је по образовању инжењер и никада није имао академски положај, Јенсен се данас сматра значајним математичарем. Поред неједнакости која носи његово име, 1915. године доказао је и важну теорему у комплексној анализи. Неједнакост коју је објавио 1906. године представља снажно уопштење АМ–ГМ неједнакости и централни алат у теорији конвексних функција [8].

Конвексне и конкавне функције

Дефиниција 3.1. Нека је (a, b) интервал реалне праве и $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Кажемо да је f *конвексна* на (a, b) ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ и свако $\lambda \in (0, 1)$

важи

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Функција f је *строга конвексна* ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ са $x_1 \neq x_2$ и свако $\lambda \in (0, 1)$ важи строга неједнакост

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Функција f је *конкавна* (односно *строга конкавна*) ако је $-f$ конвексна (односно строго конвексна).

Геометријски, конвексност значи да тетива која спаја две тачке графика лежи изнад или на графику. Другачије речено, надграфик функције је конвексан скуп.

Теорема 3.2 (Критеријум конвексности). *Нека је $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ двапут диференцијабилна. Тада је f конвексна на (a, b) ако и само ако је $f''(x) \geq 0$ за свако $x \in (a, b)$. Ако је $f''(x) > 0$ за свако $x \in (a, b)$, функција је строга конвексна.*

Следи неколико важних примера конвексних и конкавних функција.

Пример 3.3. Функција $f(x) = x^a$ на $(0, +\infty)$: $f''(x) = a(a-1)x^{a-2}$, па је f строго конвексна за $a > 1$ или $a < 0$, и строго конкавна за $0 < a < 1$.

Пример 3.4. Функција $f(x) = e^x$ је строго конвексна на $\mathbb{R}$ јер је $f''(x) = e^x > 0$.

Пример 3.5. Функција $f(x) = \ln x$ је строго конкавна на $(0, +\infty)$ јер је $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

Пример 3.6. Функција $f(x) = \sin x$ је конкавна на $(0, \pi)$ јер је $f''(x) = -\sin x < 0$ на том интервалу, и конвексна на $(\pi, 2\pi)$.

Напомена. Из дефиниције конвексности непосредно следи да је за конвексну функцију f и $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ са $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Ово је полазиште за Јенсенову неједнакост.

Јенсенова неједнакост и последице

Теорема 3.7 (Јенсенова неједнакост). *Нека је $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција и нека су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ такви да је $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Тада за*

свако $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ важи

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

За конкавну функцију неједнакост се обрће. Ако је f строго конвексна, једнакост важи ако и само ако су међусобно једнаки сви бројеви x_i за које је $\lambda_i > 0$.

Доказ. Доказујемо индукцијом по n .

За $n = 2$ тврђење је тачно по дефиницији конвексности.

Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$. Нека су $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \geq 0$ са збиром 1 и $x_1, \dots, x_{k+1} \in (a, b)$.

Ако је $\lambda_{k+1} = 1$, тада су сви остали $\lambda_i = 0$ и тврђење је очигледно. Иначе, нека је $m = \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 - \lambda_{k+1} > 0$. Тада су $\frac{\lambda_1}{m}, \dots, \frac{\lambda_k}{m}$ ненегативни са збиром 1, па по индукцијској хипотези:

$$f\left(\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{m} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{m} f(x_i).$$

Нека је $y = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{m} x_i \in (a, b)$. Тада је $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = my + \lambda_{k+1} x_{k+1}$, па из конвексности f :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) &= f(my + \lambda_{k+1} x_{k+1}) \leq mf(y) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &\leq m \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{m} f(x_i) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

По принципу математичке индукције, тврђење важи за све $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Напомена. Јенсенова неједнакост може се записати и у облику: ако је f конвексна и $m_1, \dots, m_n \geq 0$ са $\sum m_i > 0$, тада је

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n m_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Овај облик је практичнији у примени када тежине нису нормализоване.

Из Јенсенове неједнакости непосредно следе основне неједнакости између средина.

Последица 3.8 (Тежинска АМ–ГМ неједнакост). Нека су $x_1, \dots, x_n > 0$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ са $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Тада је

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

За $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ добијамо класичну АМ–ГМ неједнакост.

Доказ. Применом Јенсенове неједнакости на строго конвексну функцију $f(x) = e^x$ и бројеве $\ln x_1, \dots, \ln x_n$:

$$e^{\lambda_1 \ln x_1 + \dots + \lambda_n \ln x_n} \leq \lambda_1 e^{\ln x_1} + \dots + \lambda_n e^{\ln x_n},$$

одакле следи тврђење. $\square$

Последица 3.9 (АМ–КА неједнакост). Нека су $x_1, \dots, x_n > 0$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ са $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Тада је

$$(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)^2 \leq \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

За $\lambda_i = \frac{1}{n}$ добијамо $A_n \leq K_n$.

Доказ. Пошто је $f(x) = x^2$ строго конвексна на $\mathbb{R}$ (јер је $f''(x) = 2 > 0$), из Јенсенове неједнакости следи:

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right)^2 = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2. \quad \square$$

Последица 3.10 (ГМ–ХМ неједнакост). Нека су $x_1, \dots, x_n > 0$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ са $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Тада је

$$\frac{1}{\frac{\lambda_1}{x_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{x_n}} \leq x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}.$$

За $\lambda_i = \frac{1}{n}$ добијамо $H_n \leq G_n$.

Доказ. Заменом $x_i \rightarrow \frac{1}{x_i}$ у Последици 3.8:

$$\left(\frac{1}{x_1} \right)^{\lambda_1} \dots \left(\frac{1}{x_n} \right)^{\lambda_n} \leq \frac{\lambda_1}{x_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{x_n},$$

тј. $\frac{1}{x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{x_i}$, одакле следи тврђење. $\square$

Напомена. Последице 3.8, 3.9 и 3.10 заједно дају да је $H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n$ — хијерархија средина из Теореме 2.5 тако добија елегантан јединствени доказ преко Јенсенове неједнакости.

Интегрални облик Јенсенове неједнакости

Јенсенова неједнакост има природни интегрални облик који је важан у теорији мере и вероватноћи.

Теорема 3.11 (Интегрална Јенсенова неједнакост). *Нека је $\alpha < \beta$, нека је $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција и нека је $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ интјеграбилна функција шаква да је и $f \circ \varphi$ интјеграбилна на $[\alpha, \beta]$. Тада важи*

$$f\left(\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt\right) \leq \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) dt.$$

Доказ. Означимо $\mu = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt$. Пошто је $\varphi(t) \in [a, b]$ за све t , важи $\mu \in [a, b]$.

Претпоставимо најпре да је μ унутрашња тачка интервала $[a, b]$. Тада, због конвексности функције f , постоји потпорна права у тачки μ , тј. постоји $c \in \mathbb{R}$ такав да је

$$f(s) \geq f(\mu) + c(s - \mu) \quad \text{за све } s \in [a, b].$$

Ставимо $s = \varphi(t)$ и интеграљењем по $[\alpha, \beta]$ добијамо

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) dt \geq f(\mu)(\beta - \alpha) + c \int_{\alpha}^{\beta} (\varphi(t) - \mu) dt = f(\mu)(\beta - \alpha),$$

јер је $\int_{\alpha}^{\beta} (\varphi(t) - \mu) dt = 0$. Дељењем са $\beta - \alpha > 0$ следи тврђење.

Ако је μ крајња тачка интервала, рецимо $\mu = a$, тада је $\varphi(t) - a \geq 0$ за све t , а $\int_{\alpha}^{\beta} (\varphi(t) - a) dt = 0$, одакле следи $\varphi = a$ скоро свуда. Тада су обе стране неједнакости једнаке $f(a)$, па тврђење важи. Случај $\mu = b$ разматра се на исти начин. $\square$

Пример 3.12. Доказати да за f конвексну на $[0, 1]$ важи

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{f(0) + f(1)}{2}.$$

Решење. Лева неједнакост следи директно из интегралне Јенсенове неједнакости са $\varphi(t) = t$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$:

$$f\left(\int_0^1 t dt\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \int_0^1 f(t) dt.$$

Десна неједнакост следи из дефиниције конвексности са $\lambda = 1 - t$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$: $f(t) = f((1 - t) \cdot 0 + t \cdot 1) \leq (1 - t)f(0) + tf(1)$, па интеграљењем: $\int_0^1 f(t) dt \leq f(0) \int_0^1 (1 - t) dt + f(1) \int_0^1 t dt = \frac{f(0) + f(1)}{2}$.

Пример 3.13. Нека су α, β, γ углови троугла. Доказати да је

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Решење. Функција $f(x) = -\cos x$ конвексна је на интервалу $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, јер је $f''(x) = \cos x \geq 0$ на том интервалу; она, међутим, није конвексна на целом $(0, \pi)$. Зато доказ раздвајамо на два случаја.

Оштроугли или правоугли троугао. Тада је $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, па се Јенсенова неједнакост може непосредно применити:

$$\frac{-\cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma}{3} \geq -\cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

одакле $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$.

Тупоугли троугао. Нека је, без умањења општости, $\gamma > \frac{\pi}{2}$. На интервалу $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ функција $-\cos x$ је конкавна, па претходни Јенсенов поступак више није дозвољен и користимо други метод. Ставимо $t = \sin \frac{\gamma}{2}$. Пошто је $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi - \gamma}{2}$, важи

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 2t,$$

а из формуле за косинус двоструког угла

$$\cos \gamma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - 2t^2.$$

Зато је

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 1 + 2t - 2t^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(2t - 1)^2 \leq \frac{3}{2}.$$

Напомена. Претходни доказ показује да се Јенсенова неједнакост сме применити само на интервалу $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, на коме је функција $-\cos x$ конвексна, док се у тупоуглом случају мора прећи на други поступак. Постоји и доказ који обухвата све троуглове одједном, заснован на идентитету

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Пошто су половине углова у интервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, где је функција $\sin x$ конкавна, Јенсенова неједнакост даје

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq 3 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2},$$

па из АМ–ГМ неједнакости следи

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

одакле поново $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 1 + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$.

Примери примене

Пример 3.14. Нека су α, β, γ углови троугла. Доказати да је

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Решење. Функција $f(x) = \sin x$ је конкавна на $(0, \pi)$. Применом Јенсенове неједнакости за конкавну функцију:

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \leq \sin \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

одакле следи тврђење. Једнакост важи ако и само ако је $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ (једнакостранични троугао).

Пример 3.15. Нека су α, β, γ углови троугла. Доказати да је

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Решење. Из АМ–ГМ неједнакости и претходног примера:

$$\sqrt[3]{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \leq \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

одакле $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Пример 3.16. Доказати да за позитивне a, b важи

$$4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3.$$

Решење. Функција $f(x) = x^3$ је конвексна на $(0, +\infty)$. Применом Јенсенове неједнакости са $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2},$$

одакле $4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3$. Аналогно се, за позитивне a, b, c , показује $9(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)^3$.

Пример 3.17. Нека је $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x > 0$. Наћи минималну вредност k такву да за произвољне $a, b > 0$ важи $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \leq k\sqrt[3]{a+b}$.

Решење. Функција $f(x) = \sqrt[3]{x}$ је строго конкавна на $(0, +\infty)$ јер је $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} < 0$. Из Јенсенове неједнакости:

$$\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}},$$

одакле $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \leq 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{a+b}$. Дакле $k_{\min} = \sqrt[3]{4}$, и једнакост важи за $a = b$.

Јенсен-конвексне функције

У пракси се понекад сусрећемо са функцијама које задовољавају слабији облик конвексности — само у средњој тачки сегмента.

Дефиниција 3.18. Функција $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ је *Јенсен-конвексна* на (a, b) ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Функција је строго Јенсен-конвексна ако важи строга неједнакост за $x_1 \neq x_2$. Аналогно се дефинишу (строго) Јенсен-конкавне функције.

Свака конвексна функција је Јенсен-конвексна, али обрнуто не важи у општем случају. Међутим, ако додамо услов непрекидности, ове две особине постају еквивалентне.

Теорема 3.19. Нека је $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ Јенсен-конвексна функција. Тада за свако $n \geq 2$ и $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$ важи

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}.$$

Доказ. Доказ се изводи обрнутом индукцијом. Прво доказујемо тврђење за $n = 2^k$ обичном индукцијом. За $n = 2$ тврђење је тачно по дефиницији. Претпоставимо да важи за $n = 2^k$ и покажимо за $n = 2^{k+1}$. Означимо $x = \frac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}$ и $y = \frac{x_{2^k+1} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^k}$. Тада:

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{2^{k+1}} x_i}{2^{k+1}}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \leq \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{i=1}^{2^{k+1}} f(x_i).$$

Затим, из тврђења за $n = 2^k$ изводимо тврђење за произвољно n обрнутом индукцијом: претпоставимо да важи за $n+1$ и покажимо за n . Ставимо $x_{n+1} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$. Тада је $\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = x_{n+1}$, па из тврђења за $n+1$:

$$f(x_{n+1}) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n) + f(x_{n+1})}{n+1},$$

одакле следи $f(x_{n+1}) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$, тј. тврђење за n . □

Теорема 3.20. *Ако је $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ Јенсен-конвексна и непрекидна, онда је f конвексна на (a, b) .*

Доказ. Нека су $x, y \in (a, b)$ и $\lambda \in [0, 1]$.

Претпоставимо најпре да је λ дијадски рационалан број, тј. да је $\lambda = \frac{m}{2^k}$ за неке целе бројеве $k \geq 0$ и $0 \leq m \leq 2^k$. Применом Теореме 3.19 на 2^k тачака, од којих је $2^k - m$ копија тачке x и m копија тачке y , добијамо

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Нека је сада $\lambda \in [0, 1]$ произвољно. Пошто су дијадски рационални бројеви густе у $[0, 1]$, постоји низ дијадских рационалних бројева $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Због непрекидности функције f важи

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x + \lambda y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f((1-\lambda_n)x + \lambda_n y) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} ((1-\lambda_n)f(x) + \lambda_n f(y)) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y). \end{aligned}$$

Дакле, f је конвексна на (a, b) [4, теорема 1.1.8]. □

Завршавамо одељак такмичарским задатком у коме се Јенсенова неједнакост примењује елегантно.

Пример 3.21 ((C82.3-4.2) — Такмичарски задатак). Доказати неједнакост

$$\sqrt[44]{\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdots \operatorname{tg} 44^\circ} < \operatorname{tg} 22^\circ 30' < \frac{1}{44}(\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ + \cdots + \operatorname{tg} 44^\circ).$$

Решење. Прво показујемо да је $f(x) = \ln(\operatorname{tg} x)$ строго конкавна на $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Израчунавамо:

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x},$$

$$f''(x) = -\frac{4 \cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

На интервалу $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ важи $2x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, па је $\cos 2x > 0$, одакле $f''(x) < 0$ — функција је строго конкавна на $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Применом Јенсенове неједнакости за строго конкавну функцију $f(x) = \ln(\operatorname{tg} x)$ са тачкама $x_k = k^\circ$, $k = 1, \dots, 44$, и једнаким тежинама $\lambda_k = \frac{1}{44}$ добијамо

$$\frac{1}{44} \sum_{k=1}^{44} \ln(\operatorname{tg} k^\circ) < \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{1^\circ + \cdots + 44^\circ}{44}\right)\right) = \ln(\operatorname{tg} 22^\circ 30'),$$

јер је $\frac{1 + 2 + \cdots + 44}{44} = \frac{45}{2} = 22,5 = 22^\circ 30'$. Знак је строг зато што су тачке $1^\circ, \dots, 44^\circ$ међусобно различите, а функција строго конкавна. Потенцирањем добијамо леву неједнакост:

$$\sqrt[44]{\operatorname{tg} 1^\circ \cdots \operatorname{tg} 44^\circ} < \operatorname{tg} 22^\circ 30'.$$

Десна неједнакост следи из строге конвексности функције $g(x) = \operatorname{tg} x$ на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, јер је $g''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} > 0$ на том интервалу. Применом Јенсенове неједнакости за строго конвексну функцију са истим тачкама и тежинама добијамо

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \operatorname{tg}\left(\frac{1^\circ + \cdots + 44^\circ}{44}\right) < \frac{1}{44} \sum_{k=1}^{44} \operatorname{tg} k^\circ,$$

где је знак поново строг јер су аргументи међусобно различити.

3.2 Хелдјева неједнакост

Ото Лудвиг Хелдје (1859–1937) био је немачки математичар познат по доприносима анализи и теорији група. Неједнакост која данас носи његово

име извео је 1889. године у раду о Лоренцовим редовима. Независно, сличан резултат добио је и Леонард Роџерс 1888. године. Хелдерова неједнакост представља кључно уопштење Коши–Шварцове неједнакости — уместо два индекса спрегнута условом $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, допушта произвољне спрегнуте индексе p и q [2].

Јангова неједнакост

Пре него што представимо Хелдерову неједнакост, неопходно је да се упознамо са Јанговом неједнакошћу, јер ће нам послужити у доказу.

Теорема 3.22 (Јангова неједнакост). *Нека су $p, q > 1$ реални бројеви такви да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тада за све $a, b \geq 0$ важи*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

са једнакошћу ако и само ако је $a^p = b^q$.

Дајемо два доказа.

Доказ 1 (преко Јенсенове неједнакости). Ако је $a = 0$ или $b = 0$, лева страна је једнака нули, а десна је ненегативна, па неједнакост очигледно важи; притом је једнакост могућа само ако су обе стране једнаке нули, тј. ако је $a = b = 0$, што је у складу са условом $a^p = b^q$.

Претпоставимо зато да је $a > 0$ и $b > 0$, па су $\ln a$ и $\ln b$ дефинисани. Функција $f(x) = e^x$ је строго конвексна, па из Јенсенове неједнакости са $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$ и бројевима $p \ln a$, $q \ln b$ следи

$$e^{\frac{1}{p}(p \ln a) + \frac{1}{q}(q \ln b)} \leq \frac{1}{p} e^{p \ln a} + \frac{1}{q} e^{q \ln b},$$

тј. $ab = e^{\ln a + \ln b} \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Пошто је f строго конвексна, једнакост важи ако и само ако је $p \ln a = q \ln b$, тј. ако је $a^p = b^q$. $\square$

Доказ 2 (геометријски). Посматрамо функцију $f(x) = x^{p-1}$ за $x \geq 0$. Површина правоугаоника са страницама a и b не може бити већа од збира површина испод криве $y = x^{p-1}$ (од 0 до a) и десно од криве (од 0 до b):

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad \square$$

Хелдерова неједнакост за суме

Теорема 3.23 (Хелдерова неједнакост). *Нека су $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ не-негативни реални бројеви и нека су $p, q > 1$ такви да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тада важи*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

са једнакошћу ако и само ако постоји $\lambda \geq 0$ такво да је $a_i^p = \lambda b_i^q$ за свако $i = 1, \dots, n$, или је $b_i = 0$ за свако i .

Доказ. Означимо $X = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p}$ и $Y = \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}$.

Ако је $X = 0$, онда је $a_i = 0$ за свако i , па су обе стране неједнакости једнаке нули и тврђење важи. Исто важи и ако је $Y = 0$. Претпоставимо зато да је $X > 0$ и $Y > 0$.

Применом Јангове неједнакости (Теорема 3.22) на $\frac{a_i}{X}$ и $\frac{b_i}{Y}$ добијамо

$$\frac{a_i b_i}{XY} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{a_i^p}{X^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{b_i^q}{Y^q}.$$

Сумирањем по $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{1}{XY} \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \frac{1}{pX^p} \sum_{i=1}^n a_i^p + \frac{1}{qY^q} \sum_{i=1}^n b_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

одакле следи тврђење.

Једнакост важи ако и само ако у свакој примени Јангове неједнакости важи једнакост, тј. ако је $\frac{a_i^p}{X^p} = \frac{b_i^q}{Y^q}$ за свако i . То је еквивалентно са $a_i^p = \lambda b_i^q$ за свако i , где је $\lambda = \frac{X^p}{Y^q} \geq 0$. $\square$

Доказ 2 (преко Јенсенове неједнакости). Претпоставимо да је $b_i > 0$ за свако i ; општи случај своди се на овај заменом b_i са $b_i + \varepsilon$ и граничним прелазом $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Функција $f(x) = x^p$ за $p > 1$ је строго конвексна на $\mathbb{R}^+$. Применом Јенсенове неједнакости са тежинама $m_i = b_i^q$ и тачкама $x_i = a_i b_i^{1-q}$:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right)^p \leq \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i^p}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

тј.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^p \leq \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{p-1} \cdot \sum_{i=1}^n a_i^p.$$

Пошто је $\frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$, одавде следи тврђење. $\square$

Напомена. За $p = q = 2$ Хелдерова неједнакост своди се на Коши–Шварцову неједнакост. Ако бројеви a_i, b_i нису нужно позитивни, важи:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Хелдерова неједнакост за интеграле

Теорема 3.24 (Интегрална Хелдерова неједнакост). *Нека су $p, q > 1$ такви да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и нека је $f \in L^p([a, b])$, $g \in L^q([a, b])$. Тада важи*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

тј. $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Доказ. Доказ је аналоган дискретном случају. Означимо $F = \|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p}$ и $G = \|g\|_q = \left(\int_a^b |g|^q \right)^{1/q}$.

Ако је $F = 0$, онда је $f = 0$ скоро свуда, па је и $fg = 0$ скоро свуда; тада су обе стране неједнакости једнаке нули и тврђење важи. Исто важи и ако је $G = 0$. Претпоставимо зато да је $F > 0$ и $G > 0$.

Применом Јангове неједнакости (Теорема 3.22) на $\frac{|f(x)|}{F}$ и $\frac{|g(x)|}{G}$ добијамо

$$\frac{|f(x)g(x)|}{FG} \leq \frac{|f(x)|^p}{pF^p} + \frac{|g(x)|^q}{qG^q}.$$

Интеграљењем по $[a, b]$ следи

$$\frac{1}{FG} \int_a^b |fg| dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

одакле се множењем са FG добија тврђење. $\square$

Напомена. Интегрална Хелдерова неједнакост је темељни резултат у теорији Лебегових простора L^p . За $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ она обезбеђује да је пресликавање

$$(f, g) \mapsto \int_a^b f(x)g(x) dx$$

добро дефинисано за $f \in L^p([a, b])$ и $g \in L^q([a, b])$ и да важи оцена

$$\left| \int_a^b fg dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

То пресликавање није скаларни производ, већ *дуално упаривање* простора L^p и L^q . За $p = q = 2$ ово упаривање јесте скаларни производ, па је $L^2([a, b])$ Хилбертов простор. Ово је кључна особина која омогућава развој функционалне анализе.

Уопштења Хелдерове неједнакости

Теорема 3.25 (Тежинска Хелдерова неједнакост). *Нека су $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; m_1, \dots, m_n$ позитивни реални бројеви и $p, q > 1$ са $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тада важи*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i m_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p m_i \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q m_i \right)^{\frac{1}{q}},$$

са једнакошћу ако и само ако је $\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \dots = \frac{a_n^p}{b_n^q}$.

Доказ. Применом Јангове неједнакости на $\frac{a_i}{(\sum a_k^p m_k)^{1/p}}$ и $\frac{b_i}{(\sum b_k^q m_k)^{1/q}}$ добијамо за свако i :

$$\frac{a_i b_i m_i}{(\sum a_k^p m_k)^{1/p} (\sum b_k^q m_k)^{1/q}} \leq \frac{a_i^p m_i}{p \sum a_k^p m_k} + \frac{b_i^q m_i}{q \sum b_k^q m_k}.$$

Сумирањем по i :

$$\frac{\sum a_i b_i m_i}{(\sum a_i^p m_i)^{1/p} (\sum b_i^q m_i)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Једнакост важи ако и само ако у свакој примени Јангове неједнакости важи једнакост, тј. ако је

$$\frac{a_i^p}{\sum_{k=1}^n a_k^p m_k} = \frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q m_k}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Еквивалентно, постоји $\lambda > 0$ такво да је $a_i^p = \lambda b_i^q$ за свако $i = 1, \dots, n$. $\square$

Теорема 3.26 (Општа Хелдерова неједнакост). *Нека је $a_{ij} > 0$ за $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$, и нека су $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ такви да је $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. Тада важи*

$$\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n a_{ij}^{\alpha_j} \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)^{\alpha_j}.$$

Доказ. Доказујемо индукцијом по n . За $n = 1$ тврђење је тривијално. За $n = 2$ са $\alpha_1 = \frac{1}{p}$, $\alpha_2 = \frac{1}{q}$ тврђење је Хелдерова неједнакост.

Претпоставимо да важи за $n = k$. За $n = k + 1$ са $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_k < 1$ и $\alpha_{k+1} = 1 - \beta$ применимо Хелдерову неједнакост са експонентима $\frac{1}{\beta}$ и $\frac{1}{1-\beta}$:

$$\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{k+1} a_{ij}^{\alpha_j} \leq \left(\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^k a_{ij}^{\alpha_j/\beta} \right)^{\beta} \left(\sum_{i=1}^m a_{i,k+1} \right)^{1-\beta}.$$

Применом индукцијске хипотезе на прву суму (са тежинама α_j/β):

$$\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^k a_{ij}^{\alpha_j/\beta} \leq \prod_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)^{\alpha_j/\beta},$$

одакле следи тврђење. □

Последица 3.27 (Последица за m низова). *За m низова позитивних реалних бројева $(a_{1,1}, \dots, a_{1,n})$, $(a_{2,1}, \dots, a_{2,n})$, $\dots$, $(a_{m,1}, \dots, a_{m,n})$ важи*

$$\prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \right) \geq \left(\sum_{j=1}^n \sqrt[m]{\prod_{i=1}^m a_{i,j}} \right)^m.$$

Једнакост важи ако и само ако су ових m низова пропорционални по индексима.

Доказ. Применом Опште Хелдерове неједнакости (Теорема 3.26) са $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \frac{1}{m}$ и матрицом a_{ij} где је i -та врста j -ти елемент i -тог низа:

$$\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m a_{i,j}^{1/m} \leq \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \right)^{1/m}.$$

Потенцирањем са m добијамо тврђење. За базни корак ($m = 2$) са $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{j=1}^n \sqrt{a_{1,j} a_{2,j}} \leq \sqrt{\left(\sum_{j=1}^n a_{1,j} \right) \left(\sum_{j=1}^n a_{2,j} \right)},$$

што је управо Коши–Шварцова неједнакост.

Услов једнакости у примењеној општој Хелдеровој неједнакости значи да су нормализовани низови $\left(\frac{a_{i,j}}{\sum_{k=1}^n a_{i,k}} \right)_{j=1}^n$ једнаки за све i , што је еквивалентно томе да су посматрани низови међусобно пропорционални. $\square$

Примери примене

Пример 3.28. Доказати да за позитивне a, b, c важи

$$3(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2)^3.$$

Решење. Применом опште Хелдерове неједнакости (Теорема 3.26) у трочланом облику, са $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$, на низове

$$(a^3, b^3, c^3), \quad (a^3, b^3, c^3), \quad (1, 1, 1)$$

добивамо

$$\sum_{\text{сус}} \sqrt[3]{a^3 \cdot a^3 \cdot 1} \leq (a^3 + b^3 + c^3)^{\frac{1}{3}} (a^3 + b^3 + c^3)^{\frac{1}{3}} (1 + 1 + 1)^{\frac{1}{3}},$$

тј. $a^2 + b^2 + c^2 \leq [(a^3 + b^3 + c^3)^2 \cdot 3]^{\frac{1}{3}}$. Кубирањем следи

$$(a^3 + b^3 + c^3)^2 \cdot 3 \geq (a^2 + b^2 + c^2)^3.$$

Пример 3.29. Доказати да за позитивне a, b, c, x, y, z важи

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a + b + c)^3}{3(x + y + z)}.$$

Решење. Пишемо

$$a + b + c = \sum_{\text{сус}} \sqrt[3]{\frac{a^3}{x}} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1},$$

па применом опште Хелдерове неједнакости (Теорема 3.26) у трочланом облику, са $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$, на низове

$$\left(\frac{a^3}{x}, \frac{b^3}{y}, \frac{c^3}{z} \right), \quad (x, y, z), \quad (1, 1, 1)$$

добивамо

$$(a + b + c)^3 \leq \left(\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \right) (x + y + z) \cdot 3,$$

одакле дељењем са $3(x + y + z) > 0$ следи тврђење.

Пример 3.30. Нека су $a, b, c > 0$ такви да је $ab + bc + ca = 3$. Доказати да је $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) \geq 8$.

Решење. Полазимо од две оцене. Прва је

$$(1 + a^2)(1 + b^2) \geq (a + b)^2,$$

која следи из Коши–Шварцове неједнакости примењене на низове $(1, a)$ и $(b, 1)$, а друга је

$$(a + b)^2 \geq 4ab,$$

која следи из $(a - b)^2 \geq 0$. Одатле је

$$\begin{aligned} (1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) &\geq (a + b)^2(1 + c^2) \\ &= (a + b)^2 + c^2(a + b)^2 \\ &\geq 4ab + c^2(a + b)^2 \\ &= 4ab + (ca + cb)^2 \\ &= 4ab + (3 - ab)^2 \\ &= 8 + (ab - 1)^2 \\ &\geq 8, \end{aligned}$$

где је употребљен услов $ca + cb = 3 - ab$.

Једнакост захтева $a = b$, $ab = 1$ и $c(a + b) = 2$, одакле следи $a = b = c = 1$.

Пример 3.31 (Примена интегралне Хелдирове неједнакости). Оценити интеграл $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$.

Решење. Применом интегралне Хелдирове неједнакости (Теорема 3.24) са $p = 4$, $q = \frac{4}{3}$, $f(x) = x^2$ и $g(x) = (1 - x^2)^{1/2}$ добијамо

$$I = \int_0^1 x^2(1 - x^2)^{1/2} dx \leq \left(\int_0^1 x^8 dx \right)^{1/4} \left(\int_0^1 (1 - x^2)^{2/3} dx \right)^{3/4}.$$

Прва вредност је $\left(\frac{1}{9}\right)^{1/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{9}}$.

За рачунање другог интеграла подсетимо се да је *бета-функција* дефинисана са

$$B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1}(1 - t)^{v-1} dt, \quad u, v > 0.$$

У интегралу $\int_0^1 (1-x^2)^{2/3} dx$ уведемо смену $t = x^2$, одакле је $x = \sqrt{t}$ и $dx = \frac{1}{2}t^{-1/2} dt$; границе се не мењају, јер $x = 0$ даје $t = 0$, а $x = 1$ даје $t = 1$. Зато је

$$\int_0^1 (1-x^2)^{2/3} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{2/3} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right),$$

пошто је $-\frac{1}{2} = u - 1$ за $u = \frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3} = v - 1$ за $v = \frac{5}{3}$.

Дакле,

$$I \leq \frac{1}{\sqrt[4]{9}} \left(\frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right) \right)^{3/4}.$$

Горња оцена показује примену Хелдерове неједнакости на конкретне интеграле. Тачна вредност овог интеграла је $I = \frac{\pi}{16}$ и добија се сменом $x = \sin \theta$, при чему је

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{\pi}{16}.$$

3.3 Минковскијева неједнакост

Херман Минковски (1864–1909) био је немачки математичар литванског порекла, познат по доприносима теорији бројева, геометрији бројева и математичкој физици. У математичкој физици га памтимо по Минковском простор-времену у специјалној теорији релативности. Неједнакост која носи његово име природна је последица Хелдерове и представља уопштење троугаоне неједнакости на n -димензионалне просторе [2].

Минковскијева неједнакост за суме

Теорема 3.32 (Прва Минковскијева неједнакост). *Нека су $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ ненегативни реални бројеви и $p > 1$. Тада важи*

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

са једнакошћу ако и само ако је један од коначних низова $(a_1, \dots, a_n)$ и $(b_1, \dots, b_n)$ нула-низ или постоји $\lambda > 0$ такво да је $a_i = \lambda b_i$ за свако $i = 1, \dots, n$; другим речима, ако и само ако су посматрана два ненегативна вектора позитивно линеарно зависна.

Доказ. Нека је q спрегнут са p , тј. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пишемо:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^n a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i (a_i + b_i)^{p-1}.$$

Применом Хелдере неједнакости на сваку суму:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i (a_i + b_i)^{p-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}, \\ \sum_{i=1}^n b_i (a_i + b_i)^{p-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Пошто је $(p-1)q = p$, сабирањем добијамо:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ако је $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p = 0$, онда је, због $a_i, b_i \geq 0$ за $1 \leq i \leq n$, нужно $a_i = b_i = 0$

за свако i , па је тврђење очигледно. Претпоставимо зато да је $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p > 0$.

Дељењем са $\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/q} > 0$ следи тврђење. $\square$

Напомена. За произвољне реалне бројеве a_i, b_i , $1 \leq i \leq n$, из неједнакости $|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i|$ и управо доказане Минковскијеве неједнакости за ненегативне бројеве следи општи облик

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тиме је оправдана и каснија геометријска интерпретација у $\mathbb{R}^3$.

Теорема 3.33 (Друга Минковскијева неједнакост). *Нека су $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ позитивни реални бројеви и $p > 1$. Тада важи*

$$\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^p + \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^n (a_i^p + b_i^p)^{\frac{1}{p}},$$

са једнакошћу ако и само ако је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Доказ. Функција $f(x) = (1 + x^p)^{1/p}$ за $p > 1$ строго је конвексна на $\mathbb{R}^+$, јер је $f''(x) > 0$.

Применом Јенсенове неједнакости са тежинама $m_i = a_i$ и тачкама $x_i = \frac{b_i}{a_i}$ добијамо

$$\left(1 + \left(\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\right)^p\right)^{1/p} \leq \frac{\sum m_i (1 + x_i^p)^{1/p}}{\sum m_i},$$

тј.

$$\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^p + \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^p\right]^{1/p} \leq \sum_{i=1}^n (a_i^p + b_i^p)^{1/p}.$$

Пошто је функција $f(x) = (1 + x^p)^{1/p}$ строго конвексна, а све тежине a_i су позитивне, једнакост у Јенсеновој неједнакости важи ако и само ако су све тачке $\frac{b_i}{a_i}$, $1 \leq i \leq n$, једнаке. То је еквивалентно услову $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. $\square$

Теорема 3.34 (Трећа Минковскијева неједнакост). *Нека су $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ позитивни реални бројеви. Тада важи*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)},$$

са једнакошћу ако и само ако је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Доказ. Функција $f(x) = \ln(1 + e^x)$ је строго конвексна на $\mathbb{R}$ јер је $f''(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$.

Применом Јенсенове неједнакости са $\lambda_i = \frac{1}{n}$ и $x_i = \ln \frac{b_i}{a_i}$:

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{b_i}{a_i}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\ln \frac{b_i}{a_i}\right),$$

тј.

$$\ln\left(1 + \frac{\sqrt[n]{\prod b_i}}{\sqrt[n]{\prod a_i}}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{a_i + b_i}{a_i} = \ln \sqrt[n]{\frac{\prod (a_i + b_i)}{\prod a_i}}.$$

Потенцирањем и множењем са $\sqrt[n]{\prod a_i}$ добијамо тврђење.

Због строге конвексности функције $f(x) = \ln(1 + e^x)$, једнакост важи ако и само ако су сви бројеви $\ln \frac{b_i}{a_i}$, $1 \leq i \leq n$, једнаки, односно ако и само ако је $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. $\square$

Минковскијева неједнакост за интеграле

Теорема 3.35 (Интегрална Минковскијева неједнакост). Нека је $p \geq 1$ и нека су $f, g \in L^p([a, b])$. Тада важи

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

тј. $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Доказ. За $p = 1$ тврђење следи непосредно из неједнакости $|f + g| \leq |f| + |g|$ и монотоности интеграла.

Нека је сада $p > 1$ и нека је q спрегнут са p , тј. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ако је $\|f + g\|_p = 0$, тврђење је очигледно, јер је десна страна ненегативна. Претпоставимо зато да је $\|f + g\|_p > 0$.

Из $|f + g|^p = |f + g| |f + g|^{p-1} \leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1}$ интеграљењем добијамо

$$\int_a^b |f + g|^p \leq \int_a^b |f| |f + g|^{p-1} + \int_a^b |g| |f + g|^{p-1}.$$

На сваки сабирак са десне стране применимо интегралну Хелдерову неједнакост (Теорема 3.24). Пошто је $(p-1)q = p$, важи

$$\left(\int_a^b |f + g|^{(p-1)q} \right)^{1/q} = \left(\int_a^b |f + g|^p \right)^{1/q} = \|f + g\|_p^{p-1},$$

па је

$$\int_a^b |f + g|^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}.$$

Дељењем са $\|f + g\|_p^{p-1} > 0$ следи тврђење. $\square$

Геометријска интерпретација и веза са L^p просторима

Минковскијева неједнакост добија посебан значај у контексту функционалних простора.

Напомена. За $p = 2$ и $n = 3$, Прва Минковскијева неједнакост $\left(\sum_{i=1}^3 (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} \leq$

$\left(\sum_{i=1}^3 a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^3 b_i^2 \right)^{1/2}$ постаје добро позната *неједнакост троугла* у $\mathbb{R}^3$: $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$. У општем случају, Минковскијева неједнакост за интеграле гарантује да је $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ у Лебеговим просторима L^p , тј. да је троугаона неједнакост задовољена и да је $\|\cdot\|_p$ заиста норма.

Веза са L^p просторима и метричким просторима

Минковскијева неједнакост добија посебан значај у апстрактној анализи кроз теорију L^p простора.

Дефиниција 3.36. За мерљиву функцију $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $p \geq 1$ дефинишемо

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Пошто је $\|f\|_p = 0$ ако и само ако је $f = 0$ скоро свуда, на скупу мерљивих функција $\|\cdot\|_p$ је само полунорма. Зато функције једнаке скоро свуда поистовећујемо: Лебегов простор $L^p([a, b])$ је скуп класа еквиваленције мерљивих функција са коначном вредношћу $\|f\|_p$, а $\|\cdot\|_p$ називамо L^p нормом.

Теорема 3.37 (L^p норма је норма). За $p \geq 1$ пресликавање $f \mapsto \|f\|_p$ јесте норма на простору $L^p([a, b])$. Конкретно, важи троугаона неједнакост

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

која је управо интегрална Минковскијева неједнакост (Теорема 3.35).

Напомена. Лебегови простори L^p су Банахови простори, тј. потпуни нормирани векторски простори. Минковскијева неједнакост доказује троугаону неједнакост, али не и потпуност — то је посебна теорема, коју наводимо као познат резултат [5]. За $1 < p < \infty$ Хелдерова неједнакост обезбеђује да је дуално упаривање простора L^p и L^q добро дефинисано, а за $p = q = 2$ и скаларни производ, па је L^2 уједно и Хилбертов простор.

За дискретни случај одговарајући простори су ℓ^p — простори низова $(a_1, a_2, \dots)$ са коначном нормом $\|(a_i)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p}$, и Минковскијева неједнакост гарантује да је ово заиста норма.

Пример 3.38. Доказати да за позитивне a, b, c важи

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(a + b + c).$$

Решење. Посматрајмо векторе

$$u = (a, b), \quad v = (b, c), \quad w = (c, a)$$

у простору $\mathbb{R}^2$. Минковскијева неједнакост за $p = 2$, тј. троугаона неједнакост за еуклидску норму, даје

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} &= \|u\|_2 + \|v\|_2 + \|w\|_2 \\ &\geq \|u + v + w\|_2 \\ &= \|(a + b + c, a + b + c)\|_2 = \sqrt{2}(a + b + c).\end{aligned}$$

Једнакост важи ако и само ако су вектори u , v и w позитивно пропорционални, тј. за $a = b = c$.

Пример 3.39. Нека су $a_i, b_i > 0$ за $i = 1, \dots, n$. Доказати да је

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n b_i} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (a_i + b_i)}.$$

Решење. Непосредно следи из Треће Минковскијево неједнакости (Теорема 3.34).

Пример 3.40. Доказати да за $p > 1$ и позитивне $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ важи једнакост у Минковскијевој неједнакости ако и само ако су низови пропорционални, и показати да за $p = 2$, $n = 3$ добијамо троугаону неједнакост у $\mathbb{R}^3$.

Решење. Из доказа Прве Минковскијево неједнакости, једнакост важи ако и само ако у свакој примени Хелдерево неједнакости важи једнакост, тј. ако је $\frac{a_i}{a_i + b_i} = \text{const}$, одакле следи $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

За $p = 2$ и $n = 3$ посматрајмо векторе $u = (u_1, u_2, u_3)$ и $v = (v_1, v_2, v_3)$ са произвољним реалним координатама. Тада Минковскијева неједнакост гласи

$$\|u + v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2,$$

а геометријски је

$$d(\mathbf{0}, u + v) \leq d(\mathbf{0}, u) + d(u, u + v) = d(\mathbf{0}, u) + d(\mathbf{0}, v),$$

што је управо неједнакост троугла у $\mathbb{R}^3$ за темена $\mathbf{0}$, u и $u + v$. Једнакост важи ако и само ако су вектори u и v позитивно линеарно зависни, тј. ако је један од њих нула-вектор или ако постоји $\lambda > 0$ такво да је $v = \lambda u$.

Глава 4

Варијације и несиметрични облици неједнакости

У претходној глави изложили смо Хелдерову и Минковскијеву неједнакост у њиховим „стандардним” облицима за $p > 1$. Међутим, ове неједнакости имају занимљиве аналоге и за $0 < p < 1$, где се смер неједнакости обрће. Поред тога, постоји низ важних неједнакости које представљају варијације и уопштења класичних резултата — Петровићеве, Караматине и Шурове неједнакости — које налазе широку примену у такмичарској математици, теорији вероватноће и теорији информација.

4.1 Обрнута Хелдерова и Минковскијева неједнакост

Теорема 4.1 (Обрнута Хелдерова неједнакост). *Нека су $a_1, \dots, a_n$ ненегативни и $b_1, \dots, b_n$ позитивни реални бројеви и нека су p, q такви да је $0 < p < 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, одакле је $q = \frac{p}{p-1} < 0$. Тада важи*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

са једнакошћу ако и само ако постоји $\lambda \geq 0$ такво да је $a_i^p = \lambda b_i^q$ за свако $i = 1, \dots, n$.

Доказ. Приметимо најпре да претпоставка $b_i > 0$ мора бити испуњена, јер је $q < 0$, па степен b_i^q није дефинисан за $b_i = 0$.

Пође се од идентитета

$$a_i^p = (a_i b_i)^p (b_i^q)^{1-p},$$

који се проверава непосредно: десна страна једнака је $a_i^p b_i^{p+q(1-p)}$, а из $q = \frac{p}{p-1}$ следи $q(1-p) = -p$, па је експонент уз b_i једнак нули.

Пошто је $0 < p < 1$, бројеви $\frac{1}{p}$ и $\frac{1}{1-p}$ већи су од 1 и спрегнути су, јер је $p + (1-p) = 1$. Применом стандардне Хелдере неједнакости (Теорема 3.23) на низове $((a_i b_i)^p)$ и $((b_i^q)^{1-p})$ са тим експонентима добијамо

$$\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n (a_i b_i)^p (b_i^q)^{1-p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^p \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1-p}.$$

Степеновањем са $\frac{1}{p} > 0$ следи

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1-p}{p}}.$$

Пошто је $\frac{1-p}{p} = -\frac{1}{q}$, дељењем са $(\sum b_i^q)^{-1/q} > 0$ добијамо тврђење.

У примењеној Хелдеровој неједнакости једнакост важи ако и само ако постоји константа $c \geq 0$ таква да је $a_i b_i = c b_i^q$ за свако $i = 1, \dots, n$. Пошто је $b_i > 0$ за $1 \leq i \leq n$, овај услов је еквивалентан постојању броја $\lambda \geq 0$ таквог да је $a_i^p = \lambda b_i^q$ за свако $i = 1, \dots, n$. $\square$

Напомена. За $0 < p < 1$ скуп низова са коначном вредношћу $\left(\sum |a_i|^p \right)^{1/p}$ није нормиран простор, јер троугаона неједнакост не важи — то потврђује обрнута Минковскијева неједнакост.

Теорема 4.2 (Обрнута Минковскијева неједнакост). *Нека су $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ позитивни реални бројеви и $0 < p < 1$. Тада важи*

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказ. Означимо

$$A = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p}, \quad B = \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p}, \quad C = \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p}.$$

Пошто је $0 < p < 1$, спрегнути експонент $q = \frac{p}{p-1}$ је негативан, а бројеви $(a_i + b_i)^{p-1}$ су позитивни, па се на низове (a_i) и $((a_i + b_i)^{p-1})$ може применити обрнута Хелдјева неједнакост (Теорема 4.1). Пошто је $(p-1)q = p$, добијамо

$$\sum_{i=1}^n a_i (a_i + b_i)^{p-1} \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/q} = A C^{p-1},$$

јер је $\frac{p}{q} = p-1$. Аналогно је

$$\sum_{i=1}^n b_i (a_i + b_i)^{p-1} \geq B C^{p-1}.$$

Сабирањем ових неједнакости следи

$$C^p = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^n a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i (a_i + b_i)^{p-1} \geq (A + B) C^{p-1},$$

па дељењем са $C^{p-1} > 0$ добијамо $C \geq A + B$. □

Пример 4.3. Доказати да за $a, b > 0$ и $0 < p < 1$ важи

$$(a^p + b^p)^{1/p} \geq (a^2 + b^2)^{1/2}.$$

Решење. Ставимо

$$r = \frac{2}{p} > 1, \quad u = a^p, \quad v = b^p.$$

За позитивне бројеве u, v и $r > 1$ важи

$$(u + v)^r \geq u^r + v^r,$$

јер је $\left(\frac{u}{u+v} \right)^r + \left(\frac{v}{u+v} \right)^r \leq \frac{u}{u+v} + \frac{v}{u+v} = 1$, пошто су обе основе у интервалу $(0, 1)$, а функција $t \mapsto t^r$ на том интервалу задовољава $t^r \leq t$ за $r > 1$.

Заменом $u = a^p$, $v = b^p$ и $r = \frac{2}{p}$ добијамо

$$(a^p + b^p)^{2/p} \geq a^2 + b^2,$$

па кореновањем следи

$$(a^p + b^p)^{1/p} \geq (a^2 + b^2)^{1/2}.$$

4.2 Петровићева неједнакост

Михаило Петровић Алас (1868–1943) био је српски математичар и оснивач модерне српске математике. Доктор је наука Универзитета у Паризу (1894), где је студирао код Шарла Ермита. Поред математике, познат је и као страствени рибар — тај надимак „Алас” добио је управо по риболову. Неједнакост коју је открио, у комбинацији са Јенсеновом, даје двострану оцену суме вредности конвексне функције [10].

Теорема 4.4 (Петровићева неједнакост). *Нека је $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција и нека су $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$. Тада важи*

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (n-1)f(0).$$

Доказ. Означимо $s = \sum_{i=1}^n x_i$. Ако је $s = 0$, тада је $x_i = 0$ за свако i , $1 \leq i \leq n$, па су обе стране неједнакости једнаке $nf(0)$. Претпоставимо зато да је $s > 0$ и ставимо $\lambda_i = \frac{x_i}{s}$, па је $\sum \lambda_i = 1$ и $x_i = (1 - \lambda_i) \cdot 0 + \lambda_i \cdot s$. Из конвексности f :

$$f(x_i) \leq (1 - \lambda_i)f(0) + \lambda_i f(s).$$

Сабирањем по $i = 1, \dots, n$:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \leq \left(n - \sum \lambda_i\right) f(0) + \left(\sum \lambda_i\right) f(s) = (n-1)f(0) + f(s). \quad \square$$

Напомена. Петровићева и Јенсенова заједно дају двострану оцену:

$$f\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) \leq \frac{\sum f(x_i)}{n} \leq \frac{f(\sum x_i) + (n-1)f(0)}{n}.$$

Пример 4.5. Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ такви да је $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Доказати да је

$$\sum_{i=1}^n e^{a_i} \leq e + n - 1.$$

Решење. Функција $f(x) = e^x$ је конвексна на $[0, +\infty)$ и важи $f(0) = 1$. Применом Петровићеве неједнакости (Теорема 4.4) непосредно добијамо

$$\sum_{i=1}^n e^{a_i} \leq e^{a_1 + \dots + a_n} + (n-1)e^0 = e + n - 1.$$

Једнакост се достиже када је један од бројева a_i једнак 1, а сви остали једнаки нули. Ако се захтева $a_i > 0$ за свако i и $n \geq 2$, неједнакост је строга.

Напомена. Нека је $n \geq 2$, нека су $0 \leq a_i < 1$ за $i = 1, \dots, n$ и нека је $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

За израз $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-a_i}$ тада важи супротна оцена, која следи из Јенсенове, а не из Петровићеве неједнакости: пошто је функција $g(x) = \frac{x}{1-x}$ конвексна на $[0, 1)$, Јенсенова неједнакост даје

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-a_i} \geq g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n-1}, \quad \text{тј.} \quad \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-a_i} \geq \frac{n}{n-1}.$$

4.3 Караматина неједнакост

Јован Карамата (1902–1967) био је српски математичар и члан САНУ. Неједнакост коју је открио 1932. године представља далекосежно уопштење Јенсенове — уместо тежина, она користи концепт мајоризације низова [7].

Дефиниција 4.6 (Мајоризација). Низ $a = (a_1, \dots, a_n)$ мајорира низ $b = (b_1, \dots, b_n)$, у ознаци $a \succ b$, ако после уређивања оба опадајуће важи:

1. $\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i$ за свако $k = 1, \dots, n-1$,
2. $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$.

Пример 4.7. За углове троугла: $(\pi, 0, 0) \succ (\alpha, \beta, \gamma) \succ (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

Лема 4.8 (T -трансформације). Нека су $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ низови реалних бројева такви да је $a \succ b$. Тада се низ b може добити из низа a применом коначно многе операција у којима се два члана u и v замењују бројевима

$$\lambda u + (1-\lambda)v, \quad (1-\lambda)u + \lambda v, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

док остали чланови остају непромењени [3].

Теорема 4.9 (Караматина неједнакост). Нека је $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција и нека су $a \succ b$ низови из (α, β) . Тада

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) \geq \sum_{i=1}^n f(b_i).$$

Доказ. Посматрајмо једну операцију из Леме 4.8, у којој се чланови u и v замењују бројевима $u' = \lambda u + (1 - \lambda)v$ и $v' = (1 - \lambda)u + \lambda v$. Из конвексности функције f следи

$$f(u') \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v), \quad f(v') \leq (1 - \lambda)f(u) + \lambda f(v),$$

па сабирањем добијамо

$$f(u') + f(v') \leq f(u) + f(v).$$

Дакле, свака таква операција не повећава збир вредности функције f по члановима низа, а остале чланове не мења.

По Леми 4.8 низ b се добија из низа a применом коначно много таквих операција, па итерацијом претходне неједнакости следи

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) \geq \sum_{i=1}^n f(b_i). \quad \square$$

Напомена. Јенсенова неједнакост са једнаким тежинама специјалан је случај Караматине неједнакости: ако је $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, тада је

$$(x_1, \dots, x_n) \succ (\bar{x}, \dots, \bar{x}),$$

па из Караматине неједнакости следи

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \geq f(\bar{x}).$$

Пример 4.10. За углове троугла α, β, γ важи $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Решење. $f(x) = -\sin x$ је конвексна на $(0, \pi)$. Пошто $(\alpha, \beta, \gamma) \succ (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, из Караматине неједнакости: $\sum (-\sin \alpha) \geq 3 \cdot (-\sin \frac{\pi}{3})$, тј. $\sum \sin \alpha \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Поповичуова неједнакост

Снажно уопштење Јенсенове неједнакости дао је румунски математичар **Тибер Поповичу** 1965. године. Оно се најприродније доказује помоћу Караматине неједнакости.

Теорема 4.11 (Поповичуова неједнакост). *Нека је $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција. Тада за свако $x, y, z \in [a, b]$ важи*

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} \geq \frac{2}{3} \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right].$$

ГЛАВА 4. ВАРИЈАЦИЈЕ И НЕСИМЕТРИЧНИ ОБЛИЦИ НЕЈЕДНАКОСТИ

Доказ. Означимо $s = \frac{x+y+z}{3}$. Множењем тражене неједнакости са 3 види се да је она еквивалентна са

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f(s) \geq 2 \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right],$$

тј. са тврђењем да је збир вредности функције f у члановима шесторке

$$A = (x, y, z, s, s, s)$$

не мањи од збира вредности у члановима шесторке

$$B = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}, \frac{z+x}{2} \right).$$

По Караматиној неједнакости (Теорема 4.9) довољно је показати да $A \succ B$. Пошто су обе шесторке симетричне у односу на пермутације бројева x, y, z , без умањења општости узимамо $x \geq y \geq z$. Сви чланови обеју шесторки припадају интервалу $[a, b]$, јер су конвексне комбинације бројева x, y, z .

Збирови су једнаки:

$$x + y + z + 3s = 6s, \quad 2 \cdot \frac{x+y}{2} + 2 \cdot \frac{y+z}{2} + 2 \cdot \frac{z+x}{2} = 2(x+y+z) = 6s.$$

Из $x \geq y \geq z$ следи да је опадајуће уређење шесторке B

$$\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, \frac{x+z}{2}, \frac{x+z}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2},$$

док уређење шесторке A зависи од положаја броја y у односу на s . Приметимо да је

$$y \geq s \iff 3y \geq x+y+z \iff 2y \geq x+z.$$

Случај $2y \geq x+z$. Тада је $x \geq y \geq s \geq z$, па је опадајуће уређење шесторке A дато са (x, y, s, s, s, z) . Парцијалне суме редом задовољавају:

$$x \geq \frac{x+y}{2}, \quad x+y = x+y, \quad s \geq \frac{x+z}{2}, \quad 2s \geq x+z,$$

где последње две неједнакости следе управо из $2y \geq x+z$; за $k=5$ разлика парцијалних сума износи $\frac{y-z}{2} \geq 0$, а за $k=6$ суме су једнаке.

Случај $2y < x+z$. Тада је $x \geq s > y \geq z$, па је опадајуће уређење шесторке A дато са (x, s, s, s, y, z) . Сада је

$$x \geq \frac{x+y}{2}, \quad x+s \geq x+y, \quad 2s-y-\frac{x+z}{2} = \frac{(x+z)-2y}{6} \geq 0,$$

за $k = 4$ парцијалне суме су једнаке ($x + 3s = 2x + y + z$), за $k = 5$ разлика износи $\frac{y - z}{2} \geq 0$, а за $k = 6$ суме су једнаке.

У оба случаја је $A \succ B$, па Караматина неједнакост даје тражено тврђење. $\square$

Напомена. Поповичуова неједнакост је јача од Јенсенове за три тачке. Она је нарочито корисна у такмичарској математици када директна примена Јенсенове неједнакости не даје довољно добру оцену.

4.4 Шурова неједнакост

Ишај Шур (1875–1941) био је немачки математичар рођен у Белорусији. Неједнакост која носи његово име представља моћан алат у доказивању симетричних неједнакости са три променљиве [8].

Теорема 4.12 (Шурова неједнакост). *Нека су $x, y, z \geq 0$ и $t > 0$. Тада важи*

$$x^t(x - y)(x - z) + y^t(y - x)(y - z) + z^t(z - x)(z - y) \geq 0,$$

са једнакошћу ако и само ако је $x = y = z$ или је (x, y, z) пермутација тројке $(a, a, 0)$ за неко $a \geq 0$.

Доказ. Пошто је лева страна симетрична у односу на пермутације променљивих, без умањења општости нека је $x \geq y \geq z \geq 0$. Трећи сабирак је ненегативан, јер је $z - x \leq 0$ и $z - y \leq 0$, па је

$$z^t(z - x)(z - y) \geq 0.$$

Збир прва два сабирка можемо записати као

$$x^t(x - y)(x - z) + y^t(y - x)(y - z) = (x - y)[x^t(x - z) - y^t(y - z)] \geq 0,$$

јер је $x - y \geq 0$, а из $x \geq y \geq z$ следи $x^t \geq y^t$ и $x - z \geq y - z \geq 0$, одакле $x^t(x - z) \geq y^t(y - z)$. Тиме је неједнакост доказана.

Испитајмо сада када важи једнакост. Она захтева да оба разматрана израза буду једнака нули.

Ако је $z > 0$, из $z^t(z - x)(z - y) = 0$ следи $x = z$ или $y = z$; у оба случаја, због $x \geq y \geq z$, добијамо $x = y = z$.

Ако је $z = 0$, први услов је аутоматски испуњен, па остаје $(x - y)[x^t \cdot x - y^t \cdot y] = 0$, тј. $(x - y)(x^{t+1} - y^{t+1}) = 0$. Пошто је функција $s \mapsto s^{t+1}$ строго растућа на $[0, +\infty)$, то је еквивалентно са $x = y$. Дакле, тада је $(x, y, z) = (a, a, 0)$ за $a = x \geq 0$.

Обрнуто, у оба наведена случаја непосредном заменом добија се једнакост. $\square$

Последица 4.13. За $t = 1$ Шурова неједнакост еквивалентна је са

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x),$$

односно, у симетричном облику, са

$$(x + y + z)^3 + 9xyz \geq 4(x + y + z)(xy + yz + zx).$$

Пример 4.14. Нека су $a, b, c > 0$ такви да је $a + b + c = 1$. Доказати да је

$$ab + bc + ca \leq \frac{1 + 9abc}{4}.$$

Решење. Означимо $q = ab + bc + ca$ и $r = abc$. Шурова неједнакост за $t = 1$ (Последица 4.13) у симетричном облику гласи

$$(a + b + c)^3 + 9abc \geq 4(a + b + c)(ab + bc + ca).$$

Пошто је $a + b + c = 1$, одатле следи

$$1 + 9r \geq 4q,$$

тј. $q \leq \frac{1 + 9r}{4}$, што је управо тражена неједнакост. Једнакост важи за $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Глава 5

Веза класичних и елементарних неједнакости

У претходним главама изложили смо низ неједнакости — елементарних (АМ–ГМ, Коши–Шварц), класичних (Јенсенова, Хелдерова, Минковскијева) и варијација (Караматина, Петровићева, Шурова). На први поглед, ови резултати делују као засебна острва. Циљ ове главе је да покаже да међу њима постоје дубоке везе: велики број изложених резултата може се извести из неколико централних неједнакости, међу којима Јенсенова заузима посебно место.

5.1 Хијерархија неједнакости — општа слика

Следећа шема приказује неке од најважнијих веза између неједнакости изложених у овом раду. Стрелица $A \rightarrow B$ означава да из неједнакости A непосредно следи неједнакост B (или да је B специјалан случај A).



Напомена. Ова шема представља избор важних веза, а не потпуну генеологију свих неједнакости изложених у раду. Јенсенова неједнакост даје АМ-ГМ неједнакост, неједнакости између средина и више сродних резултата, док се ХелдEROVA неједнакост изводи преко Јангове. Обична АМ-ГМ неједнакост посебан је случај тежинске АМ-ГМ неједнакости, а веза тежинске АМ-ГМ и Јангове неједнакости је непосредна: применом тежинске АМ-ГМ неједнакости на бројеве a^p и b^q са тежинама $\frac{1}{p}$ и $\frac{1}{q}$ добија се

$$ab = (a^p)^{1/p}(b^q)^{1/q} \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Караматина неједнакост (Глава 4) представља директно уопштење Јенсенове, а Петровићева је независан резултат повезан са Јенсеновом двостраном оценом. Са друге стране, Шурова неједнакост, неједнакост о преуређивању и обрнуте неједнакости не припадају овој линији извођења, него стоје самостално.

5.2 Елементарне неједнакости као специјални случајеви

У овом одељку показујемо конкретно како елементарне неједнакости из Главе 2 произилазе из класичних резултата Главе 3.

АМ–ГМ из Јенсенове неједнакости

Теорема 5.1. *Неједнакости аритметичке и геометријске средине (Теорема 2.4) следи из Јенсенове неједнакости.*

Доказ. Функција $f(x) = -\ln x$ је строго конвексна на $(0, +\infty)$ јер је $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. Применом Јенсенове неједнакости са тежинама $\lambda_i = \frac{1}{n}$:

$$-\ln\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln a_i = -\ln \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

Пошто је $-\ln$ опадајућа функција, следи $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$. $\square$

Коши–Шварцова неједнакост из Хелдерове

Теорема 5.2. *Коши–Шварцова неједнакост (Теорема 2.13) је специјалан случај Хелдерове неједнакости за $p = q = 2$.*

Доказ. Ставимо $p = q = 2$ у Хелдеровој неједнакости (Теорема 3.23), примењеној на низове $(|a_i|)$ и $(|b_i|)$:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}.$$

Квадрирањем крајњих чланова добијамо управо Коши–Шварцову неједнакост. Услов једнакости такође се поклапа. $\square$

Хијерархија средина из Јенсенове неједнакости

Показали смо у Глави 3 да хијерархија $H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n$ следи из Јенсенове примењене на одговарајуће конвексне функције. Ради прегледности, сажимамо те резултате у следећу табелу.

Неједнакост	Функција	Елементарни доказ
$G_n \leq A_n$	$f(x) = -\ln x$	индукција, Теорема 2.4
$A_n \leq K_n$	$f(x) = x^2$	Коши–Шварц
$H_n \leq G_n$	$f(x) = -\ln x, x_i \rightarrow \frac{1}{x_i}$	АМ–ГМ на $\frac{1}{a_i}$

Напомена. Табела показује дубину Јенсенове неједнакости: три различите неједнакости са три различита елементарна доказа свODE се на исту идеју — примену Јенсенове неједнакости на одговарајућу конвексну функцију.

5.3 Степене средине и уопштена хијерархија

Хијерархија $H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n$ је само видљиви врх леденог брега. Постоји потпуно уопштење које обједињује све ове средине у јединствену породицу.

Дефиниција 5.3 (Степена средина реда s). За позитивне реалне бројеве $a_1, \dots, a_n$ и реалан број s дефинишемо *сшeйену средину реда s* :

$$M_s = M_s(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \left(\frac{a_1^s + a_2^s + \dots + a_n^s}{n} \right)^{1/s} & s \neq 0, \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} & s = 0. \end{cases}$$

Напомена. Стандардне средине одговарају посебним вредностима s :

$$H_n = M_{-1}, \quad G_n = M_0, \quad A_n = M_1, \quad K_n = M_2.$$

Граничне вредности такође имају природну интерпретацију:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} M_s = \max\{a_1, \dots, a_n\}, \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} M_s = \min\{a_1, \dots, a_n\}.$$

Вредност у $s = 0$ је гранична вредност: $\lim_{s \rightarrow 0} M_s = G_n$, тј. дефиниција у $s = 0$ је непрекидно уклопљена у породицу.

Теорема 5.4 (Монотоност степених средина). *Нека су $a_1, \dots, a_n > 0$. Ако је $r \leq s$, вага је*

$$M_r \leq M_s.$$

Ако је $r = s$, једнакости вага за сваки избор бројева; ако је $r < s$, једнакости вага ако и само ако је $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ [2].

Доказ. За $r = s$ тврђење је тривијално, па претпоставимо $r < s$.

Случај 1: $M_t \geq M_0$ и $M_0 \geq M_{-t}$ за $t > 0$.

Показаћемо $M_t \geq M_0$, тј. $\left(\frac{\sum a_i^t}{n} \right)^{1/t} \geq \sqrt[n]{\prod a_i}$. Логаритмовањем је ово еквивалентно са

$$\frac{1}{t} \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^t \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln a_i.$$

Пошто је $\ln x$ строго конкавна функција, из Јенсенове неједнакости за конкавне функције са $\lambda_i = \frac{1}{n}$ и тачкама $x_i = a_i^t > 0$ следи

$$\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^t \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i^t) = \frac{t}{n} \sum_{i=1}^n \ln a_i,$$

а дељењем са $t > 0$ добијамо $M_t \geq M_0$. Због строге конкавности функције $\ln x$, једнакост важи ако и само ако су сви бројеви a_i^t међусобно једнаки, тј. ако је $a_1 = \dots = a_n$.

За $M_0 \geq M_{-t}$ применимо доказано на бројеве $b_i = \frac{1}{a_i}$. Добијамо $M_t(b) \geq M_0(b)$, тј.

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^{-t} \right)^{1/t} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{\prod a_i}},$$

одакле степеновањем са -1 (чиме се смер неједнакости обрће) следи $M_{-t} \leq M_0$.

Случај 2: $0 < r < s$.

Потребно је доказати

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^s \right)^{r/s} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^r.$$

Пошто је $0 < \frac{r}{s} < 1$, функција $f(x) = x^{r/s}$ строго је конкавна на $(0, +\infty)$. Из Јенсенове неједнакости за конкавну функцију, примењене на тачке $x_i = a_i^s$ са тежинама $\frac{1}{n}$, добијамо

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^s \right)^{r/s} = f \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^s \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i^s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^r.$$

Степеновањем са $\frac{1}{r} > 0$ следи $M_s \geq M_r$, а једнакост, због строге конкавности, важи ако и само ако је $a_1 = \dots = a_n$.

Случај 3: $r < s < 0$.

Ставимо $b_i = \frac{1}{a_i}$. Тада је $0 < -s < -r$, па по Случају 2 важи $M_{-r}(b) \geq M_{-s}(b)$. Пошто је $M_t(b) = \frac{1}{M_{-t}(a)}$ за свако $t \neq 0$, одатле следи

$$\frac{1}{M_r(a)} \geq \frac{1}{M_s(a)}, \quad \text{тј.} \quad M_r \leq M_s.$$

Случај 4: $r < 0 < s$.

По Случају 1 важи $M_r \leq M_0$ и $M_0 \leq M_s$, одакле непосредно следи $M_r \leq M_s$. Исто важи и када је $r = 0 < s$ или $r < 0 = s$.

У свим случајевима једнакост је могућа само када су сви бројеви a_i међусобно једнаки, а тада заиста важи $M_r = M_s$. $\square$

Напомена. Теорема 5.4 обједињује хијерархију $H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n$ у јединствен резултат: $M_{-1} \leq M_0 \leq M_1 \leq M_2$. Специјалним избором r и s добијамо:

- $r = 0, s = 1$: АМ–ГМ неједнакост
- $r = -1, s = 0$: ГМ–ХМ неједнакост
- $r = 1, s = 2$: АМ–КА неједнакост
- $r \rightarrow -\infty, s \rightarrow +\infty$: $\min \leq M_s \leq \max$

Пример 5.5. Доказати да за сваки природан број n важи

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n(n+1)/2} \leq 1^1 \cdot 2^2 \cdots n^n \leq \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{n(n+1)/2}.$$

Решење. Означимо $S = \frac{n(n+1)}{2}$ и ставимо $\lambda_i = \frac{i}{S}$ за $i = 1, \dots, n$. Тада је $\sum \lambda_i = 1$, па су λ_i тежине.

Тежинска ГМ:

$$1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n} = 1^{1/S} \cdot 2^{2/S} \cdots n^{n/S} = (1^1 \cdot 2^2 \cdots n^n)^{1/S}.$$

Тежинска АМ:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot i = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{S} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}.$$

Тежинска ХМ:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{i}} = \frac{S}{\sum_{i=1}^n 1} = \frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

Из хијерархије $H \leq G \leq A$, тј. $\frac{n+1}{2} \leq (1^1 \cdot 2^2 \cdots n^n)^{1/S} \leq \frac{2n+1}{3}$, потенцирањем са S следе обе неједнакости.

5.4 Исти задатак, различите методе

Један од најважнијих увида у теорији неједнакости јесте да исти резултат често може бити доказан различитим методама — елементарном (АМ–ГМ, Коши–Шварц) или класичном (Хелдер, Јенсен). Поређење ових приступа открива предности и ограничења сваке методе.

Пример 5.6. Доказати да за позитивне a, b, c важи

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

Метод 1 (АМ–ГМ): Из АМ–ГМ следи $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a$, аналогно за остале парове.

Сабирањем и скраћивањем: $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$.

Метод 2 (Коши–Шварц, Енгелов облик): Из Последице 2.14:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a + b + c} = a + b + c.$$

Поређење: Метод 1 захтева конструктиван увид у разбијање. Метод 2 је систематскији — Енгелов облик се примењује директно без додатних идеја.

Пример 5.7 (ИМО 1995, задатак 2 — два приступа). Нека су $a, b, c > 0$ и $abc = 1$. Доказати да је

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Метод 1 (Коши–Шварц): Заменом $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ неједнакост постаје $L = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$. Из Енгеловог облика (Последица 2.14):

$$L \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Метод 2 (Хелдерова неједнакост за $p = q = 2$): Са истом заменом, применимо Хелдерову неједнакост у случају $p = q = 2$, тј. Коши–Шварцову неједнакост, али записану у облику који истиче ту везу:

$$(x+y+z)^2 = \left(\sum_{\text{сyc}} \frac{x}{\sqrt{y+z}} \sqrt{y+z} \right)^2 \leq \left(\sum_{\text{сyc}} \frac{x^2}{y+z} \right) ((y+z) + (z+x) + (x+y)) = 2(x+y+z) L.$$

Зато је

$$L \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2},$$

јер је $xyz = 1$.

Поређење: Оба метода дају исту оцену $\frac{3}{2}$, која је најбоља могућа — за $x = y = z = 1$ важи једнакост $L = \frac{3}{2}$. Други поступак, дакле, не даје оптрију константу, већ показује да је Енгелов облик управо случај Хелдерове неједнакости за $p = q = 2$.

Глава 6

Примена класичних неједнакости

Класичне неједнакости нису само теоријска достигнућа — оне су свакодневни алат математичара аналитичара, предавача и такмичара. У овој глави приказујемо три аспекта њихове примене: у математичкој анализи, у такмичарској математици и у настави.

6.1 Примена у анализи функција, интеграла и сума

Оцена интеграла

Хелдерова неједнакост за интеграле (Теорема 3.24) омогућава систематску оцену интеграла чија тачна вредност није лако израчунљива.

Пример 6.1. Оценити интеграл $I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$.

Решење. Применом Коши–Шварцове неједнакости за интеграле (специјалан случај Хелдерове за $p = q = 2$):

$$I = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} dx \leq \left(\int_0^1 x dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 (1-x) dx \right)^{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Тачна вредност је $I = \frac{\pi}{8}$, и заиста $\frac{\pi}{8} \approx 0,393 < 0,5$.

Пример 6.2. Доказати да за $p > 1$ важи

$$\int_0^1 x^{1/p} (1-x)^{1/q} dx \leq \frac{1}{2},$$

где је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Решење. Из Хелдјерове неједнакости за интеграле:

$$\int_0^1 x^{1/p} (1-x)^{1/q} dx \leq \left(\int_0^1 x dx \right)^{1/p} \left(\int_0^1 (1-x) dx \right)^{1/q} = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/p} \left(\frac{1}{2} \right)^{1/q} = \frac{1}{2}.$$

Конвергенција редова

Пример 6.3. Доказати да за $p > 1$ и низ позитивних бројева (a_n) са $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$

ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ конвергира.

Решење. Нека је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Непосредном применом Хелдјерове неједнакости на низове (a_n) и $\left(\frac{1}{n}\right)$ добијамо, за свако $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n} \leq \left(\sum_{n=1}^N a_n^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^q} \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \right)^{1/q}.$$

Пошто је $q > 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ конвергира, па је десна страна коначна и не зависи од N . Дакле, парцијалне суме реда $\sum \frac{a_n}{n}$ ограничене су одозго, а пошто су сви сабирци позитивни, оне су и растуће. Растући и ограничен низ конвергира, па конвергира и посматрани ред.

Примена Јенсенове у теорији вероватноће

Интегрална Јенсенова неједнакост (Теорема 3.11) добија посебан значај у теорији вероватноће.

Напомена. Нека је X интеграбилна случајна променљива и f конвексна функција таква да је и $f(X)$ интеграбилна. Тада је

$$E[f(X)] \geq f(E[X]),$$

где E означава математичко очекивање. Ово је Јенсенова неједнакост за случајне променљиве и фундаменталан је резултат у теорији вероватноће и математичкој статистици. На пример, за $f(x) = x^2$ и $X \in L^2$ добијамо $E[X^2] \geq (E[X])^2$, тј. $\text{Var}(X) \geq 0$.

Пример 6.4. Доказати да за позитивну случајну променљиву X , за коју су X и $\ln X$ интеграбилне, важи $E[X] \geq e^{E[\ln X]}$.

Решење. Функција $f(x) = -\ln x$ је конвексна на $(0, +\infty)$, а из претпоставке $\ln X \in L^1$ следи да је $f(X)$ интеграбилна. Из Јенсенове неједнакости добијамо $E[-\ln X] \geq -\ln(E[X])$, тј. $\ln(E[X]) \geq E[\ln X]$, одакле потенцирањем следи тврђење. Ово је аналог АМ–ГМ неједнакости за случајне променљиве.

6.2 Улога у такмичарској математици

Неједнакости заузимају централно место у такмичарској математици. На Међународним математичким олимпијадама (ИМО), Балканским олимпијадама и државним такмичењима, задаци са неједнакостима редовно се јављају и захтевају добро познавање техника које смо развили у овом раду.

У наставку дајемо неколико одабраних задатака са коментарима о кључним техникама.

Пример 6.5 (ИМО 1983, задатак 6). Нека су a, b, c странице троугла. Доказати да је

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Решење. Пошто је израз цикличан, а не симетричан, не смо претпоставити поредак међу променљивама. Уместо тога користимо Равијеву смену: за странице троугла постоје $x, y, z > 0$ такви да је

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y.$$

После развијања и дељења позитивним бројем $2xyz$, тражена неједнакост постаје

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z.$$

Она непосредно следи из Енгеловог облика Коши–Шварцове неједнакости (Последица 2.14):

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z} = x+y+z.$$

Једнакост важи за $x = y = z$, тј. за једнакоугаони троугао.

Пример 6.6 (ИМО 2000, задатак 2). Нека су a, b, c позитивни реални бројеви са $abc = 1$. Доказати да је

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Решење. Пошто је $abc = 1$, постоје позитивни бројеви x, y, z такви да је

$$a = \frac{x}{y}, \quad b = \frac{y}{z}, \quad c = \frac{z}{x}.$$

Тада је

$$a - 1 + \frac{1}{b} = \frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y} = \frac{x + z - y}{y},$$

и аналогно за преостала два чиниоца, па је посматрани производ једнак

$$\frac{(x + z - y)(x + y - z)(y + z - x)}{xyz}.$$

Приметимо да највише један од три чиниоца у бројиоцу може бити непозитиван, јер је збир било која два од њих позитиван (на пример, $(x + z - y) + (x + y - z) = 2x > 0$).

Ако је један чинилац непозитиван, преостала два су позитивна, па је производ највише 0 и тврђење непосредно важи.

Ако су сва три чиниоца ненегативна, постоје $u, v, w \geq 0$ такви да је

$$x = u + v, \quad y = v + w, \quad z = w + u.$$

Тада је

$$\frac{(x + z - y)(x + y - z)(y + z - x)}{xyz} = \frac{8uvw}{(u + v)(v + w)(w + u)} \leq 1,$$

јер из АМ–ГМ неједнакости следи $u + v \geq 2\sqrt{uv}$, $v + w \geq 2\sqrt{vw}$ и $w + u \geq 2\sqrt{wu}$, па множењем

$$(u + v)(v + w)(w + u) \geq 8uvw.$$

Пример 6.7 (ИМО 2001, задатак 2). За позитивне реалне бројеве a, b, c доказати

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Решење. Означимо леву страну са S . Применом опште Хелдере неједнакости (Теорема 3.26) у трочланом облику, на низове

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}}\right), \quad \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}}\right), \quad (a(a^2 + 8bc)),$$

добијамо

$$S^2 \sum_{\text{cyc}} a(a^2 + 8bc) \geq (a + b + c)^3.$$

Са друге стране је

$$\sum_{\text{cyc}} a(a^2 + 8bc) = a^3 + b^3 + c^3 + 24abc,$$

а развијањем куба

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3 \sum_{\text{sym}} a^2b + 6abc.$$

Пошто из АМ–ГМ неједнакости следи $\sum_{\text{sym}} a^2b \geq 6abc$, важи

$$a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \leq (a + b + c)^3.$$

Отуда је $S^2(a + b + c)^3 \geq S^2 \sum_{\text{cyc}} a(a^2 + 8bc) \geq (a + b + c)^3$, тј. $S^2 \geq 1$, одакле $S \geq 1$. Једнакост важи за $a = b = c$.

Пример 6.8 (ИМО 2008, задатак 2, део (i)). Нека су $x, y, z \neq 1$ реални бројеви такви да је $xyz = 1$. Доказати да је

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

Решење. Ставимо

$$A = \frac{x}{x-1}, \quad B = \frac{y}{y-1}, \quad C = \frac{z}{z-1},$$

па је тражена неједнакост еквивалентна са $A^2 + B^2 + C^2 \geq 1$.

Из услова $xyz = 1$ следи веза

$$AB + BC + CA = A + B + C - 1.$$

Заиста, из $A = \frac{x}{x-1}$ добија се $x = \frac{A}{A-1}$, и аналогно за y и z ; уврштавањем у $xyz = 1$ и сређивањем добија се наведени идентитет.

Зато је

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 - 1 &= (A + B + C)^2 - 2(AB + BC + CA) - 1 \\ &= (A + B + C)^2 - 2(A + B + C - 1) - 1 \\ &= (A + B + C - 1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

што доказује тврђење.

Пример 6.9. Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n$ позитивни реални бројеви са $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

Доказати да је

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 + \sum_{j \neq i} a_j^2} \leq 1.$$

Решење. За свако i важи

$$1 + \sum_{j \neq i} a_j^2 \geq 1,$$

јер је сума квадрата ненегативна. Пошто су сви бројеви a_i позитивни, одатле следи

$$\frac{a_i}{1 + \sum_{j \neq i} a_j^2} \leq a_i.$$

Сабирањем по $i = 1, \dots, n$ непосредно добијамо

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 + \sum_{j \neq i} a_j^2} \leq \sum_{i=1}^n a_i = 1.$$

Напомена. Овај пример показује да јака класична неједнакост није увек потребна: понекад је довољна елементарна оцена имениоца.

Пример 6.10 (Примена Јенсенове неједнакости на такмичарском задатку).

Нека су $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ са збиром 1. Доказати да је

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Решење. Функција $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ је конвексна на $(0, 1)$, јер је

$$f''(x) = \frac{4-x}{4(1-x)^{5/2}} > 0 \quad \text{за } 0 < x < 1.$$

Из Јенсенове неједнакости следи

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{\sqrt{1-1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Множењем са n добијамо

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Једнакост важи за $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$.

6.3 Методички приступи у настави

Место неједнакости у наставним програмима

Неједнакости су присутне у наставним програмима математике на свим нивоима, али су ретко систематски обрађене. У средњој школи се јављају као алат за решавање задатака, а ретко као самостална тема. На факултетском нивоу, елементарне неједнакости се подразумевају познатим, а класичне (Хелдерова, Минковскијева) уводе се у оквиру функционалне анализе без детаљних доказа.

Циљ методичког одељка је да предложи конкретне приступе за систематску обраду ових тема на различитим нивоима, уз нагласак на разумевање идеја, а не само техничком манипулисању формулама.

Неједнакости у средњој школи

I разред — АМ–ГМ неједнакост

АМ–ГМ неједнакост је природна тема за I разред математичке гимназије. Уводи се преко геометријске интерпретације: аритметичка средина одговара аритметичком просеку, геометријска — страни квадрата са истом површином. Доказ из $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ је доступан ученицима на овом нивоу.

Предлој задатка:

1. Доказати да је $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ за $x \neq 0$.
2. Наћи минимум $f(x) = x + \frac{4}{x}$ за $x > 0$.
3. Ако је $a + b = 10$, наћи максимум производа ab .

III разред — Коши–Шварцова неједнакост

У III разреду, у оквиру аналитичке геометрије, природно се јавља геометријска интерпретација Коши–Шварцове неједнакости: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$ еквивалентна је са $|\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})| \leq 1$. Доказ преко дискриминанте квадратног тринома је доступан и елегантан.

Предлој задатка:

1. Доказати да је $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.
2. Наћи минимум $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ уз услов $x + y = 1$, $a, b > 0$.

3. Применити Коши–Шварц на доказ Несбитове неједнакости.

IV разред — Напредне технике

У IV разреду, ученици математичке гимназије могу се упознати са Јенсеновом неједнакошћу на елементарном нивоу (без формалне дефиниције конвексности), кроз конкретне примере: $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin x$ на $(0, \pi)$.

Предлоџ задаћака:

1. За углове троугла доказати $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
2. Доказати $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ за позитивне a, b, c .
3. Такмичарски задатак: ИМО 1995, задатак 2.

Пример наставне јединице

Наставна јединица: АМ–ГМ неједнакост

Разред: I разред математичке гимназије

Циљеви:

- Ученик разуме шта су аритметичка и геометријска средина и какав је њихов однос.
- Ученик уме да докаже АМ–ГМ неједнакост за два броја.
- Ученик уме да примени неједнакост на налажење екстремних вредности.

Ток часа:

1. *Увод (10 мин)* — Геометријска мотивација: правоугаоник са задатим обимом, највећа површина.
2. *Дефиниција и теорема (15 мин)* — Дефиниција АС и ГС, доказ из $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, услов једнакости.
3. *Примери (10 мин)* — Налажење минимума $x + \frac{1}{x}$, максимума производа ab уз $a + b = S$.
4. *Самосталан рад (10 мин)* — Три задатка различите тежине.

Неједнакости на факултетском нивоу

На факултетском нивоу, неједнакости имају различиту улогу у зависности од курса.

Анализа 1 — Конвексност и Јенсенова неједнакост природно следе из теорије диференцијалног рачуна. Препоручује се увести Јенсенову одмах после Лагранжове теореме о средњој вредности, уз доказ кроз критеријум $f'' \geq 0$.

Функционална анализа — Хелдерова и Минковскијева неједнакост нису аксиоме L^p простора, него теореме које обезбеђују његову структуру. Минковскијева неједнакост доказује троугаону неједнакост за L^p норму, а Хелдерова обезбеђује непрекидност дуалног упаривања простора L^p и L^q . За $p = 2$ Коши–Шварцова неједнакост гарантује да је унутрашње множење добро дефинисано.

Теорија вероватноће — Јенсенова неједнакост за случајне променљиве ($E[f(X)] \geq f(E[X])$) је фундаментална лема. Препоручује се доказати је директно из дефиниције конвексности.

Типичне грешке при раду са неједнакостима

Искуство показује да се при примени класичних неједнакости јављају грешке које се понављају. Указивање на њих значајан је део наставе.

- *Провера интервала конвексности или конкавности.* Функција може бити конвексна само на делу домена — на пример, $-\cos x$ је конвексна на $[0, \frac{\pi}{2}]$, али не и на целом $(0, \pi)$. Јенсенова неједнакост примењује се само на интервалу на коме тражена особина заиста важи.
- *Провера смера Јенсенове неједнакости.* За конвексне функције неједнакост има један смер, а за конкавне супротан. Замена смера најчешћи је извор нетачних решења.
- *Пажљива анализа услова једнакости.* Услов једнакости не сме се записивати преко количника који можда нису дефинисани, нити се сме прећутно претпоставити да се екстрем достиже у симетричној тачки.
- *Нулте тежине у тежинским неједнакостима.* Ако су дозвољене тежине $\lambda_i \geq 0$, једнакост захтева да буду међусобно једнаки само они чланови за које је $\lambda_i > 0$; чланови са нултом тежином не утичу на једнакост.

- Разлика између тачкастих једнакости и једнакости скоро свуда. У L^p просторима из $\|f\|_p = 0$ следи да је $f = 0$ скоро свуда, а не у свакој тачки; без тог поистовећивања $\|\cdot\|_p$ је само полунорма.

Методички коментар

Кључна поука коју овај рад жели да пренесе наставницима је следећа: исти математички резултат треба показати на више начина и на више нивоа. АМ–ГМ неједнакост коју ученик I разреда доказује из $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ и Тежинску АМ–ГМ коју студент Анализе 1 изводи из Јенсенове неједнакости — исти су резултат, само другачије исказан и доказан.

Ова прогресија — елементарни доказ, интуиција, општи резултат — не само да задовољава строгост него и гради разумевање. Ученик који схвати да је АМ–ГМ специјалан случај Јенсенове, а Коши–Шварц специјалан случај Хелдерове, разуме математику дубље него онај који зна само формулу.

Глава 7

Закључак

У овом мастер раду систематски су изложене класичне неједнакости математичке анализе и успостављена је њихова улога у ширем контексту математике.

У **првој глави** уведен је читалац у проблематику рада кроз мотивацију и преглед структуре, а затим је постепено изграђиван теоријски апарат — од елементарних ка класичним неједнакостима, преко варијација и варијанти, до апстрактног уопштења и примена.

У **другој глави** изложене су елементарне неједнакости — АМ–ГМ неједнакост са доказима за два и n бројева, хијерархија средина $H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n$, Коши–Шварцова неједнакост са два доказа и Енгеловим обликом, те низ последица укључујући Чебишевљеву неједнакост и неједнакост о преуређивању. Поред тога, уведена је тежинска АМ–ГМ неједнакост као природан прелаз ка класичним резултатима.

У **трећој глави** изложене су три главне класичне неједнакости. Јенсенова неједнакост — са теоријом конвексних функција и интегралним обликом — представља теоријски темељ. Хелдерова неједнакост, са два доказа и уопштењима на тежинску и општу верзију, а Минковскијева са три облика и везом са L^p просторима, заокружују класичну теорију.

У **четвртој глави** разматране су варијације: обрнута Хелдерова и Минковскијева за $0 < p < 1$, Петровићева неједнакост српског математичара Михаила Петровића, Караматина неједнакост са концептом мајоризације — открићем Јована Карамате — Поповичуова неједнакост, која се из ње непосредно изводи, и Шурова неједнакост.

У **петој глави** успостављене су кључне везе између великог броја изложених неједнакости, при чему Јенсенова неједнакост заузима централно место,

док породица степених средина M_s обједињује хијерархију $H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n$ у јединствен резултат о монотоности.

У **шестој глави** приказане су примене: оцена интеграла и конвергенција редова преко Хелдерове, веза са теоријом вероватноће преко Јенсенове, такмичарски задаци са МО, те методички приступи за обраду ових тема у средњој школи и на факултету.

Централна порука рада је да класичне неједнакости нису скуп изолованих резултата, него јединствена хијерархијска структура са Јенсеновом неједнакосту у темељу. Разумевање ове структуре — а не само познавање формула — кључно је за успешну примену у анализи, такмичарској математици и настави.

Могући правци даљег истраживања су бројни и разгранати.

Први природни корак је проучавање *неједнакости у ојерајторским просторима и Банаховим алгебрама*. Хелдерова и Минковскијева неједнакост имају облике за матрице и операторе — на пример, Шатенова норма и трагова неједнакости директно уопштавају скаларне резултате. Ова теорија повезује класичне неједнакости са квантном механиком и теоријом информација.

Другу важну област представља *примена у нумеричкој математици и оптимизацији*. Конвексне функције и Јенсенова неједнакост налазе се у основи конвексне оптимизације — данас кључне дисциплине у машинском учењу и операционим истраживањима. Разумевање теоретских основа директно доприноси развоју ефикаснијих алгоритама.

Трећи природан правац представља проучавање *дискретних и интегралних неједнакости на општим мерним просторима*. Хелдерова и Минковскијева неједнакост имају природне формулације у општим L^p просторима, док даљи развој води ка операторским, некомутативним и другим уопштеним облицима класичних неједнакости, као и питањима оптималних константи и стабилности.

Коначно, *дубља анализа симетричних неједнакости* — Мјурхедова неједнакост, Шурова конвексност и теорија мајоризације у вези са симетричним функцијама — природан је наставак четврте главе. Веза мајоризације са информационо-теоријском ентропијом и теоријом вероватноће представља посебно плодан правац за будући рад.

Литература

- [1] Engel Arthur. *Problem-Solving Strategies*. New York: Springer-Verlag, 1998. ISBN: 978-0-387-98219-9.
- [2] Hardy Godfrey H., Littlewood John E., Pólya George. *Inequalities*. 2. издање. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.
- [3] Marshall Albert W., Olkin Ingram, Arnold Barry C. *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*. 2. издање. New York: Springer, 2011.
- [4] Niculescu Constantin P., Persson Lars-Erik. *Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach*. 3. издање. Cham: Springer, 2025.
- [5] Rudin Walter. *Real and Complex Analysis*. 3. издање. New York: McGraw-Hill, 1987. ISBN: 978-0-07-054234-1.
- [6] Каделбург Зоран, Ђукић Душан, Лукић Миливоје, Матић Иван. *Неједнакости*. 2. издање. Св. 42. Материјали за младе математичаре. Београд: Друштво математичара Србије, 2014.
- [7] Карамата Јован. „Sur une inégalité relative aux fonctions convexes”. У: *Publications de l’Institut Mathématique* 1 (1932), стр. 145–148.
- [8] Митриновић Драгослав С. *Analytic Inequalities*. Berlin: Springer-Verlag, 1970.
- [9] Младеновић Павле, Кртинић Ђорђе. *Међународне и балканске математичке олимпијаде 1996–2006*. Св. 48. Материјали за младе математичаре. Београд: Друштво математичара Србије, 2007.
- [10] Петровић Михаило. *Рачунање са бројевним описом*. Београд: Државна штампарија Краљевине Србије, 1917.
- [11] Цветковски Здравко. *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. ISBN: 978-3-642-23791-1.