

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Сузана Миловановић

СКИЦИРАЊЕ КРИВИХ ДРУГОГ РЕДА ЗАДАТИХ ОПШТОМ ЈЕДНАЧИНОМ

мастер рад

Београд, 2026.

Ментор:

проф. др Небојша Икодиновић

Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Горан Ђанковић

Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Тања Стојадиновић

Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Захваљујем се ментору, проф. др Небојши Икодиновићу на стручној подршци, корисним сугестијама и посвећеном времену током израде овог рада, као и члановима комисије на корисним саветима.

Овај рад посвећујем својој породици и свим драгим људима који су увек били уз мене, а посебно мојој ћерки Теодори, која верује у мене и када сама посумњам.

САДРЖАЈ

Резиме.....	5
1 Увод	6
1.1. кратак историјски развој и значај кривих другог реда	6
1.2. канонске једначине кривих другог реда.....	8
2 Осврт на линеарне операторе	12
2.1. линеарни оператори и линеарне трансформације	12
2.2. матрични запис линеарног оператора	14
2.3. сопствени вектори и сопствене вредности линеарног оператора	16
2.4. дијагонализација и симетрични оператори	21
3 Општа једначина и канонски облици кривих другог реда	24
3.1. криве другог реда, свођење на главне осе	24
3.2. инваријанте криве другог реда	29
3.3. тип криве на основу знака детерминанте	31
4 Методологија скицирања и решени примери.....	34
Закључак	46
Литература.....	47

НАСЛОВ МАСТЕР РАДА: СКИЦИРАЊЕ КРИВИХ ДРУГОГ РЕДА ЗАДАТИХ ОПШТОМ ЈЕДНАЧИНОМ

РЕЗИМЕ: У овом мастер раду детаљно се испитује поступак класификације и скицирања кривих другог реда на основу експлицитно задатих коефицијената A, B, C, D, E, F у њиховој општој једначини. Полазећи од основних резултата линеарне алгебре, рад уоквирује аналитичко-геометријски проблем у матричну форму, анализирајући квадратну форму криве преко сопствених вредности и сопствених вектора одговарајућих симетричних матрица.

Главни циљ рада је дефинисање и детаљан опис поступка који води од почетних алгебарских коефицијената до геометријског приказа криве у равни. Кроз процес дијагонализације матрица спроводи се ортогонална трансформација координатног система - најпре ротација, којом се елиминише мешовити члан, а потом и translација помоћу методе допуне до пуног квадрата, чиме се елиминишу линеарни чланови. Овај методолошки след омогућава систематско свођење опште једначине на њен канонски (стандардни) облик. Кроз овај поступак се једнозначно идентификује тип криве (елипса, хипербола, парабола или дегенерисани случајеви) и одређују све њене кључне геометријске особине (центар, темена, осе).

У завршном делу рада, теоријски постављен алгоритам је практично илустрован кроз детаљне рачунске примере и пратеће геометријске приказе. Тиме је демонстрирана директна веза између апстрактних матричних трансформација и практичног процеса конструисања и скицирања кривих у равни.

КЉУЧНЕ РЕЧИ: криве другог реда, општа једначина, коефицијенти, линеарне трансформације, сопствене вредности, ротација, translација, централна симетрија, канонски облик.

1 УВОД

Аналитичка геометрија представља значајну област математике која повезује геометријске појмове са алгебарским методама. Увођењем координатног система омогућено је да се геометријски објекти описују једначинама, чиме је њихово проучавање постало систематичније и прецизније. Посебно место у аналитичкој геометрији заузимају криве другог реда (конике), које се појављују како у математици, тако и у бројним областима природних и техничких наука, попут физике, астрономије, архитектуре, машинства и информатике.

Криве другог реда представљају скупове тачака у равни чије координате задовољавају општу квадратну једначину са две променљиве. У зависности од вредности коефицијената ове једначине, могу се добити различити геометријски облици: елипса, кружница, хипербола и парабола, као и дегенерисани случајеви. Њихово препознавање и правилно скицирање захтевају познавање особина сваке од ових кривих, као и примену одговарајућих трансформација координатног система.

Предмет овог рада јесте анализа поступка скицирања кривих другог реда задатих општом једначином. У раду ће бити приказани и искоришћени неки познати резултати линеарне алгебре. Главни циљ рада јесте детаљан опис поступка цртања криве другог реда заснован на неким основним резултатима линеарне алгебре, уз преглед најважнијих концепата и теорема у вези са линеарним трансформацијама. Посебна пажња посвећена је одређивању врсте криве на основу коефицијената једначине, трансформацијама којима се једначина своди на канонски облик и методама које омогућавају прецизно графичко представљање добијене криве.

Систематичним приказом теоријских основа и практичних поступака потребних за скицирање кривих другог реда кроз репрезентативне примере, рад треба да допринесе бољем разумевању везе између алгебарског записа једначине и геометријског облика криве, као и да укаже на значај ових поступака у настави математике и њиховој примени у другим научним дисциплинама.

1.1. КРАТАК ИСТОРИЈСКИ РАЗВОЈ И ЗНАЧАЈ КРИВИХ ДРУГОГ РЕДА

Криве другог реда, познате и као конике, конусни пресеци (круг, елипса, парабола и хипербола) представљају једне од најстаријих и најзначајнијих геометријских објеката. Њихово проучавање започело је још у старој Грчкој, где су настале као резултат пресека равни и кружне купе. Прва истраживања везују се за Менехма-Платонов ученик (IV век п. н. е.). Менехмов рад није сачуван, а о њему сазнајемо из различитих списа његових савременика. Користио је конусне пресеке у решавању три проблема: квадратура круга, трисекција угла и удвостручавање коцке.

У Старој Грчкој су конусе конструисали обртањем правоуглог троугла око једне катете, док хипотенуза генерише површину конуса. Конусни пресеци су се добијали конструисањем равни која је пресекала конус. Одређивање конике вршило се тако што се посматрао угао између равни и темена угла (двоструке величине угла који образују хипотенуза и катета око које се ротира троугао). Уколико је тај угао оштар, коника је елипса, ако је угао прав у питању је парабола, уколико је туп, реч је о хиперболи. Сматра се да се конусним пресецима бавио Еуклид (330. п. н. е. -275. п. н. е.), међутим ни његови радови нису сачувани.

Архимед (287. п. н. е. -212. п. н. е.) је посебан акценат ставио на параболу и његови радови „Расправе о квадратури параболе“ сачувани су до данас.

Највећи допринос развоју теорије кривих другог реда дао је старогрчки математичар Аполоније из Перге (260. п. н. е. -190. п. н. е.), чије дело „Конусни пресеци“ које се састоји од осам књига и 787 ставова, представља једно од најзначајнијих дела античке математике. У њему су систематски описане основне особине елипсе, параболе и хиперболе, а управо је Аполоније увео називе ових кривих који су задржани до данас. [6]

Развој аналитичке геометрије у XVII веку почиње радовима Ренеа Декарта и Пјера де Ферма, који доносе потпуно нови приступ проучавању геометријских фигура. Увођењем координатног система геометријски проблеми могли су се описивати алгебарским једначинама, што је омогућило једноставније одређивање особина и међусобних односа геометријских објеката.

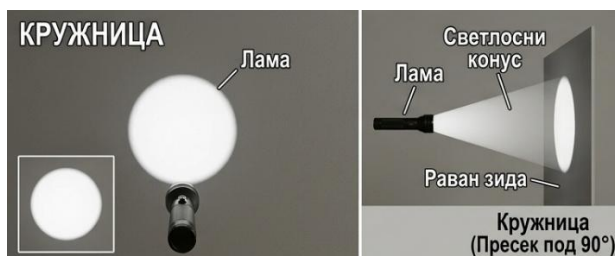
Криве нису више биле само цртежи у равни, већ су добиле свој алгебарски облик. Од тада се криве другог реда дефинишу општом једначином другог степена са две променљиве

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

У савременој математици криве другог реда имају значајну теоријску и практичну примену. Елипсе описују путање планета око Сунца према законима небеске механике, параболе се користе при пројектовању рефлектора, антена и сателитских тањира због својих оптичких особина, док се хиперболе примењују у навигацији, геодезији и различитим областима технике. Њихова својства користе се и у архитектури, грађевинарству, машинству, рачунарству и обради графике.

У настави математике криве другог реда имају посебан значај јер повезују геометријско и алгебарско мишљење. Њихово проучавање развија способност анализе једначина, примене координатних трансформација и интерпретације геометријских особина на основу алгебарског записа. Због тога представљају важан део наставних програма аналитичке геометрије на универзитетском нивоу.

Геометријски посматрано, криве другог реда настају као конусни пресеци. Једноставну и интуитивну физичку илустрацију овог концепта пружа светлосни сноп ручне лампе усмерен ка равни зида, где тачкасти извор светлости формира конус, а зид представља раван која га пресеца (Слика 1 - Слика 4).



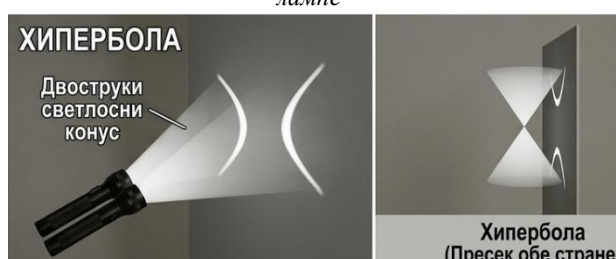
Слика 1: Илустрација кружнице помоћу светлосног снопа лампе



Слика 2: Илустрација елипсе помоћу светлосног снопа лампе



Слика 3: Илустрација параболе помоћу светлосног снопа лампе



Слика 4: Илустрација хиперболе помоћу светлосног снопа лампе

1.2. КАНОНСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРИВИХ ДРУГОГ РЕДА

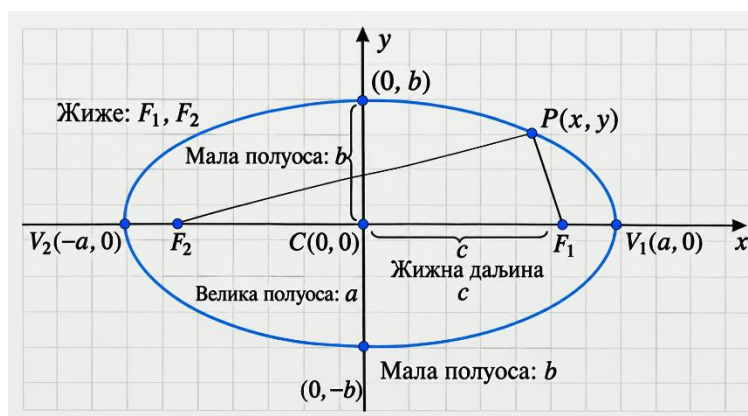
У овом одељку кратко подсећамо на канонске једначине кривих другог реда на које ћемо сводити сложеније и општије случајеве.

ЕЛИПСА

Дефиниција 1.2.1:

Елипса представља геометријско место тачака за које је збир растојања од две фиксне тачке (жиже) константан.

Основни елементи елипсе су две жиже (фокуси), велика и мала полуоса.



Слика 5: Елипса у координатном систему

Теорема 1.2.1 Крива задата једначином

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0$$

је елипса са жижама $F_1(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ и $F_2(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, а велика и мала полуоса су једнаке a и b , респективно.

Доказ:

За произвољну тачку $P(x, y)$ са елипсе, збир $F_1P + F_2P$ добијамо применом Питагорине теореме на троуглове F_1PB и F_2PB , где је B подножје нормале из P на F_1F_2 :

$$F_1P + F_2P = \sqrt{y^2 + (\sqrt{a^2 - b^2} + x)^2} + \sqrt{y^2 + (\sqrt{a^2 - b^2} - x)^2}.$$

Из полазне једначине уврштавањем $y^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2}$ добијамо:

$$F_1P + F_2P = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2} + a\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2} - a\right)^2}$$

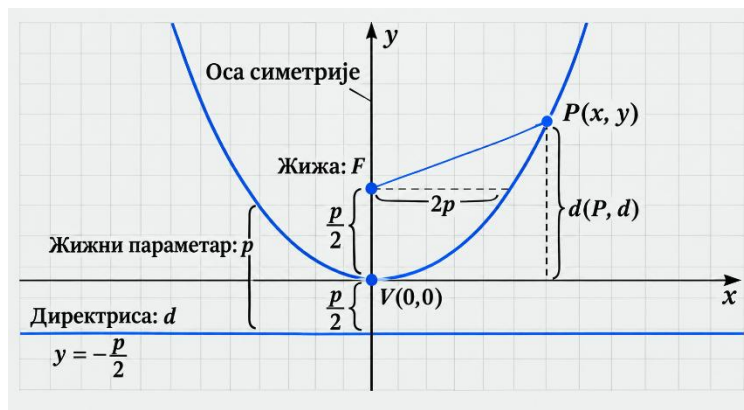
$F_1P + F_2P = 2a$, после скраћивања, што је очигледно константно. ■

ПАРАБОЛА

Дефиниција 1.2.2:

Парабола представља геометријско место тачака за које је растојање од фиксиране тачке и праве једнако.

Основни елементи параболе су жижа, теме параболе и директриса (фиксирана права).



Слика 6: Парабола у координатном систему

Теорема 1.2.2 Крива задата једначином

$$x^2 = 2py, p > 0$$

је парабола са жижом $F(0, \frac{p}{2})$, осом која се поклапа са у осом

и директрисом датом са $y = -\frac{p}{2}$.

Доказ:

Уочимо произвољну тачку $P(x, \frac{x^2}{2p})$ са параболе.

Растојање ове тачке од $F(0, \frac{p}{2})$ је $d(F, P) = \sqrt{x^2 + (\frac{x^2}{2p} - \frac{p}{2})^2} = \frac{x^2}{2p} + \frac{p}{2}$, а растојање између тачке и директрисе $d(P, d) = \frac{x^2}{2p} - (-\frac{p}{2}) = \frac{x^2}{2p} + \frac{p}{2}$ доводи до закључка да је

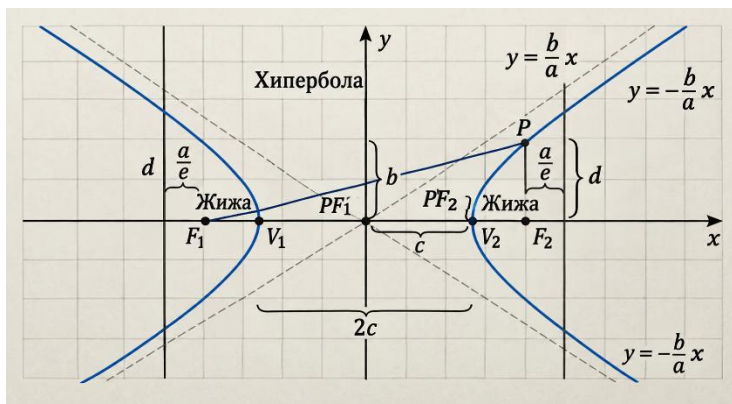
$d(F, P) = d(P, d)$, одакле следи да је дата крива парабола. ■

ХИПЕРБОЛА

Дефиниција 1.2.3:

Хипербола представља геометријско место тачака за које је апсолутна вредност разлике растојања од две фиксне тачке константна.

Основни елементи хиперболе су две жиже, две асимптоте, реална и имагинарна оса. Тачка пресека асимптота представља центар симетрије хиперболе. Ако се асимптоте секу под правим углом реч је о једнакостраничној хиперболи.



Слика 7: Хипербола у координатном систему

Теорема 1.2.3 Крива задата једначином

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$$

је хипербола са жижама $F_1(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ и $F_2(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$,

а једначине асимптота су $y = \pm \frac{xb}{a}$.

Доказ:

Аналогно доказу Теореме 1.2.1. применом Питагорине теореме на троуглове F_1PB и F_2PB , лако долазимо до закључка да је $|F_1P - F_2P| = 2a$.

Једначине асимптота налазимо класичном методом. Коефицијент правца асимптоте:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \pm \frac{b}{a} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2}} = \pm \frac{b}{a}.$$

Слободан члан: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = 0$. ■

2 ОСВРТ НА ЛИНЕАРНЕ ОПЕРАТОРЕ

2.1. ЛИНЕАРНИ ОПЕРАТОРИ И ЛИНЕАРНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

Нека је $\mathbb{R}^2$ дводимензионални реални векторски простор вектора са почетком.

Дефиниција 2.1.1:

Пресликавање $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ које за све векторе $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ и сваки број $\lambda \in \mathbb{R}$ задовољава услове:

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y}),$$

$$A(\lambda \vec{x}) = \lambda A(\vec{x}),$$

назива се **линеарним оператором**.

Из основних особина линеарних оператора непосредно следи да је $A(\vec{0}) = \vec{0}$ и да за све $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ важи, $A(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda A(\vec{x}) + \mu A(\vec{y})$. Такође, математичком индукцијом се једноставно доказује да за $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, \dots, n$ важи:

$$A(\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n) = \lambda_1 A(\vec{x}_1) + \dots + \lambda_n A(\vec{x}_n).$$

Пример 1.

Хомотетија је један пример линеарног оператора. За неко $k \in \mathbb{R}$, нека је $H_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дефинисано са $H_k(\vec{x}) = k\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

Оператор H_k је линеаран јер је :

- $H_k(\vec{x} + \vec{y}) = k(\vec{x} + \vec{y})$
 $= k\vec{x} + k\vec{y}$
 $= H_k(\vec{x}) + H_k(\vec{y}).$
- $H_k(\lambda \vec{x}) = k(\lambda \vec{x})$
 $= \lambda k\vec{x} = \lambda H_k(\vec{x}).$

За $k = 1$ добија се идентитет на простору $\mathbb{R}^2$, па је и идентитет линеаран оператор.

За $k = 0$ добија се линеарни оператор који сваком вектору придружује нулти вектор. Такав оператор назива се **нула-оператор**. За $k = -1$, оператор H_{-1} назива се **оператор централне симетрије**. ♦

Теорема 2.1.1 [Основна теорема о линеарним операторима] Ако су $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ и $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ два пара вектора простора $\mathbb{R}^2$, при чему су вектори првог пара линеарно независни, тада постоји јединствени линеарни оператор $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такав да је $\vec{b}_i = A(\vec{a}_i)$, $i = 1, 2$.

Доказ:

а) Егзистенција

Нека је $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ произвољан вектор. Пошто су $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ линеарно независни вектори, постоје јединствени реални бројеви $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ такви да важи $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + y_1\vec{a}_2$. Показаћемо да је оператор дефинисан са: $A(\vec{x}) = x_1\vec{b}_1 + y_1\vec{b}_2$, линеаран и да испуњава услове теореме.

За векторе $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + y_1\vec{a}_2$ и $\vec{y} = x_2\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2$, важи:

$$\begin{aligned} A(\vec{x} + \vec{y}) &= A((x_1 + x_2)\vec{a}_1 + (y_1 + y_2)\vec{a}_2) \\ &= (x_1 + x_2)\vec{b}_1 + (y_1 + y_2)\vec{b}_2 \\ &= (x_1\vec{b}_1 + y_1\vec{b}_2) + (x_2\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2) \\ &= A(\vec{x}) + A(\vec{y}). \end{aligned}$$

За векторе $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + y_1\vec{a}_2$ и $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$A(\lambda\vec{x}) = A(\lambda x_1\vec{a}_1 + \lambda y_1\vec{a}_2) = \lambda x_1\vec{b}_1 + \lambda y_1\vec{b}_2 = \lambda(x_1\vec{b}_1 + y_1\vec{b}_2) = \lambda A(\vec{x}),$$

па је A заиста линеарни оператор.

Треба још проверити да је $A(\vec{a}_i) = \vec{b}_i$, $i = 1, 2$.

Из једнакости $\vec{a}_1 = 1\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2$ следи:

$$A(\vec{a}_1) = 1A(\vec{a}_1) + 0A(\vec{a}_2) = 1\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 = \vec{b}_1.$$

На сличан начин добија се

$$A(\vec{a}_2) = 0A(\vec{a}_1) + 1A(\vec{a}_2) = 0\vec{b}_1 + 1\vec{b}_2 = \vec{b}_2.$$

б) Јединственост

Претпоставимо супротно, да постоји још један линеарни оператор B који задовољава услове

$$B(\vec{x}) = B(x_1 \vec{a}_1 + y_1 \vec{a}_2) = x_1 B(\vec{a}_1) + y_1 B(\vec{a}_2).$$

Пошто је $B(\vec{a}_i) = \vec{b}_i$ добија се $B(\vec{x}) = x_1 \vec{b}_1 + y_1 \vec{b}_2$, али исто важи и за $A(\vec{x})$, па следи да је

$$A(\vec{x}) = B(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2. \quad \text{Дакле, оператори } A \text{ и } B \text{ се поклапају.} \quad \blacksquare$$

2.2. МАТРИЧНИ ЗАПИС ЛИНЕАРНОГ ОПЕРАТОРА

Линеарни оператори су у тесној вези са линеарним трансформацијама равни.

Нека је A линеарни оператор, а $(\vec{i}, \vec{j})$ база векторског простора $\mathbb{R}^2$.

Према основној теореме о линеарним операторима, оператор A одређен је векторима $A(\vec{i})$ и $A(\vec{j})$. Нека је:

$$A(\vec{i}) = a_{11}\vec{i} + a_{21}\vec{j},$$

$$A(\vec{j}) = a_{12}\vec{i} + a_{22}\vec{j}.$$

Ако је $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j}$ и $\vec{x}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, тада из услова да $\vec{x}' = A(\vec{x})$ и линеарности оператора A добијамо

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= x'\vec{i} + y'\vec{j} = A(\vec{x}) = A(x\vec{i} + y\vec{j}) = xA(\vec{i}) + yA(\vec{j}) = \\ &= x(a_{11}\vec{i} + a_{21}\vec{j}) + y(a_{12}\vec{i} + a_{22}\vec{j}) = (a_{11}x + a_{12}y)\vec{i} + (a_{21}x + a_{22}y)\vec{j}. \end{aligned}$$

Пошто су $\vec{i}$ и $\vec{j}$ линеарно независни вектори, следи:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y.$$

Добијене једнакости је погодно представити у матричном облику. Ако векторе $\vec{x}$ и $\vec{x}'$ редом запишемо у облику $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, претходне једнакости записујемо у облику:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Матрицу $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ називамо **матрицом линеарног оператора A** . Прва колона ове матрице представља координате вектора $A(\vec{i})$, док друга колона представља координате вектора $A(\vec{j})$.

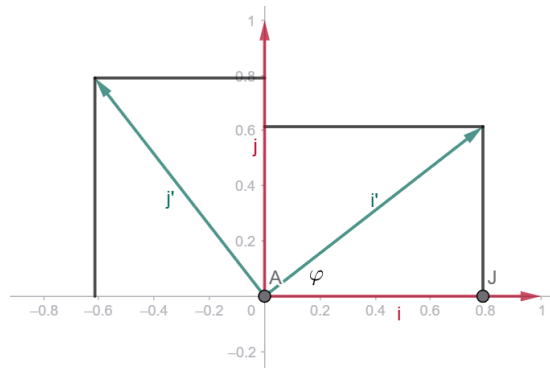
Пример 2.

Нека је R_φ ротација равни $(O, \vec{i}, \vec{j})$ око координатног почетка O за угао φ у смеру супротном кретању казаљке на сату. Није тешко уочити да је:

$$R_\varphi(\vec{i}) = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j},$$

$$R_\varphi(\vec{j}) = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j},$$

као и да је R_φ линеарни оператор чија је матрица



Слика 7

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$



Пример 3.

Матрица линеарног оператора у ортонормираној бази $(\vec{i}, \vec{j})$ има облик

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Испитајмо која трансформација равни одговара том оператору. Ова трансформација се може записати у облику

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' &= x \sin \varphi - y \cos \varphi. \end{aligned}$$

Фиксне тачке (тачке које се трансформацијом не мењају $x = x'$, $y = y'$) се добијају из система

$$\begin{aligned} x(\cos \varphi - 1) + y \sin \varphi &= 0, \\ x \sin \varphi - y(\cos \varphi + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Пошто је детерминанта тог система једнака 0,

$$D = \begin{vmatrix} \cos \varphi - 1 & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi + 1 \end{vmatrix} = -\cos^2 \varphi + 1 - \sin^2 \varphi = 0,$$

$$D_x = 0 \text{ и } D_y = 0,$$

систем има бесконачно много решења и видимо да ове тачке леже на правој

$$y = x \tan \frac{\varphi}{2},$$

па се ради о **осној симетрији** чија је оса наведена права, а оператор A називамо **оператором осне симетрије**.

Уочимо да је детерминанта оператора ротације једнака 1, а оператора осне симетрије -1. То је алгебарска последица чињенице да ротација не мења оријентацију, док осна симетрија мења. ◆

2.3. СОПСТВЕНИ ВЕКТОРИ И СОПСТВЕНЕ ВРЕДНОСТИ ЛИНЕАРНОГ ОПЕРАТОРА

Дефиниција 2.3.1:

Вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ називамо **сопственим вектором** линеарног оператора $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ако је $A(\vec{a})$ колинеаран са вектором $\vec{a}$, односно ако постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такав да важи $A(\vec{a}) = \lambda \vec{a}$.

Реалан број λ називамо **сопственом вредношћу** која одговара сопственом вектору $\vec{a}$.

Теорема 2.3.1 Ако је $\vec{a}$ сопствени вектор оператора A , онда је то и сваки вектор

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

Доказ:

Нека је $\vec{a}$ сопствени вектор оператора A .

Према дефиницији постоји сопствена вредност $\lambda \in \mathbb{R}$ таква да $A(\vec{a}) = \lambda \vec{a}$.

Нека је произвољан вектор $\vec{b} = \alpha \vec{a}$. Како је $\alpha \neq 0$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$, следи да је и $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Због особине линеарности оператора A имамо да је

$$A(\vec{b}) = A(\alpha \vec{a}) = \alpha A(\vec{a}).$$

Како је $A(\vec{a}) = \lambda \vec{a}$ следи $A(\vec{b}) = \alpha \lambda \vec{a} = \lambda \alpha \vec{a}$.

Пошто је $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ добијамо

$$A(\vec{b}) = \lambda \vec{b}.$$

Према дефиницији сопственог вектора, вектор $\vec{b}$ је такође сопствени вектор оператора A и одговара му иста сопствена вредност λ . ■

Покажимо како се одређују сопствени вектори и сопствене вредности линеарног оператора A . Нека у бази $(\vec{i}, \vec{j})$ линеарни оператор A има матрични запис:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

и нека је $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ сопствени вектор оператора A . Тада је

$$A(\vec{x}) = x_1A(\vec{i}) + x_2A(\vec{j}) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\vec{i} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\vec{j}.$$

Пошто је $A(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ добијамо:

$$\lambda x_1\vec{i} + \lambda x_2\vec{j} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\vec{i} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\vec{j}.$$

Због линеарне независности вектора $\vec{i}$ и $\vec{j}$ следи:

$$\lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \text{ и } \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

односно

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0,$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0.$$

Сопствене вредности су решења последњег система. Систем има нетривијално решење ако и само ако је

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

односно

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Ова једначина се назива **карактеристична једначина** линеарног оператора.

Дакле, уколико оператор A има сопствени вектор, онда њему одговара сопствена вредност која је корен карактеристичне једначине и обрнуто.

Теорема 2.3.2 Ако је λ_0 реалан корен карактеристичне једначине линеарног оператора, онда тај оператор има бар један сопствени вектор којем је придружена сопствена вредност λ_0 .

Доказ:

Претпоставимо да је λ_0 реалан корен карактеристичне једначине

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Систем

$$(a_{11} - \lambda_0)x_1 + a_{12}x_2 = 0,$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_0)x_2 = 0$$

има бар једно нетривијално решење (x_1, x_2) , па је

$$\vec{x} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$$

сопствени вектор којем је придружена сопствена вредност λ_0 . ■

Природа сопствених вектора непосредно зависи од корена карактеристичне једначине оператора. Могућа су три случаја:

1° Ако карактеристична једначина **нема реалних корена**, тада линеарни оператор нема сопствених вектора.

2° Ако карактеристична једначина има **два различита реална корена**, тада линеарни оператор има два линеарно независна сопствена вектора. Сваки други сопствени вектор тада је колинеаран са једним од ова два вектора, што значи да су сви сопствени правци одређени управо њима.

Нека је $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и њима одговарају сопствени вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Покажимо да нису колинеарни. Претпоставимо супротно, да је $\vec{b} = \alpha \vec{a}$. Како је $A(\vec{b}) = \lambda_2 \vec{b}$, онда је и $A(\alpha \vec{a}) = \lambda_2(\alpha \vec{a})$, односно $A(\vec{a}) = \lambda_2 \vec{a}$, а пошто је $A(\vec{a}) = \lambda_1 \vec{a}$, добијамо $\lambda_1 = \lambda_2$, што је супротно претпоставци.

Остаје да се покаже да је сваки сопствени вектор $\vec{c}$ оператора A колинеаран или са вектором $\vec{a}$ или са вектором $\vec{b}$. Нека је $A(\vec{c}) = \lambda \vec{c}$, за неко λ и $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$. Тада важе једнакости:

$$\begin{aligned} A(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) &= \lambda(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}), \\ \alpha \lambda_1 \vec{a} + \beta \lambda_2 \vec{b} &= \lambda \alpha \vec{a} + \lambda \beta \vec{b}, \\ \alpha(\lambda_1 - \lambda) \vec{a} + \beta(\lambda_2 - \lambda) \vec{b} &= 0. \end{aligned}$$

Како су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно независни, тада мора бити $\alpha(\lambda_1 - \lambda) = 0$ и $\beta(\lambda_2 - \lambda) = 0$. Из $\lambda_1 \neq \lambda_2$, следи да је бар једна разлика $\lambda_1 - \lambda$ или $\lambda_2 - \lambda$ различита од нуле, па је $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, што значи да је $\vec{c}$ колинеаран са једним од вектора $\vec{a}$ или $\vec{b}$. ■

3° Ако карактеристична једначина има **двоструки реалан корен**, тада је или сваки ненулта вектор сопствени и сваком од њих одговара иста сопствена вредност λ_0 , или су сви сопствени вектори међусобно колинеарни.

Према Теорему 2.4.2, линеарни оператор A има бар један сопствени вектор $\vec{a}$. Ако су сви сопствени вектори колинеарни са $\vec{a}$ тврдња је доказана. Претпоставимо да постоји сопствени вектор $\vec{b}$ који није колинеаран са $\vec{a}$ и нека је λ_1 његова сопствена вредност. Тада је $\lambda_1 = \lambda_0$.

Ако је $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ било који вектор, онда важи

$$A(\vec{c}) = A(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha A(\vec{a}) + \beta A(\vec{b}) = \alpha \lambda_0 \vec{a} + \beta \lambda_0 \vec{b} = \lambda_0(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \lambda_0 \vec{c}.$$

Дакле, $\vec{c}$ је сопствени вектор.

У наредним примерима је приказано геометријско значење сопствених вредности и сопствених вектора познатих геометријских трансформација.

Пример 4. Хомотетија

Матрица хомотетије са центром у координатном почетку и коефицијентом k је $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

Карактеристична једначина $\begin{vmatrix} k - \lambda & 0 \\ 0 & k - \lambda \end{vmatrix} = 0$ има двоструки реалан корен: $\lambda_1 = \lambda_2 = k$.

Дакле, сваки вектор (различит од нултог) представља сопствени вектор оператора хомотетије, а њему одговара сопствена вредност једнака коефицијенту хомотетије k .

Геометријски, хомотетија мења само дужину вектора, док њихов правац остаје непромењен.



Пример 5. Ротација

Матрица оператора ротације за угао φ је $R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, а карактеристична једначина $\begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = 0$, тј.

$$(\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi = 0,$$

$$\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\lambda + \lambda^2 + \sin^2\varphi = 0,$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0.$$

Дискриминанта ове квадратне једначине по λ износи

$$D = 4\cos^2\varphi - 4 = 4(\cos^2\varphi - 1) = -4\sin^2\varphi.$$

Како је $D \leq 0$, разликујемо два случаја:

1. $D = 0$ за $\varphi = k\pi$;
2. $D < 0$ за $\varphi \neq k\pi$ јер $\sin^2\varphi > 0$, па је $-4\sin^2\varphi < 0$.

Геометријски, ротација мења правац сваког ненулног вектора, па ниједан од њих не остаје на истој правој на којој вектор лежи (осим у посебним случајевима када је угао ротације једнак 0° или 180°).



Пример 6. Рефлексija

Матрица оператора рефлексije је $R = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$, а карактеристична једначина $\begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = 0$, тј. $-\cos^2\varphi + \lambda^2 - \sin^2\varphi = 0$, односно $\lambda^2 = 1$. Једначина има два различита решења: $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$.

За $\lambda_1 = 1$, сопствени вектор $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ тражимо као ненулта решење хомогеног система једначина

$$x_1(\cos\varphi - 1) + x_2\sin\varphi = 0,$$

$$x_1\sin\varphi - x_2(\cos\varphi - 1) = 0.$$

Користећи половине углова, прва једначина постаје $-\sin\frac{\varphi}{2}x_1 + \cos\frac{\varphi}{2}x_2 = 0$. Одавде следи да је $x_2 = x_1 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, нетривијално решење је $x_1 = \cos\frac{\varphi}{2}$, $x_2 = \sin\frac{\varphi}{2}$. Први сопствени вектор је $\vec{v} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}$. Овај вектор лежи тачно на оси рефлексije, због чега при рефлексiji остаје непромењен.

Аналогно, за $\lambda_2 = -1$, сопствени вектор тражимо решавањем система једначина

$$x_1(\cos\varphi + 1) + x_2\sin\varphi = 0,$$

$$x_1\sin\varphi - x_2(\cos\varphi + 1) = 0.$$

Користећи половине углова, прва једначина постаје $\cos\frac{\varphi}{2}x_1 + \sin\frac{\varphi}{2}x_2 = 0$. Одавде следи да је $x_1 = -x_2 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, нетривијално решење је $x_1 = -\sin\frac{\varphi}{2}$, $x_2 = \cos\frac{\varphi}{2}$. Други сопствени вектор је $\vec{v} = \begin{bmatrix} -\sin\frac{\varphi}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}$. Овај вектор је нормалан на осу рефлексije и при рефлексiji мења смер у супротан.

Одавде закључујемо да су сопствени вектори оператора рефлексije међусобно нормални. ♦

2.4. ДИЈАГОНАЛИЗАЦИЈА И СИМЕТРИЧНИ ОПЕРАТОРИ

Матрични запис линеарног оператора зависи од избора базе, па се поставља питање да ли постоји база у којој матрица оператора има дијагонални облик. Ако је матрични запис линеарног оператора $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дијагонална матрица, тада кажемо да тај оператор допушта дијагонализацију.

Дијагонализација представља значајан поступак у линеарној алгебри, јер омогућава једноставније проучавање особина оператора, посебно његових сопствених вредности и сопствених вектора.

Теорема 2.4.1 Линеарни оператор $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ допушта дијагонализацију ако и само ако постоји база састављена од карактеристичних вектора тог оператора.

Доказ:

Нека је $(\vec{i}, \vec{j})$ база простора $\mathbb{R}^2$, а $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ сопствени вектори оператора A , којима одговарају сопствене вредности λ_1 и λ_2 : $A(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$, $i = 1, 2$. Оператор A у тој бази има матрични запис $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, те допушта дијагонализацију.

Обрнуто, ако оператор A допушта дијагонализацију у бази $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, тада његова матрица има облик $\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$, па је $A(\vec{e}_i) = \alpha_i \vec{e}_i$, $i = 1, 2$, што значи да су вектори $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ сопствени вектори оператора A . ■

Ако линеарни оператор допушта дијагонализацију, тада је његов матрични запис у бази сачињеној од његових сопствених вектора дијагонална матрица, чији су елементи на главној дијагонали сопствене вредности које одговарају векторима те базе.

Пример 7.

У бази $(\vec{i}, \vec{j})$, дат је линеарни оператор са матричним записом $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$. Испитајмо да ли овај оператор допушта дијагонализацију.

Карактеристична једначина оператора је $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, односно $(1-\lambda)^2 - 16 = 0$, тј. $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$. Једначина има два реална решења: $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = 5$.

Уколико је $\lambda_1 = -3$, сопствени вектор $v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ налазимо из система једначина

$$4x_1 + 2x_2 = 0,$$

$$8x_1 + 4x_2 = 0.$$

Из друге једначине следи да је $x_2 = -2x_1$, па је сопствени вектор $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Слично за $\lambda_2 = 5$, сопствени вектор $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Да би ова два вектора у дводимензионалном простору чинила базу, морају бити линеарно независни.

Претпоставимо да постоје бројеви α и β који нису нуле и за које важи:

$$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 = 0.$$

Одавде добијамо систем две једначине:

$$\alpha + \beta = 0 \quad \text{и} \quad -2\alpha + 2\beta = 0.$$

Решавањем система добијамо да је $\beta = 0$, па следи да је и $\alpha = 0$, а овим доказујемо да су вектори линеарно независни и они сигурно формирају нову базу.

На основу Теореме 2.4.1 линеарни оператор допушта дијагонализацију.

Дефиниција 2.4.1:

За линеарни оператор $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ кажемо да је **симетричан** ако важи $\vec{x} \cdot A(\vec{y}) = A(\vec{x}) \cdot \vec{y}$, за све $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$.

Теорема 2.4.2 Ако је $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ матрични запис линеарног оператора A у ортонормираној бази $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, онда је оператор A симетричан ако и само ако је његова матрица симетрична, тј. ако је $a_{12} = a_{21}$.

Доказ:

Нека су $\vec{x}$ и $\vec{y}$ произвољни вектори из $\mathbb{R}^2$: $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ и $\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2$. Тада је

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot A(\vec{y}) &= \vec{x} \cdot (y_1 A(\vec{e}_1) + y_2 A(\vec{e}_2)) = (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) \cdot (y_1 A(\vec{e}_1) + y_2 A(\vec{e}_2)) = \\ &= x_1 \vec{e}_1 y_1 A(\vec{e}_1) + x_1 \vec{e}_1 y_2 A(\vec{e}_2) + x_2 \vec{e}_2 y_1 A(\vec{e}_1) + x_2 \vec{e}_2 y_2 A(\vec{e}_2). \end{aligned} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \vec{y} \cdot A(\vec{x}) &= \vec{y} \cdot (x_1 A(\vec{e}_1) + x_2 A(\vec{e}_2)) = (y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2) \cdot (x_1 A(\vec{e}_1) + x_2 A(\vec{e}_2)) = \\ &= x_1 \vec{e}_1 y_1 A(\vec{e}_1) + x_2 \vec{e}_1 y_1 A(\vec{e}_2) + x_1 \vec{e}_2 y_2 A(\vec{e}_1) + x_2 \vec{e}_2 y_2 A(\vec{e}_2). \end{aligned} \quad (**)$$

Ако је оператор A симетричан, тада је $\vec{e}_1 A(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 A(\vec{e}_1)$, а како је $\vec{e}_1 A(\vec{e}_2) = a_{12}$ и $\vec{e}_2 A(\vec{e}_1) = a_{21}$ следи да је $a_{12} = a_{21}$.

Обрнуто, ако је $a_{12} = a_{21}$, онда следи $\vec{e}_1 A(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 A(\vec{e}_1)$ па из (*) и (**) следи да је $\vec{x} \cdot A(\vec{y}) = \vec{y} \cdot A(\vec{x})$ па је оператор A симетричан. ■

Теорема 2.4.3 Ако су сопствене вредности симетричног линеарног оператора реалне и међусобно различите, онда су одговарајући сопствени вектори међусобно ортогонални.

Доказ:

Нека су $\vec{x}$ и $\vec{y}$ сопствени вектори симетричног линеарног оператора A , којима одговарају различите сопствене вредности $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тада важи: $A(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{x}$ и $A(\vec{y}) = \lambda_2 \vec{y}$. Из услова симетричности $\vec{x} \cdot A(\vec{y}) = \vec{y} \cdot A(\vec{x})$, следи $\lambda_1(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \lambda_2(\vec{x} \cdot \vec{y})$. Како је $\lambda_1 \neq \lambda_2$, мора бити $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$. ■

3 ОПШТА ЈЕДНАЧИНА И КАНОНСКИ ОБЛИЦИ КРИВИХ ДРУГОГ РЕДА

3.1. КРИВЕ ДРУГОГ РЕДА, СВОЂЕЊЕ НА ГЛАВНЕ ОСЕ

Нека је $(O; \vec{i}, \vec{j})$ правоугли координатни систем у равни и нека је пресликавање $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисано полиномом

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}, \quad (3.1)$$

где су $a_{ij}, a_i, a \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, 3$, при чему је барем један од коефицијената a_{ij} различит од нуле.

Скуп $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ називамо **кривом другог реда**.

Једначину $f(x, y) = 0$ називамо **једначином криве S** .

Посебне примере кривих другог реда већ смо упознали, а то су:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, ab \neq 0\} \text{ — елипса;}$$

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, ab \neq 0\} \text{ — хипербола;}$$

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 2px, p \neq 0\} \text{ — парабола.}$$

Показаћемо да је скуп S увек једна од ових кривих, не рачунајући дегенерисане случајеве. До коначног резултата се долази свођењем једначине криве на такозвани канонски облик.

Полазимо од једначине криве другог реда

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (3.2)$$

у Декартовом координатном систему $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Циљ којем тежимо је класификација кривих другог реда, користећи резултате претходног одељка.

Кривој придружимо симетрични линеарни оператор у бази $(\vec{i}, \vec{j})$, чија је матрица

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$. Сопствене векторе тог оператора називамо **главним векторима криве**, а правце одређене тим векторима називамо **главним правцима криве**. Ако линеарни оператор придружен кривој има две различите реалне сопствене вредности, главни правци криве су међусобно ортогонални, а ако су сопствене вредности једнаке, тада су сви правци главни.

Пример 8.

Одредимо главне правце елипсе $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.

Матрица линеарног оператора елипсе има облик $\begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$, а одговарајућа карактеристична једначина $\begin{vmatrix} b^2 - \lambda & 0 \\ 0 & a^2 - \lambda \end{vmatrix} = (b^2 - \lambda)(a^2 - \lambda) = 0$.

Решења последње једначине су $\lambda_1 = a^2$ и $\lambda_2 = b^2$ сопствене вредности линеарног оператора. Главни правци елипсе су правци њених главних оса.

Ако је $a = b$, добијамо **кружницу** и у том случају је $\lambda_1 = \lambda_2$, па је за кружницу сваки правац главни. ◆

Теорема 3.1.1 Ако је у Декартовом правоуглом координатном систему $(O; \vec{i}, \vec{j})$ крива дата једначином $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, и λ_1 и λ_2 су сопствене вредности симетричног линеарног оператора придруженог тој кривој, тада постоји правоугли Декартов координатни систем $(O; \vec{i}', \vec{j}')$ у коме крива има једначину:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b = 0.$$

Доказ:

Пошто је оператор придружен кривој симетричан, његови јединични сопствени вектори $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$ су међусобно нормални. Ако је $\lambda_1 = \lambda_2$, тада за $\vec{i}'$ можемо узети било који јединични вектор, за $\vec{j}'$ њему нормалан јединични вектор. Тада у бази $(\vec{i}', \vec{j}')$ матрични запис оператора гласи $A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

Нека се вектор $\vec{i}'$ добије из $\vec{i}$ ротацијом за угао φ у позитивном смеру. Како је $\vec{j} \perp \vec{i}$, а $\vec{j}' \perp \vec{i}'$, вектор $\vec{j}'$ добија се из $\vec{j}$ истом ротацијом.

Можемо сматрати да је систем $(O; \vec{i}, \vec{j})$ добијен из система $(O; \vec{i}', \vec{j}')$ ротацијом за угао φ , па важи:

$$\vec{i}' = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi,$$

$$\vec{j}' = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi.$$

Координате у ова два система повезане су релацијама

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

Ако уврстимо ове релације у општу једначину криве другог реда

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

добиамо

$$a_{11}(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2 + 2a_{12}(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) + a_{22}(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2 + 2a_{13}(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi) + 2a_{23}(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) + a_{33} = 0.$$

Сређивањем и груписањем чланова по новим променљивама x' и y' , једначина има облик

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0.$$

Будући да су базни вектори $\vec{i}$ и $\vec{j}$ изабрани као сопствени вектори оператора придруженог квадратној форми, мешовити члан се елиминише ($a'_{12} = 0$), док коефицијенти уз квадратне чланове постају сопствене вредности ($a'_{11} = \lambda_1$, $a'_{22} = \lambda_2$).

Увођењем ознака $a'_{13} = b_1$, $a'_{23} = b_2$ и $a'_{33} = b$ у новом координатном систему $(O; \vec{i}, \vec{j})$ крива има облик

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b = 0.$$

■

Примену поступка приказаног у доказу претходне теореме називамо **свођењем** опште једначине криве **на главне осе**.

Ортогоналност сопствених вектора има велики значај у аналитичкој геометрији, јер омогућава избор новог координатног система у којем се квадратни чланови једначине криве другог реда раздвајају, односно, нестаје мешовити члан xy . На тај начин, једначина криве добија једноставнији облик, што представља основу за одређивање њеног типа и извођење канонског облика. Тиме се успоставља непосредна веза између линеарне алгебре и аналитичке геометрије, која представља предмет даљег разматрања елипсе, хиперболе и параболе.

За даљу анализу важна је детерминанта матрице $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$. Касније ће бити показано да вредност детерминанте не зависи од избора координатног система. У бази $(\vec{i}', \vec{j}')$, матрица је облика $A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, па је $\det A = \lambda_1 \lambda_2$.

Разликујемо два случаја

$$1^\circ \det A = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$$

Тада се једначина $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b = 0$, може записати у следећем облику:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + c = 0,$$

$$\text{где је } c = b - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2}.$$

Транслацијом

$$x'' = x' + \frac{b_1}{\lambda_1}, \quad y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

координатни почетак O се пресликава у тачку $O' = (-\frac{b_1}{\lambda_1}, -\frac{b_2}{\lambda_2})$.

У систему $(O; \vec{i}, \vec{j})$, скуп S има једначину $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0$.

Разликујемо два подслучаја:

а) $\det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ (λ_1, λ_2 су истог знака)

У овом случају, обе сопствене вредности имају исти знак (обе су позитивне или обе негативне). Због тога природа кривих другог реда зависи искључиво од вредности и знака слободног члана c .

Ако је $c \neq 0$, $\operatorname{sgn} c = -\operatorname{sgn} \lambda_1 = -\operatorname{sgn} \lambda_2$, то јест, када је знак параметра c супротан знаку сопствених вредности,

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = \frac{0}{:c},$$

дељењем једначине бројем c , добијамо канонски облик.

$$\frac{x''^2}{\frac{c}{-\lambda_1}} + \frac{y''^2}{\frac{c}{-\lambda_2}} = 1.$$

Како су изрази $\frac{c}{-\lambda_1}$ и $\frac{c}{-\lambda_2}$ строго позитивни, ова једначина представља елипсу (односно кружницу уколико је $\lambda_1 = \lambda_2$).

Када је $c = 0$, једначина се своди на $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0$. Будући да су λ_1 и λ_2 су истог знака, тада се скуп S састоји од једне тачке $(-\frac{b_1}{\lambda_1}, -\frac{b_2}{\lambda_2})$.

Ако је $c \neq 0$, $\operatorname{sgn} c = \operatorname{sgn} \lambda_1 = \operatorname{sgn} \lambda_2$, то јест, ако је параметар c истог знака као λ_1 и λ_2 , изрази $\frac{c}{-\lambda_1}$ и $\frac{c}{-\lambda_2}$ постају негативни. У овом случају је S празан скуп.

б) $\det A = \lambda_1 \lambda_2 < 0$ (λ_1, λ_2 су различитог знака)

Када су сопствене вредности различитог знака (једна је позитивна, а друга негативна), дискусију такође спроводимо у зависности од слободног члана.

Ако је $c \neq 0$,

пребацивањем слободног члана на десну страну

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0 / : -c,$$

и дељењем целе једначине са $-c$, једначина се своди на

$$\frac{x''^2}{\frac{c}{-\lambda_1}} + \frac{y''^2}{\frac{c}{-\lambda_2}} = 1.$$

Будући да су λ_1 и λ_2 различитог знака, имениоци ће имати супротне знаке без обзира на знак броја c . Један именилац ће увек бити позитиван, док ће други увек бити негативан, па дата једначина представља **хиперболу**.

Када је $c = 0$, једначина постаје $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0$. Како су λ_1 и λ_2 различитог знака, особина ове квадратне форме је да се може раставити на производ два линеарна полинома. Стога једначина представља **пар правих које се секу** у тачки $(-\frac{b_1}{\lambda_1}, -\frac{b_2}{\lambda_2})$.

$$2^\circ \det A = \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

Претпоставимо да је $\lambda_2 \neq 0$, тада се полазна једначина трансформише у облик

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b = 0.$$

Посматрајмо случај када је $b_1 \neq 0$. Допуњавањем до пуног квадрата по променљивој y' и груписањем чланова уз x' , добијамо једначину

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_1 \left(x' + \frac{b}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1}\right) = 0.$$

Транслацијом координатног система дефинисаном са

$$x'' = x' + \frac{b}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1}, \quad y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

координатни почетак O пресликава се у тачку $O' = (-\frac{b}{2b_1} + \frac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1}, -\frac{b_2}{\lambda_2})$.

У новом координатном систему $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$, крива има једначину

$$\lambda_2 y''^2 + 2b_1 x'' = 0.$$

Реч је о **параболи**.

Ако је $b_1 = 0$, једначина се своди на

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_2 y' + b = 0.$$

Допуњавањем до пуног квадрата по променљивој y' , претходна једначина добија облик

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + b - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0,$$

Транслацијом координатног система дефинисаног релацијама

$$x'' = x' \quad y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

координатни почетак O пресликава се у тачку $O' = (0, -\frac{b_2}{\lambda_2})$.

У новом координатном систему $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$, крива се може записати у канонском облику

$$\lambda_2 y''^2 + c = 0,$$

где је $c = b - \frac{b_2^2}{\lambda_2}$.

- Ако је $c\lambda_2 < 0$, скуп S чине две паралелне праве.
- Ако $c\lambda_2 > 0$, скуп S је празан.
- Ако $c = 0$, добија се права.

Претходном анализом доказано је следеће тврђење.

Тврђење 3.1.2

Нека је S скуп дефинисан једначином $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ у правоуглом координатном систему и нека је A матрица линеарног оператора придруженог тој једначини.

Тада важи

1°. Ако је $\det A > 0$, онда је S елипса, кружница, једна тачка или празан скуп.

2°. Ако је $\det A < 0$, онда је S хипербола или унија две праве које се секу.

3°. Ако је $\det A = 0$, онда је S парабола, унија две паралелне праве или празан скуп.

3.2. ИНВАРИЈАНТЕ КРИВЕ ДРУГОГ РЕДА

Нека је у правоуглом координатном систему $(O; \vec{i}, \vec{j})$ крива другог реда оређена једначином $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, где је бар један од коефицијената

$a_{ij} \neq 0$. Кривој другог реда придружимо симетрични линеарни оператор A чија је матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Траг матрице једнак је збиру елемената на главној дијагонали: $\text{tr} A = a_{11} + a_{22}$.

Детерминанта криве другог реда је $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Тврђење 3.2.1

$\text{tr}A$, $\det A$ и Δ су **инваријанте** скупа S у односу на групу свих изометрија равни, односно ове величине не зависе од избора координатног система.

Траг и детерминанта не зависе од ротације координатног система.

Доказ:

Ако је дата крива другог реда (3.2), тада је $\text{tr}A = a_{11} + a_{22}$, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ и

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{23}a_{13} - a_{13}^2a_{22} - a_{23}^2a_{11} - a_{12}^2a_{33}.$$

Доказујемо **инваријантност транслације**.

Нека је $x = x' + \alpha$, а $y = y' + \beta$.

Уврстимо x и y у почетну једначину

Када развијемо и групишемо, чланови уз x'^2 , $x'y'$ и y'^2 остају непромењени, то јест

$$a'_{11} = a_{11}, a'_{12} = a_{12} \text{ и } a'_{22} = a_{22}, \text{ па је } \text{tr}A' = a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22} = \text{tr}A,$$

$$\det A' = a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \det A.$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23} \\ a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13} & a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23} & a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2a_{13}\alpha + 2a_{23}\beta + a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot (-\alpha) \\ \cdot (-\beta) \\ + \end{matrix}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33} \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$
$$\cdot (-\alpha) \quad \cdot (-\beta) \quad +$$

Сада доказујемо **инваријантност код ротације**.

Нека је $x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$ и $y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$. Када их уврстимо у почетну једначину, добијамо да је квадратни део

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\sin^2\varphi,$$

$$a'_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cos^2\varphi,$$

$$a'_{12} = (a_{22} - a_{11})\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\sin^2\varphi & (a_{22} - a_{11})\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \\ (a_{22} - a_{11})\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) & (a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cos^2\varphi) \end{bmatrix}.$$

A' је такође симетрична матрица, одакле следи да је

$$\text{tr}A' = a'_{11} + a'_{22} = a_{11}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + a_{22}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = a_{11} + a_{22} = \text{tr}A.$$

Слично, директним рачунањем и коришћењем тригонометријског идентитета

$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, сви мешовити тригонометријски чланови се скраћују чиме се добија да је $\det A' = a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = a_{11}a_{22} - a^2_{12} = \det A$ и $\Delta' = \Delta$.

На крају нам остаје да докажемо **инваријантност рефлексije**.

Нека је $x = x'$ и $y = -y'$.

Заменом у једначину (3.2) добијамо једначину

$$a_{11}x^2 - 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x - 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

при чему је $a'_{11} = a_{11}$, $a'_{12} = -a_{12}$, $a'_{22} = a_{22}$, $a'_{13} = a_{13}$, $a'_{23} = -a_{23}$ и $a'_{33} = a_{33}$,

$\text{tr} A' = a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22} = \text{tr} A$, $\det A' = a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = a_{11}a_{22} - a^2_{12} = \det A$ и

$\Delta' = a_{11}a_{22}a_{33} + 2(-a_{12})(-a_{23})a_{13} - a^2_{13}a_{22} - (-a_{23})^2a_{11} - (-a_{12})^2a_{33} = \Delta$.

Свака изометрија у равни је састављена од транслагације, ротације и рефлексije. Овим смо доказали да су $\text{tr} A$, $\det A$ и Δ инваријанте за било коју изометрију. ■

3.3. ТИП КРИВЕ НА ОСНОВУ ЗНАКА ДЕТЕРМИНАНТЕ

До сада смо видели да знак детерминанте $\det A$ одређује тип криве:

- 1) $\det A > 0$ – крива елиптичког типа;
- 2) $\det A < 0$ – крива хиперболичког типа;
- 3) $\det A = 0$ – крива параболичког типа.

Криве елиптичког типа јесу: елипса, кружница, тачка и празан скуп.

Криве хиперболичког типа јесу: хипербола и пар правих које се секу.

Криве параболичког типа јесу: парабола, пар паралелних правих, права и празан скуп.

Покажимо сада како се помоћу инваријаната може тачно одредити о којој се кривој ради.

Ако је:

1° $\det A \neq 0$

видели смо да постоји координатни систем у коме крива има једначину

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0, \text{ то јест}$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0, \quad (3.4)$$

где су λ_1 и λ_2 сопствене вредности оператора A .

Ова једначина (3.4) назива се **канонски облик једначине криве**.

У овом случају

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 c,$$

односно

$c \cdot \det A = \Delta$, па једначину (3.4) можемо записати у облику

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\det A} = 0.$$

а) $\det A > 0$ и $\Delta \neq 0$ и $\lambda_1 \frac{\Delta}{\det A} < 0$ онда је крива **елипса** или **кружница**.

Пошто је $\det A > 0$, λ_1 и λ_2 су истог знака.

- ако је $\Delta \cdot \operatorname{tr} A < 0$, крива је **елипса**;
- ако је $\Delta \cdot \operatorname{tr} A > 0$, скуп је **празан**;
- ако је $\Delta = 0$, крива се своди на **једну тачку**.

б) $\det A < 0$ и $\Delta \neq 0$ онда је крива **хипербола**,

$\Delta = 0$, добијамо **пар правих које се секу**.

2° $\det A = 0$

крива је **параболичког** типа.

Према $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0$, постоји координатни систем у коме она има облик

$$\lambda_2 y^2 + 2b_1 x = 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad b_1 \neq 0,$$

Овај облик једначине назива се **канонски облик једначине параболе**.

У том случају

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -b_1^2 \lambda_2.$$

Ако је $\Delta \neq 0$ крива је **парабола**.

Ако је $\Delta = 0$ крива је **пар паралелних правих, једна права, или празан скуп**.

$\det A > 0$	$\Delta \neq 0$	$\Delta \cdot \text{tr } A < 0$ елипса, $\Delta \cdot \text{tr } A > 0$ празан скуп
	$\Delta = 0$	тачка
$\det A < 0$	$\Delta \neq 0$	хипербола
	$\Delta = 0$	пар укрштених правих
$\det A = 0$	$\Delta \neq 0$	парабола
	$\Delta = 0$	пар паралелних правих, права, празан скуп

Табела 1

Из Табеле 1 види се геометријски значај Δ .

Ако је $\Delta \neq 0$, крива је **недегенерисана**, односно елипса, кружница, хипербола или парабола.

Ако је $\Delta = 0$, крива је **дегенерисана**, односно точка, пар укрштених правих, пар паралелних правих, права или празан скуп.

4 МЕТОДОЛОГИЈА СКИЦИРАЊА И РЕШЕНИ ПРИМЕРИ

На основу чињеница из претходна два поглавља, можемо скицирати криву другог реда задату једначином $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

Поступак скицирања је следећи:

I Одређивање типа криве преко инваријанти:

Први корак у поступку анализе криве другог реда јесте одређивање њеног типа на основу инваријанти опште једначине

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Квадратном делу једначине придружује се симетрична матрица $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$.

У циљу класификације криве израчунавају се њене инваријанте. Најпре се одређују $\det A$,

$\text{tr} A$ и $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$. На основу ових вредности одређује се тип криве другог реда. У

зависности од њихових вредности може се закључити да ли дата једначина представља елипсу, хиперболу, параболу или неки од дегенерисаних случајева.

II Одређивање главних оса:

Претпоставимо да $\Delta \neq 0$ то јест да је крива недегенерисана.

Прво одређујемо сопствене вредности λ_1 и λ_2 матрице A , а затим одговарајуће сопствене векторе $\vec{i}' = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ и $\vec{j}' = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ добијамо решавањем одговарајућих система једначина.

$$(a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}y_1 = 0,$$

$$(a_{11} - \lambda_2)x_2 + a_{12}y_2 = 0,$$

$$a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda_1)y_1 = 0.$$

$$a_{12}x_2 + (a_{22} - \lambda_2)y_2 = 0.$$

Детерминанта сваког од система једнака је нули, па је први систем еквивалентан са једначином $(a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}y_1 = 0$,

а други систем са једначином $(a_{11} - \lambda_2)x_2 + a_{12}y_2 = 0$.

Одавде добијамо да је

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}, \quad \frac{y_2}{x_2} = \frac{\lambda_2 - a_{22}}{a_{12}}.$$

Дакле, коефицијенти правца главних оса новог координатног система $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$ дати су формулом

$$k_i = \frac{\lambda_i - a_{ii}}{a_{12}}, i = 1, 2.$$

III Одређивање центра или осе симетрије:

а) случај када крива има центар

Посматрајмо криву другог реда задату општом једначином, односно:

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Да бисмо испитали централну симетрију, вршимо транслагацију координатног система у нову тачку $C = (\alpha, \beta)$, која представља потенцијални центар симетрије. Формуле транслагације гласе:

$$x = x' + \alpha,$$

$$y = y' + \beta.$$

Према доказу Тврђења 3.2.1, заменом ових израза у полазну једначину, крива у новом координатном систему добија следећи облик:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + (a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13})x' + 2(a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23})y' + f(\alpha, \beta) = 0.$$

Да би тачка $C = (\alpha, \beta)$ била центар симетрије дате криве, нова једначина не сме садржати линеарне чланове по x' и y' . Због тога, коефицијенти уз x' и y' морају бити једнаки нули.

Приметимо да су коефицијенти уз линеарне чланове заправо половине парцијалних извода функције $f(x, y)$ израчунатих у тачки $C = (\alpha, \beta)$.

$$2(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = 0,$$

$$2(a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0.$$

Према томе, тачка $C = (\alpha, \beta)$ је центар симетрије криве ако и само ако њене координате задовољавају услов:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0.$$

Односно,

$$a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13} = 0 \quad \text{и} \quad a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23} = 0.$$

Пошто је $\det A \neq 0$, према Крамеровим правилима закључујемо да систем има јединствено решење.

У координатном систему $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$ крива другог реда има једначину облика

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0,$$

па се на основу тога лако може нацртати.

б) случај када крива нема центар

У овом случају, $\det A = 0$. Како је по претпоставци $\Delta \neq 0$, реч је о параболи.

Из услова $\det A = \lambda_1 \lambda_2 = 0$ следи да је тачно једна сопствена вредност једнака нули.

Нека је $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 \neq 0$. Према Тврђењу 3.2.1 применом трансформације координата - најпре ротације за угао φ , а затим транслацијом полазну једначину преводимо у канонски облик параболе

$$\lambda_2 y''^2 + 2p'x'' = 0.$$

Из доказа Тврђења 3.2.1 следи директна геометријска веза између новог координатног система и полазних коефицијената

1. Оса симетрије параболе одговара новој апсцисној оси ($y'' = 0$). Њен коефицијент правца дефинисан је сопственим вектором за сопствену вредност $\lambda_1 = 0$:

$$k_1 = \frac{-a_{11}}{a_{12}}.$$

Будући да оса симетрије пролази кроз теме $T(\alpha, \beta)$, њена једначина у ортогоналном систему дата је преко парцијалних извода:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + k_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0,$$

где је $k_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}$ коефицијент правца њој нормалне осе.

2. Тангента у темену параболе одговара новој координатној оси ($x'' = 0$). Њен коефицијент правца је k_2 , а пролази кроз теме $T(\alpha, \beta)$. Дату праву дефинише услов

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) + k_2 \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0.$$

3. Одређивање координате темена $T(\alpha, \beta)$:

Теме $T(\alpha, \beta)$ представља просечну тачку осе симетрије саме параболе. Због тога се координате (α, β) добијају као јединствено решење система који чине:

Једначина осе симетрије:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) + k_2 \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0, \text{ где је } k_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}.$$

Полазна једначина криве (услов да теме припада параболу):

$$f(\alpha, \beta) = 0.$$

Узастопном применом корака II и III б), лако се добија канонски облик параболе и она се може скицирати.

Показаћемо на примерима како то изгледа.

IV Скицирање:

Пример 9.

Скицирати криву задату једначином

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 24x + 24y = 0.$$

Решење:

Решавање започињемо одређивањем матрица и детерминанти криве ради класификације.

Матрица квадратне форме криве је

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Њена детерминанта износи $\det A = 8 \cdot 5 - (-2) \cdot (-2) = 36 > 0$ што нам указује на то да је крива елиптичког типа.

Како бисмо проверили да ли је крива недегенерисана, рачунамо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & -2 & -12 \\ -2 & 5 & 12 \\ -12 & 12 & 0 \end{vmatrix} = -1296 \neq 0.$$

Будући да је $\Delta \neq 0$, крива је недегенерисана, па закључујемо да дата једначина представља елипсу.

Сопствене вредности линеарног оператора добијамо решавањем карактеристичне једначине

$$\begin{vmatrix} 8 - \lambda & -2 \\ -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Развијањем детерминанте добијамо квадратну једначину по λ :

$$(8 - \lambda)(5 - \lambda) - 4 = 0,$$

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

Њена решења су сопствене вредности:

$$\lambda_1 = 9 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = 4.$$

Коефицијенти праваца главних оса одређују се помоћу сопствених вредности:

$$k_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{9-8}{-2} = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{4-8}{-2} = 2.$$

Ове вредности дефинишу нагибе главних оса елипсе у односу на координатни систем.

Координате центра симетрије $C(\alpha, \beta)$ добијају се решавањем система парцијалних извода:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0.$$

Односно,

$$8\alpha - 2\beta - 12 = 0,$$

$$-2\alpha + 5\beta + 12 = 0.$$

Решавањем овог система линеарних једначина добијамо координате центра:

$$\alpha = 1 \quad \text{и} \quad \beta = -2.$$

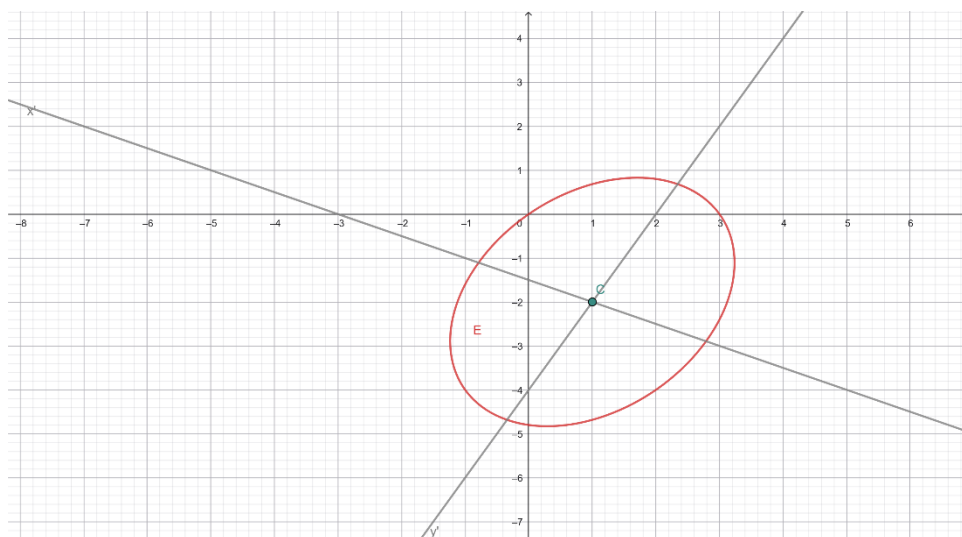
Дакле, центар елипсе се налази у тачки $C(1, -2)$

Канонска једначина криве у новом координатном систему гласи

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\det A} = 0,$$

$$9x'^2 + 4y'^2 = 36.$$

Сада у координатном систему, према израчунатим подацима, нацртамо елипсу.



Слика 8

Пример 10.

Скицирати криву задату једначином

$$17x^2 - 24xy + 7y^2 - 96x + 56y + 87 = 0.$$

Решење:

Решавање започињемо одређивањем матрица и детерминанти криве ради класификације.

Матрица квадратне форме криве је

$$A = \begin{bmatrix} 17 & -12 \\ -12 & 7 \end{bmatrix},$$

Њена детерминанта износи $\det A = 17 \cdot 7 \cdot (-12) \cdot (-12) = -25$, и с обзиром на то да је мања од нуле, закључујемо да је крива хиперболичког типа.

Како бисмо проверили да ли је крива недегенерисана, рачунамо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 17 & -12 & -48 \\ -12 & 7 & 28 \\ -48 & 28 & 87 \end{vmatrix} = 625 \neq 0,$$

Будући да је $\Delta \neq 0$, крива је недегенерисана, па закључујемо да дата једначина представља хиперболу.

Сопствене вредности линеарног оператора добијамо решавањем карактеристичне једначине

$$\begin{vmatrix} 17 - \lambda & -12 \\ -12 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Развијањем детерминанте добијамо квадратну једначину по λ :

$$(17 - \lambda)(7 - \lambda) - 144 = 0,$$

$$\lambda^2 - 24\lambda - 25 = 0.$$

Њена решења су сопствене вредности

$$\lambda_1 = 25 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = -1.$$

Коефицијенти правца главних оса одређују се помоћу сопствених вредности:

$$k_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{25 - 17}{-12} = -\frac{2}{3} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{-1 - 17}{-12} = \frac{3}{2}.$$

Ове вредности дефинишу нагибе главних оса хиперболе у односу на координатни систем.

Координате центра симетрије $C(\alpha, \beta)$ добијају се решавањем система парцијалних извода:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0.$$

Односно,

$$17x - 12y - 48 = 0,$$

$$-12x + 7y + 28 = 0.$$

Решавањем овог система линеарних једначина добијамо координате центра:

$$\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \beta = -4.$$

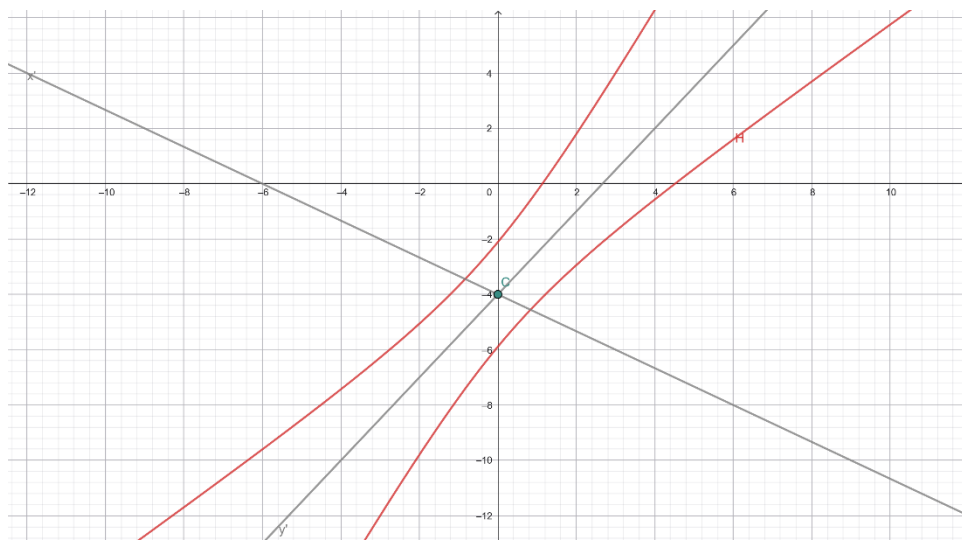
Дакле, центар хиперболе се налази у тачки $C(0, -4)$.

Канонска једначина криве у новом координатном систему гласи

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\det A} = 0,$$

$$25x'^2 - y'^2 = 25.$$

Сада у координатном систему, према израчунатим подацима, нацртамо хиперболу.



Слика 9

Пример 11.

Скицирати криву задату једначином

$$x^2 - 2xy + y^2 - 3x + y = 0.$$

Решење:

Решавање започињемо одређивањем матрица и детерминанти криве ради класификације.

Матрица квадратне форме криве је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Њена детерминанта износи $\det A = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 0$ што нам указује на то да је крива параболичког типа.

Како бисмо проверили да ли је крива недегенерисана, рачунамо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Будући да је $\Delta \neq 0$, крива је недегенерисана, па закључујемо да дата једначина представља параболу.

Сопствене вредности линеарног оператора добијају се решавањем карактеристичне једначине

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Развијањем детерминанте добијамо квадратну једначину по λ :

$$(1 - \lambda)^2 - 1 = 0,$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Њена решења су сопствене вредности

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = 2.$$

Коефицијенти правца главних оса одређују се помоћу сопствених вредности:

$$k_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{0 - 1}{-1} = 1 \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{2 - 1}{-1} = -1.$$

Ове вредности дефинишу нагибе главних оса хиперболе у односу на координатни систем.

Коефицијент правца нове осе x' износи -1 , а нове осе y' износи 1 .

Према $(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + k_2(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0$, координате темена задовољавају једначину

$$\left(x - y - \frac{3}{2}\right) - 1 \cdot \left(-x + y + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Односно

$$y = -x - 1.$$

Координате темена су решења система:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 3x + y = 0,$$

$$y = -x - 1.$$

Односно, $x = 0$ и $y = -1$, па је теме у тачки $C(0, -1)$.

Канонска једначина параболе гласи

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' = 0, \quad \text{где је } b_1 = \pm \sqrt{-\frac{\Delta}{\text{tr}A}}.$$

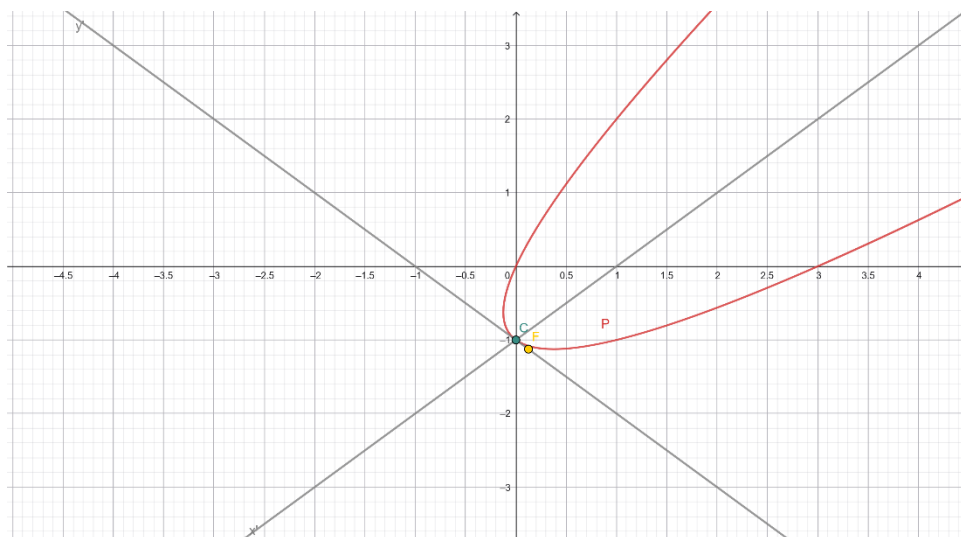
Будући да је $\text{tr}A = a_{11} + a_{22} = 1 + 1 = 2$, важи:

$$b_1 = \pm \sqrt{-\frac{-1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$2y'^2 \pm \sqrt{2}x' = 0,$$

$$y'^2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} x'.$$

Сада у координатном систему, према израчунатим подацима, нацртамо параболу.



Слика 10

Покажимо сада како се скицира дегенерисана крива другог реда.

Пример 12.

Скицирати криву

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0.$$

Решење:

Решавање започињемо одређивањем матрица и детерминанти криве ради класификације.

Матрица квадратне форме криве је

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Њена детерминанта износи $\det A = 4 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = 0$ што нам указује на то да је крива параболичког типа.

Како бисмо проверили да ли је крива недегенерисана, рачунамо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Будући да $\Delta = 0$, реч је о дегенерисаној кривој (пар паралелних права, права или празан скуп).

Покушаћемо да извршимо факторизацију криве.

Посматрајмо је као квадратну једначину по променљивој y .

$$y^2 - 2(2x + 1)y + (4x^2 + 4x - 3) = 0.$$

Одавде је

$$y = 2x + 1 \pm \sqrt{(2x + 1)^2 - (4x^2 + 4x - 3)},$$

$$y = 2x + 1 \pm \sqrt{4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 - 4x + 3},$$

$$y = 2x + 1 \pm 2.$$

Добијамо два решења:

$$y_1 = 2x + 3 \quad \text{и} \quad y_2 = 2x - 1.$$

Дакле, једначина криве се може записати у облику

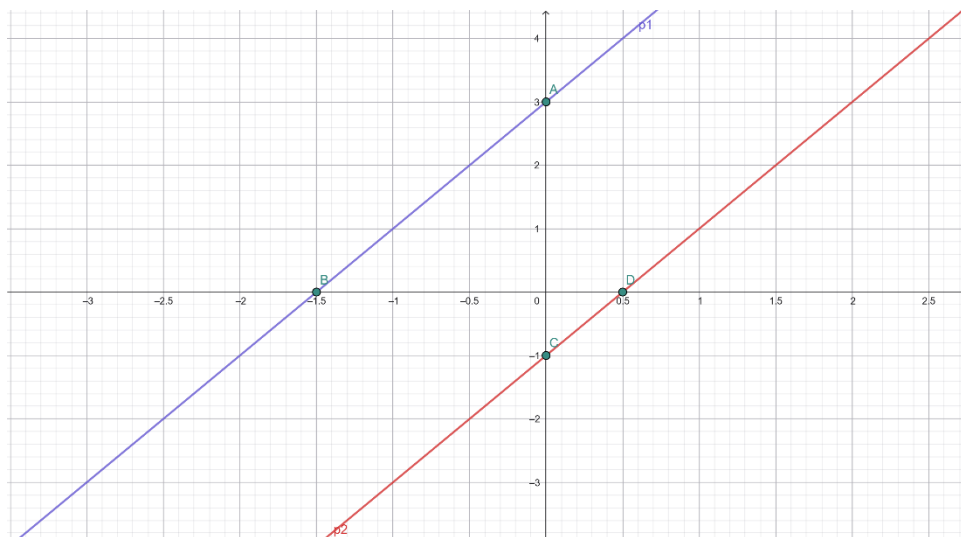
$$(2x - y + 3)(2x - y - 1) = 0,$$

што значи да се крива састоји од две паралелне праве

$$p_1: 2x - y + 3 = 0$$

и

$$p_2: 2x - y - 1 = 0.$$



Слика 11

Пример 13.

Скицирати криву

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 2 = 0.$$

Решење:

Решавање започињемо одређивањем матрица и детерминанти криве ради класификације.

Матрица квадратне форме криве је

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Њена детерминанта износи $\det A = 3 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) = 8$, а траг матрице $\operatorname{tr} A = 3 + 3 = 6$, што нам указује на то да је крива елиптичког типа.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0.$$

Пошто је крива елиптичког типа и важи $\Delta \cdot \operatorname{tr} A = 5 \cdot 6 = 30 > 0$, крива је имагинарна елипса, односно њена геометријска слика је празан скуп.

ЗАКЉУЧАК: У овом мастер раду разматран је поступак класификације и скицирања кривих другог реда задатих општом једначином, са посебним нагласком на примену метода линеарне алгебре у аналитичкој геометрији. Полазећи од опште једначине криве, приказан је систематичан поступак којим се, применом матричног записа, анализом сопствених вредности и сопствених вектора, као и одговарајућим ортогоналним трансформацијама, долази до њеног канонског облика.

Показано је да дијагонализација симетричне матрице квадратне форме представља кључни корак у поступку елиминације мешовитог члана, док се применом трансляције координатног система елиминишу линеарни чланови. На тај начин добија се једноставнији облик једначине, који омогућава непосредно препознавање типа криве, било да је реч о елипси, хиперболи, параболи или неком од дегенерисаних случајева.

Посебна вредност представљеног поступка огледа се у томе што је заснован на јединственом алгоритму који се може применити на сваку криву другог реда задату општом једначином. Без обзира на почетни облик једначине, алгоритам омогућава да се на систематичан и математички утемељен начин одреде све значајне геометријске карактеристике криве, као што су центар, главне осе, темена, правац оса симетрије и остали елементи неопходни за њено прецизно скицирање.

Практични примери обрађени у раду потврдили су применљивост изложене теорије и показали да су методе линеарне алгебре изузетно ефикасан алат у решавању проблема аналитичке геометрије. Кроз њих је јасно илустрована повезаност апстрактних алгебарских појмова са геометријском интерпретацијом кривих, што доприноси бољем разумевању њихове структуре и особина.

Поред теоријског значаја, резултати рада имају и практичну вредност. Представљени алгоритам може послужити као основа за развој рачунарских програма за аутоматску класификацију и графичко приказивање кривих другог реда, као и методичка подршка у настави аналитичке геометрије и линеарне алгебре. Његова систематичност омогућава једноставнију примену у образовном процесу, али и у областима у којима се користе геометријски модели, као што су техничке и природне науке.

Може се закључити да примена сопствених вредности, сопствених вектора и ортогоналних трансформација представља ефикасан приступ проучавању кривих другог реда. Повезивањем линеарне алгебре и аналитичке геометрије добија се јединствен и логички доследан поступак који омогућава потпуно разумевање структуре криве и њен прецизан геометријски приказ. На тај начин остварен је основни циљ рада – формулисање јасног и универзалног алгоритма који, полазећи од опште једначине, води до канонског облика и омогућава поуздано скицирање свих кривих другог реда.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Павковић Б. и Вељан Д. „Елементарна математика II“, Загреб 1995.
- [2] Георгијевић Д. и Обрадовић М. „Математка са збирком задатака за III разред средње школе“, Београд 1994.
- [3] Калајџић Г. „Линеарна алгебра“, Математички факултет, Београд.
- [4] Андрејић В. „Низа геометрија“, Математички факултет, Београд.
- [5] Шукиловић Т. и Вукмировић С. „Геометрија за информатичаре“, Математички факултет, Београд.
- [6] Boyer, C. B. (2004). History of Analytic Geometry. Mineola, New York: Dover Publications.