

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Емина З. Мишић

БАРИЦЕНТРИ И БАРИЦЕНТРИЧНЕ
КООРДИНАТЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ
У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

мастер рад

Београд, 2026.

Ментор:

доц. др Милош ЂОРИЋ, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Тијана ШУКИЛОВИЋ, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

доц. др Маја РОСЛАВЦЕВ, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Mojoj uopogući

Наслов мастер рада: Барицентри и барицентричне координате у настави математике у средњој школи

Резиме: У раду се разматрају барицентар и барицентричне координате као значајни појмови афине геометрије, са посебним освртом на њихову примену у настави математике у средњој школи.

Најпре су представљени основни појмови и структуре афине геометрије који чине теоријску основу рада. Разматрани су афини простори и потпростори, афини репери и координате, афина пресликавања и оператори, као и барицентричне комбинације, афини омотач и конвексни скупови. Посебна пажња посвећена је појму барицентра, његовој скаларној и векторској карактеризацији путем Лајбницових функција, као и његовим основним својствима и геометријској интерпретацији.

У наставку су уведене и проучене барицентричне координате, при чему је приказана њихова веза са афиним пресликавањима и њихова примена на представљање значајних тачака троугла и тетраедра. За одабране значајне тачке троугла одређене су барицентричне координате и показане њихове примене у проучавању различитих геометријских односа.

Завршни део рада посвећен је задацима у којима се претходно уведени појмови и резултати примењују на решавање геометријских проблема различитог нивоа сложености. Обрађени су проблеми везани за Лајбницову теорему и барицентар, геометријска места тачака и тежишта, као и поједини проблеми из еуклидске геометрије у којима барицентар и барицентричне координате представљају ефикасан алат за решавање.

Рад има за циљ да покаже да барицентар и барицентричне координате представљају погодан инструмент за повезивање различитих геометријских појмова и развијање дубљег разумевања геометрије, као и да њихова примена у решавању различитих геометријских проблема може представљати користан методички ресурс у настави математике.

За израду графичких приказа коришћен је софтвер GeoGebra.

Кључне речи: барицентар, барицентричне координате, афина геометрија, Лајбнице функције, троугао, тетраедар, настава математике

Садржај

1	Афина геометрија	1
1.1	Афини простор	2
1.2	Афини потпростори	7
1.3	Барицентар	11
1.4	Барицентар у настави физике у средњој школи	24
1.5	Барицентричне координате	29
1.6	Афина пресликавања	31
1.7	Барицентричне комбинације и афини омотач	44
1.8	Конвексни подскупови афиног простора	48
1.9	Оријентација	51
1.10	Распоред тачака	52
1.11	Полуправа и полупростор	55
1.12	Класичне теореме афине геометрије	56
2	Барицентар и барицентричне координате у настави математике у средњој школи	60
2.1	Барицентар и барицентричне координате у афином простору димензије два	60
2.2	Барицентар и барицентричне координате у афином простору димензије три	75
3	Задаци	78
3.1	Лајбницова теорема	78
3.2	Барицентар и барицентричне координате	79
3.3	Геометријска места тачака	85
3.4	Тежиште	89
3.5	Афина пресликавања	97

САДРЖАЈ

3.6 Такмичарски задаци	104
Библиографија	112

Глава 1

Афина геометрија

Излагање у овом поглављу засновано је углавном на материјалу изложеном у књизи [7], уз допуне из других извора наведених у литератури.

Проучавање геометрије природно је започети од еуклидске геометрије, која представља један од основних оквира за изучавање геометријских појмова и односа. Она се заснива на прве четири групе аксиома апсолутне геометрије, заједно са Плејферовом аксиомом паралелности. У оквиру еуклидске геометрије разматрају се основни појмови и односи као што су инциденција, растојање, дужина, угао, непрекидност и распоред. Поставља се питање које од наведених појмова можемо изоставити, а да при томе и даље очувамо структуру неопходну за изучавање геометрије. Да бисмо одговорили на ово питање, потребно је испитати која од наведених геометријских карактеристика зависе од метрике, а које од ње не зависе. Није тешко уочити да се оне могу поделити у две дисјунктне групе: на оне које се ослањају на метрику и на оне које од ње уопште не зависе. Дакле, ако из еуклидске геометрије изоставимо метрику, остаје велики број геометријских својстава која се ослањају искључиво на појмове инциденције и паралелности. Издвајањем овог дела еуклидске геометрије добијамо **афину геометрију**.

Из свега претходног можемо извести следећи важан закључак: афина геометрија не представља нову геометрију у којој се уводе нови геометријски објекти, већ другачији начин посматрања постојећих објеката еуклидске геометрије. Напоменимо да се, осим на описани синтетички начин, афина геометрија може развијати и потпуно еквивалентним аналитичким приступом, чија је основа линеарна алгебра. Ради потпуности, у овом раду ћемо комбиновати оба приступа. Иако је главни фокус на синтетичком приступу,

аналитички приступ биће коришћен тамо где је то потребно ради формализације и потпунијег излагања.

1.1 Афини простор

Еуклидски простор представља геометријски простор чији су основни објекти тачке, праве и равни, а њихови међусобни односи одређени су одговарајућим системом аксиома. Ти односи обухватају инциденцију, распоред, паралелност и метричке особине. Уколико се ограничимо на оне односе који не зависе од метрике, односно на инциденцију, распоред и паралелност, добијамо структуру коју називамо афиним простором.

Како бисмо прецизно описали структуру афиног простора, послужићемо се појмовима линеарне алгебре. Најпре ћемо дати мотивацију за увођење афиног простора, а затим прећи на његову формалну дефиницију. Посматрајмо два различита скупа $\mathcal{A}$ и $\mathbb{V}$, при чему је $\mathcal{A}$ скуп тачака, а $\mathbb{V}$ векторски простор. Претпоставимо да сваком пару (A, u) , где је $A \in \mathcal{A}$ и $u \in \mathbb{V}$, одговара тачка $A + u \in \mathcal{A}$. Ову операцију можемо интуитивно разумети као померање тачке A за вектор u . Другим речима, вектор u одређује транслацију којом се тачка A пресликава у тачку $A + u$. При томе, узастопна померања за векторе u и v одговарају једном померању за вектор $u + v$. На тај начин се структура векторског простора $\mathbb{V}$ природно повезује са померањима тачака скупа $\mathcal{A}$. Ова веза представља основу за формално увођење појма афиног простора.

Под **афиним простором**, над датим пољем $\mathbb{K}$, подразумевамо сваку уређену тројку $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, +)$ неког скупа $\mathcal{A}$ - чије елементе зовемо **тачкама**, извесног векторског простора $\mathbb{V}$ над уоченим пољем $\mathbb{K}$ и једног пресликавања

$$(A, u) \mapsto A + u \quad (A \in \mathcal{A}, u \in \mathbb{V})$$

скупа $\mathcal{A} \times \mathbb{V}$ у сам скуп $\mathcal{A}$, које задовољава следеће услове или аксиоме:

A1. $A + \vec{0} = A$ за сваку тачку A ,

A2. $(A + u) + v = A + (u + v)$ за сваку тачку A и свако $u, v \in \mathbb{V}$,

A3. За сваки пар тачака A и B постоји тачно један вектор u из $\mathbb{V}$, такав да је $B = A + u$.

Јединствени вектор $u \in \mathbb{V}$ из **(А3)** за који је $B = A + u$ краће обележавамо са $\overrightarrow{AB}$ или са $B - A$, тако да за свако $A, B \in \mathcal{A}$ можемо писати

$$B = A + \overrightarrow{AB}.$$

Специјално, за $B = A$ је $A = A + \overrightarrow{AA}$, одакле из **(А1)** следи $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Из **(А2)** добијамо $A + \overrightarrow{AC} = C = B + \overrightarrow{BC} = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$ за произвољне три тачке $A, B, C \in \mathcal{A}$, одакле **(А3)** даје **Шалов идентитет**,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Специјално за $C = A$ је $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$, односно $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Додатно, како је $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ то важи **закон паралелограма**, односно важи да је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ако и само ако је $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Векторски простор $\mathbb{V}$ је **директриса афиног простора**, а **димензија афиног простора** је димензија његове директрисе, односно $\dim \mathcal{A} := \dim \mathbb{V}$. За нас су од интереса једино афини простори *коначне* димензије. На пример, афини простори димензије један које називамо **афиним правима** и афини простори димензије два које називамо **афиним равнима**. За сваки природни број n и свако поље $\mathbb{K}$ постоји и неки афини простор $\mathcal{A}$ над тим пољем, чија је димензија управо n .

Ради једноставности често ћемо афини простор $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, +)$ обележавати само са $\mathcal{A}$.

Нека је $\mathbb{V}$ било који векторски простор над пољем $\mathbb{K}$ и нека је $\mathcal{A} = \mathbb{V}$. Тада је сабирање векторског простора $\mathbb{V}$, односно $(u, v) \mapsto u + v$, једно пресликавање скупа $\mathcal{A} \times \mathbb{V}$ у скуп $\mathcal{A}$ и одговарајућа тројка

$$(\mathcal{A}, \mathbb{V}, +) = (\mathbb{V}, \mathbb{V}, +)$$

је један афини простор, са унапред датом директрисом $\mathbb{V}$, у коме се тачке и вектори подударају. Лако се може проверити да важе аксиоме **(А1)**, **(А2)** и **(А3)**.

Овако одређен афини простор означавамо са $\mathbb{V}_{af}$ или чешће само са $\mathbb{V}$ и називамо **(стандардном) афинизацијом** векторског простора $\mathbb{V}$. Врло често се у применама узима $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$, па је тако $\mathbb{K}_{af}^n$ један афини простор димензије n са унапред датим пољем скалара $\mathbb{K}$.

Векторизација и афини репер

Међу векторима једног векторског простора $\mathbb{V}$, његов нула вектор има специфичну и у извесном смислу централну позицију. Тако, на пример, сваки векторски потпростор простора $\mathbb{V}$ мора да садржи и његов нула вектор $\vec{0}$. И при графичким илустрацијама, ненула векторе представљамо стрелицама са заједничким почетком у нула вектору $\vec{0}$.

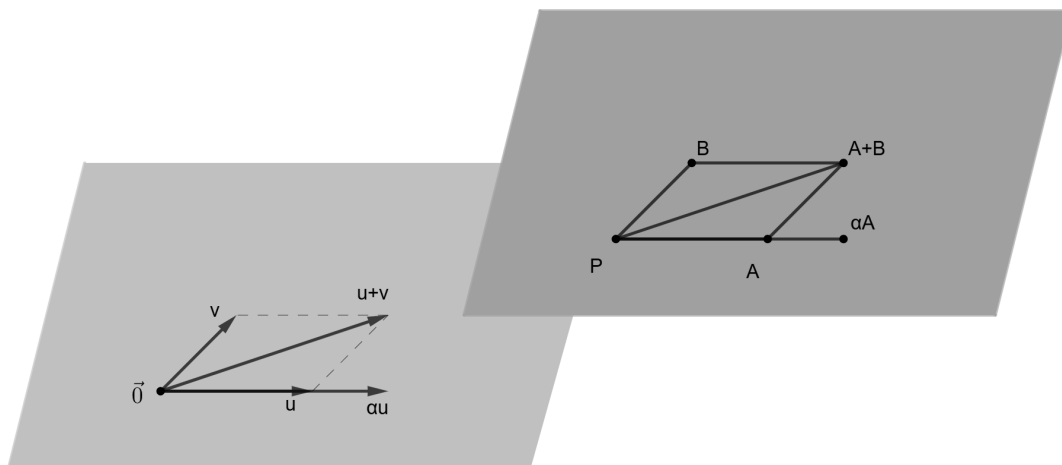
За разлику од тога, ако је $\mathcal{A}$ афини простор са директрисом $\mathbb{V}$, ниједна од његових тачака нема неко унапред дато својство које немају и оне преостале тачке из $\mathcal{A}$. При том, ако је P било која тачка из $\mathcal{A}$, према (A3), са $L : u \mapsto P + u$ је дефинисана једна бијекција L векторског простора $\mathbb{V}$ на скуп $\mathcal{A}$, где је $A = P + u$ и $B = P + v$. То посебно значи да је $\mathcal{A} = \{P + u : u \in \mathbb{V}\}$, као и да су са

$$(P + u) + (P + v) = P + (u + v), \quad \alpha(P + u) = P + \alpha u$$

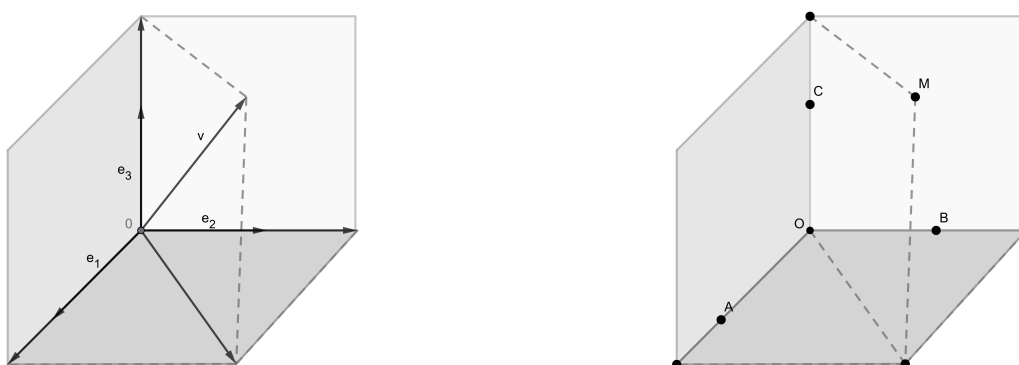
дефинисани, како једна бинарна операција $(A, B) \mapsto A + B$, тако и једно множење скаларима $(\alpha, A) \mapsto \alpha A$ у самом скупу тачака $\mathcal{A}$. Уз то је тада јасно да је пресликавање L и изоморфизам векторског простора $\mathbb{V}$ на тако одређену структуру $(\mathcal{A}, +, \cdot) = \mathcal{A}_P$. Отуда је и сама та структура један векторски простор $\mathcal{A}_P$ над пољем $\mathbb{K}$, у коме су сви вектори управо све тачке из $\mathcal{A}$. Он је изоморфан векторском простору $\mathbb{V}$ и његов нула вектор је уочена тачка P . Зовемо га и **векторизацијом** самог афиног простора у тој тачки P (Слика 1.1).

Према томе, ако је O фиксирана тачка афиног простора $\mathcal{A}$ над пољем $\mathbb{K}$ и са директрисом $\mathbb{V}$, за сваку тачку M из $\mathcal{A}$ постоји тачно један вектор u из $\mathbb{V}$ за који је $M = O + u$. С друге стране, ако је $e = [e_1, \dots, e_n]$ било која база векторског простора $\mathbb{V}$, тада постоји и тачно једна n -торка $u_e = (x_1, \dots, x_n)$ скалара из $\mathbb{K}$ за коју је $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, а тиме и

$$M = O + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n. \tag{1.1}$$



Слика 1.1: Векторизација афиног простора у тачки P



Слика 1.2: Афини репер

Третирајући u_e као једну колону из $\mathbb{K}^n$, те релације се свODE на $u = eu_e$ и $M = O + eu_e$. Уз то, за свака два вектора u, v из $\mathbb{V}$ и свако α из $\mathbb{K}$ важи

$$(u + v)_e = u_e + v_e \quad \text{и} \quad (\alpha u)_e = \alpha u_e$$

па је са $L : u \mapsto u_e$ дефинисан један изоморфизам векторског простора $\mathbb{V}$ на векторски простор $\mathbb{K}^n$.

У вези са тим, уређени пар $Oe = (O, e)$ неке тачке O и било које базе $e = [e_1, \dots, e_n]$ директрисе $\mathbb{V}$ афиног простора $\mathcal{A}$ зовемо **афиним репером** или само **репером** - са *почетком* O и *базом* e - у том афиним простору. Уз то, ако је M било која тачка из $\mathcal{A}$, тада коlonу координата вектора $u = M - O$ у односу на ту базу e означавамо са

$$M_{Oe} = (M - O)_e = \overrightarrow{OM}_e \quad (1.2)$$

и зовемо **колоном координата** саме те тачке M у односу на уочени репер Oe . Другим речима, то је једина колона $M_{Oe} = (x_1, \dots, x_n)$ скалара из $\mathbb{K}$ за коју је $M = O + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. У матричној форми, та релација такође значи да је тада и

$$M = O + e M_{Oe} \quad (1.3)$$

за сваку тачку M . При том је са $M \mapsto M_{Oe}$ дефинисана једна бијекција афиног простора $\mathcal{A}$ на простор $\mathbb{K}^n$ и за сваке две његове тачке M и S важи

$$\overrightarrow{SM}_e = (M - S)_e = M_{Oe} - S_{Oe}. \quad (1.4)$$

Наиме, ако је $M = O + u$ и $S = O + v$, биће $u - v = \overrightarrow{SM}$, па се тада и сама та релација своди на $(u - v)_e = u_e - v_e$.

Наравно, у општем случају, колоне координата тачке M у односу на различите репере не морају бити једнаке. У вези са тим, нека је и $S\tilde{e}$ неки репер простора $\mathcal{A}$, са почетком S и базом $\tilde{e} = [\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n]$. Тада, за уочене базе e и $\tilde{e}$ простора $\mathbb{V}$, постоје и јединствени скалари α_{rs} за које је

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{e}_1 = \alpha_{11} e_1 + \dots + \alpha_{n1} e_n \\ \vdots \\ \tilde{e}_n = \alpha_{1n} e_1 + \dots + \alpha_{nn} e_n \end{array} \right\}, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

а тиме и тачно једна матрица A над пољем $\mathbb{K}$ - **матрица преласка** са базе e на базу $\tilde{e}$, за коју је $\tilde{e} = eA$. Она је инверзибилна и њене колоне су управо колоне координата вектора из $\tilde{e}$ у односу на базу e . Уз то, из $u = e u_e$ $u = \tilde{e} u_{\tilde{e}} = e A u_{\tilde{e}}$ следи да је тада и

$$u_e = A u_{\tilde{e}} \quad (u \in \mathbb{V}).$$

Посебно, ако је ту $u = \overrightarrow{SM}$, тада је $u_{\tilde{e}} = \overrightarrow{SM}_{\tilde{e}} = M_{S\tilde{e}}$ управо колона координата тачке M у односу на репер $S\tilde{e}$. Тиме се и сама релација (1.4) своди на

$$M_{Oe} = S_{Oe} + A \cdot M_{S\tilde{e}} \quad (\tilde{e} = eA).$$

Другим речима, ако је $X_0 = S_{Oe}$ колона координата почетка S новог репера $S\tilde{e}$ у односу на стари репер Oe и A матрица преласка са базе e на нову базу $\tilde{e}$, тада је и

$$X = X_0 + A\tilde{X}, \quad \det A \neq 0, \quad (1.5)$$

где су $X = M_{Oe}$ и $\tilde{X} = M_{S\tilde{e}}$ колоне координата произвољне тачке M у односу на уочене репере Oe и $S\tilde{e}$ афиног простора $\mathcal{A}$.

И обрнуто, за дати репер Oe афиног простора $\mathcal{A}$ и за дату колону X_0 и инверзибилну матрицу A реда $n = \dim \mathcal{A}$ над пољем скалара $\mathbb{K}$ постоји тачно један репер $S\tilde{e}$, такав да за две колоне X и $\tilde{X}$ важи (1.5), ако и само ако су оне, тим редом и колоне координата исте тачке M у односу на те репере Oe и $S\tilde{e}$. То је управо репер са почетком $S = O + eX_0$ и базом $\tilde{e} = eA$. При том се, за назначену матрицу A и

$$X_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix},$$

матрична релација $X = X_0 + A\tilde{X}$ даље своди на систем скаларних релација

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \alpha_{11}\tilde{x}_1 + \dots + \alpha_{1n}\tilde{x}_n \\ \vdots \\ x_n &= \alpha_n + \alpha_{n1}\tilde{x}_1 + \dots + \alpha_{nn}\tilde{x}_n \end{aligned} \right\}$$

над пољем $\mathbb{K}$. Уз напомену да је ту матрица $A = [\alpha_{rs}]$ и инверзибилна, тим формулама је дат узајамни однос између координата произвољне тачке M у односу на било које репере Oe и $S\tilde{e}$ афиног простора $\mathcal{A}$ за које је $S_{Oe} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{e} = eA$.

1.2 Афини потпростори

Природни примери афиних потпростора су праве и равни. Формално, појам афиног потпростора дефинишемо на следећи начин.

Нека је $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathbb{V}, +)$ било који афини простор над пољем $\mathbb{K}$. За непразан скуп Π тачака из $\mathcal{A}$ кажемо да је један **афини потпростор** или само **потпростор** у том афином простору, ако постоји и неки векторски потпростор $\mathbb{U}$ од $\mathbb{V}$, такав да је са

$$(P, u) \mapsto P + u \quad (P \in \Pi, u \in \mathbb{U})$$

дефинисано и једно пресликавање $+$ скупа $\Pi \times \mathbb{U}$ у тај скуп Π , где $P + u$ има исто значење као и у самом афиним простору $\mathcal{A}$. Јасно је да је тада и тројка $(\Pi, \mathbb{U}, +)$ један афини простор - са директрисом $\mathbb{U}$, па је тако и

$$\Pi = \{A + u : u \in \mathbb{U}\}$$

то јест $\Pi = A + \mathbb{U}$ за бар једну, а тиме и сваку тачку A из скупа Π . Из истих разлога је и $\mathbb{U} = \Pi - A$.

Тврђење 1. Непразан скуп Π тачака из афиног простора $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, +)$ је и афини потпростор у $\mathcal{A}$, ако и само ако је, за бар једну тачку A из Π , скуп

$$\mathbb{U} = \{\overrightarrow{AP} : P \in \Pi\} \quad (1.6)$$

један векторски потпростор у $\mathbb{V}$. У том случају је $\Pi = A + \mathbb{U}$, а тиме и $\mathbb{U} = \{P - A : P \in \Pi\}$ за сваку тачку A из Π .

Доказ. Пре свега, сама релација $\overrightarrow{AP} = u$ значи да је $P = A + u$. Тиме је и нека тачка $P = A + u$ у скупу Π , ако и само ако је u неки вектор из назначеног скупа $\mathbb{U}$, па ако је $\mathbb{U}$ векторски потпростор од $\mathbb{V}$, тада је и скуп Π један афини потпростор од $\mathcal{A}$.

Отуда и тврђење у целини, јер ако је скуп Π афини потпростор од $\mathcal{A}$ и A било која тачка из Π , према претходном одељку, његова директриса је управо назначени скуп $\mathbb{U}$. $\square$

Сваки афини потпростор Π од $\mathcal{A}$ је једнозначно одређен једном, иначе било којом својом тачком A и својом директрисом $\mathbb{U}$. При том, за сваку тачку $P \in \mathcal{A}$ важи

$$P \in \Pi \iff P - A \in \mathbb{U} \iff \overrightarrow{AP} \in \mathbb{U},$$

па у том смислу пишемо

$$\Pi = A + \mathbb{U} = \{A + u : u \in \mathbb{U}\}, \quad (1.7)$$

као и $\mathbb{U} = \Pi - A$. То такође значи и да, за сваку тачку A из $\mathcal{A}$ и сваки потпростор $\mathbb{U}$ од $\mathbb{V}$, постоји тачно један афини потпростор $\Pi = A + \mathbb{U}$, који садржи ту тачку A и чија је директриса управо $\mathbb{U}$. Уз то, ако је $[e_1, \dots, e_k]$ нека база потпростора $\mathbb{U}$, сваки његов вектор u је облика $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k$ за неке скаларе α_r из $\mathbb{K}$, па се тако и (1.7) своди на

$$\Pi = \{A + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}.$$

У том случају пишемо и $\langle A, e_1, \dots, e_k \rangle$. Тако, на пример, ако су u и v било који вектори из $\mathbb{V}$, тада је

$$\langle A, u, v \rangle = \{A + \alpha u + \beta v : \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$$

афини потпростор од $\mathcal{A}$, који садржи тачку A и чија је директриса линеарни омотач $\mathbb{U} = \Omega(u, v)$ тих вектора u и v . То је тачно скуп свих тачака P простора $\mathcal{A}$, таквих да је $\overrightarrow{AP} = \alpha u + \beta v$ за бар један пар скалара α и β .

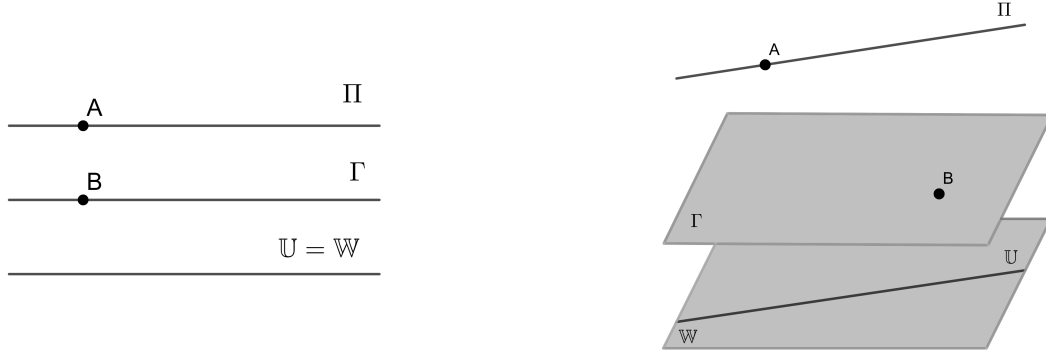
Димензију афиног потпростора дефинишемо аналогно димензији афиног простора. Афини потпростор димензије један зовемо **права**, а димензије два зовемо **раван**. Афини потпростор кодимензије један зовемо **хиперраван**.

Нека су $\Pi = A + \mathbb{U}$ и $\Gamma = B + \mathbb{W}$ афини потпростори простора $\mathcal{A}$ једнаких димензија. Кажемо да су **паралелни** и пишемо $\Pi // \Gamma$, ако имају исте директрисе. Како је тада $\mathbb{U} = \mathbb{V}$, имамо $\Pi = A + \mathbb{U}$ и $\Gamma = B + \mathbb{U}$ за произвољне $A \in \Pi$ и $B \in \Gamma$, па је зато Γ добијено из Π транслацијом за вектор $\overrightarrow{AB}$. За афине потпросторе различитих димензија можемо дозволити и релаксиранију варијанту паралелности. Тада кажемо да су афини потпростори паралелни ако је директриса једног од њих садржана у директриси оног другог, односно:

$$\Pi // \Gamma \iff \mathbb{U} \subset \mathbb{W} \vee \mathbb{W} \subset \mathbb{U}.$$

Тада такође кажемо и да је афини потпростор Π паралелан, како својој директриси $\mathbb{U}$, тако и директриси потпростора Γ . При том је тако дефинисана релација $//$ рефлексивна и симетрична, али не мора бити и транзитивна у класи свих афиних потпростора од $\mathcal{A}$. Такође, ако су уочени афини потпростори Π и Γ паралелни, онда су они, или дисјунктни, или је један од њих садржан у оном другом. Наиме, ако имају бар једну заједничку тачку P , биће $\Pi = P + \mathbb{U}$, као и $\Gamma = P + \mathbb{W}$, па следи да је тада и $\Pi \subset \Gamma \vee \Gamma \subset \Pi$.

То посебно значи да, за разлику од векторских простора, два афина потпростора могу бити и дисјунктна. Ако, уз то, нису ни паралелни, тада за њих кажемо и да су **мимоилазни**.



Слика 1.3: Паралелни афини потпростори

Тврђење 2. Пресек два афина потпростора $\Pi = A + \mathcal{U}$ и $\Gamma = B + \mathcal{W}$ у афину простору $\mathcal{A}$ је, или празан, или је и сам један афини потпростор са директрисом $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$. И слично за пресек било које непразне фамилије $\mathcal{F}$ афиних потпростора од $\mathcal{A}$.

Доказ. Ако потпростори Π и Γ имају и неку заједничку тачку, на пример P , биће $\Pi = P + \mathcal{U}$, као и $\Gamma = P + \mathcal{W}$, па сваки од њих садржи и потпростор $\Sigma = P + \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$. Самим тим је и $\Sigma \subset \Pi \cap \Gamma$.

С друге стране, ако је M било која тачка из $\Pi \cap \Gamma$, то јест из сваког од потпростора Π и Γ , према (1.7) постоје и вектори $u \in \mathcal{U}$ и $v \in \mathcal{W}$ за које је $M = P + u$, као и $M = P + v$. Наравно, ту мора бити $u = v$, а тиме и $u \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$. Отуда је та тачка M и у потпростору Σ , то јест $\Pi \cap \Gamma \subset \Sigma$, па је тако и $\Pi \cap \Gamma = \Sigma$.

На исти начин следи и да је пресек Σ било које фамилије $\mathcal{F}$ потпростора $\Pi_s = A_s + \mathcal{U}_s$ ($s \in S$) потпростора $\mathcal{A}$, са скупом индекса S , или празан, или такође један потпростор у $\mathcal{A}$.

Наиме, како је пресек $\mathcal{U}$ векторских потпростора $\mathcal{U}_s$ такође векторски потпростор у $\mathbb{V}$, уз претходну симболику, сада за свако s постоји вектор $u_s \in \mathcal{U}_s$ за који је $M = P + u_s$. Наравно, тада мора бити $u_r = u_s = u$ за свако r, s из S , па је тако $u \in \mathcal{U}$, а тиме и $\Sigma = P + \mathcal{U}$. $\square$

Ако је $\mathbb{S}$ било који непразан скуп тачака из афиног простора $\mathcal{A}$, фамилија $\mathcal{F}$ свих афиних потпростора од $\mathcal{A}$ који садрже $\mathbb{S}$ није празна, јер садржи сам простор $\mathcal{A}$, па је и њихов пресек Σ један афини потпростор од $\mathcal{A}$ за који је $\mathbb{S} \subset \Sigma$.

У односу на инклузију, ту је Σ управо најмањи афини потпростор простора $\mathcal{A}$ који садржи уочени скуп $\mathbb{S}$. Зовемо га и **афиним омотачем** скупа $\mathbb{S}$ и означавамо са $\Sigma = \langle S \rangle$. За коначан скуп $\mathbb{S} = \{A_0, \dots, A_n\}$ такође говоримо и о **афином омотачу** самих тачака $A_0, \dots, A_n$ и пишемо $\langle S \rangle = \langle A_0, \dots, A_n \rangle$.

Тако, на пример, ако су A и B две различите тачке из $\mathcal{A}$ и $u = \overrightarrow{AB}$, директриса било ког афиног потпростора Π од $\mathcal{A}$, који садржи A и B , мора да садржи и све векторе αu из $\mathbb{U} = \Omega(u)$. Тиме и свако то Π садржи афини потпростор $\Sigma = A + \mathbb{U}$, па је тако и $\langle A, B \rangle = A + \Omega(u)$. И слично за афини омотач $\langle A, B, C \rangle$ тачака A, B, C и линеарни омотач $\mathbb{U} = \Omega(u, v)$ вектора $u = B - A$ и $v = C - A$.

Наведимо још нека тврђења која важе за афине потпросторе.

Тврђење 3. Ако су $\Pi = A + \mathbb{U}$ и $\Gamma = B + \mathbb{W}$ било који потпростори афиног простора $\mathcal{A}$ и $B = A + v$, директриса афиног омотача $\langle \Pi \cup \Gamma \rangle$ њихове уније је управо сума потпростора $\mathbb{U}$, $\mathbb{W}$ и $\Omega(v)$.

Тврђење 4. Ако афини потпростори $\Pi = A + \mathbb{U}$ и $\Gamma = B + \mathbb{W}$ имају бар једну заједничку тачку, тада важи $\dim \langle \Pi \cup \Gamma \rangle = \dim \Pi + \dim \Gamma - \dim(\Pi \cap \Gamma)$, односно $\dim \langle \Pi \cup \Gamma \rangle = \dim(\mathbb{U} + \mathbb{W})$.

Тврђење 5. Ако су афини потпростори $\Pi = A + \mathbb{U}$ и $\Gamma = B + \mathbb{W}$ дисјунктни, тада важи $\dim \langle \Pi \cup \Gamma \rangle = 1 + \dim(\mathbb{U} + \mathbb{W})$.

Докази претходних тврђења се могу наћи у [7].

1.3 Барицентар

Мотивација

Једно од природних питања које се јавља при проучавању афиних односа јесте питање постојања посебне тачке која на одређени начин представља коначан систем тачака и која је у потпуности одређена њиховим међусобним положајем. У еуклидској геометрији најједноставнији пример оваквог проблема представља одређивање средишта дужи. За две различите тачке постоји јединствена тачка која припада правој коју оне одређују и која дуж дели на два једнака дела. Ова тачка је потпуно одређена положајем крајњих тачака дужи. Слична идеја јавља се и код система од три неколинеарне тачке.

Од три такве тачке образује се троугао, а његове тежишне дужи секу се у једној тачки која је одређена положајем његових темена. Та тачка назива се тежиштем троугла. Природно се поставља питање да ли се ова идеја може проширити и на произвољан коначан систем тачака. Управо такав приступ доводи до појма **барицентра**. Барицентар представља посебну тачку придружену коначном систему тачака, чији је положај одређен положајем тих тачака и одговарајућим тежинским односима између њих.

Историјски посматрано, један од првих покушаја формалног описивања овакве тачке везује се за Готфрида Вилхелма Лајбница. Он је, проучавајући системе материјалних тачака, увео начин одређивања једне карактеристичне тачке која представља читав систем тачака, помоћу две функције које су данас познате као Лајбницова скаларна и Лајбницова векторска функција.

Нека је дат коначан систем тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ у еуклидском простору. Свакој тачки A_i придружен је позитиван реалан број m_i , који називамо тежином те тачке. На тај начин добија се тежински систем тачака $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$. Означимо укупну тежину система са $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i$. Тежине одређују значај појединих тачака унутар система. Уколико су све тежине једнаке, све тачке имају исти утицај на одређивање карактеристичне тачке система, док различите тежине омогућавају да се неким тачкама додели већи значај у односу на остале.

За произвољну тачку P еуклидског простора посматра се збир квадрата растојања од тачке P до тачака система, при чему се свако растојање множи одговарајућом тежином. На тај начин се дефинише **Лајбницова скаларна функција**

$$\psi(P) = \sum_{i=1}^n m_i P A_i^2.$$

Ова функција свакој тачки P придружује реалан број који представља пондерисани збир квадрата њених растојања од тачака датог система. Основна особина Лајбницове скаларне функције јесте постојање јединствене тачке G у којој она достиже минималну вредност. Та тачка представља равнотежни положај система и назива се барицентар система тачака.

Поред скаларног описа, систем тачака може се описати и векторски. Изаберимо произвољну тачку O у еуклидском простору. Свакој тачки A_i тада можемо придружити вектор положаја $\overrightarrow{OA_i}$, који описује положај тачке A_i у односу на изабрану почетну тачку O . Пошто различите тачке система могу

имати различите тежине, вектори положаја се не сабирају непосредно, већ се сваки од њих множи одговарајућим тежинским коефицијентом. На тај начин добија се пондерисани збир вектора

$$f(O) = m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{OA_n}.$$

Овај израз назива се **Лајбницова векторска функција**. Она представља укупни векторски утицај целокупног система тачака у односу на изабрану тачку O . Важно је приметити да избор почетне тачке O не утиче на сам геометријски смисао система, већ само на начин записивања вектора. Променом почетне тачке мењају се појединачни вектори положаја, али се карактеристична тачка система одређује независно од тог избора.

Посебан значај има тачка G за коју наведени збир постаје нулти вектор, односно за коју важи

$$m_1 \overrightarrow{GA_1} + m_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Ово краће можемо записати као $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. Ако таква тачка постоји, она се назива барицентром тежинског система тачака, при чему је укупна тежина система m различита од нуле. Другим речима, барицентар је јединствена тачка у којој се пондерисани вектори свих тачака система међусобно уравнотежују. Свака тачка доприноси укупном положају система у складу са својим тежинским коефицијентом, а у барицентру се сви ти утицаји поништавају.

У случају две тачке A_1 и A_2 једнаких тежина наведени услов постаје $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} = \vec{0}$, што значи да су вектори супротних смерова и једнаких дужина. Према томе, тачка G је средиште дужи A_1A_2 . За три тачке једнаких тежина добија се позната конструкција тежишта троугла. Ако су темена троугла A , B , C услов $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ карактерише тачку пресека тежишних дужи.

На овај начин Лајбницова векторска функција представља уопштење познатих конструкција средишта дужи и тежишта троугла на произвољан коначан систем тачака.

Веза Лајбницове векторске и Лајбницове скаларне функције дата је следећом теоремом:

Теорема 1. Ако је f Лајбницова векторска функција, а ψ Лајбницова скаларна функција тежинског система тачака $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_k, m_k)$,

тада за сваке две тачке P и Q еуклидског простора димензије n важи релација

$$\psi(P) = \psi(Q) + 2\overrightarrow{PQ} \cdot f(Q) + (m_1 + \dots + m_k)PQ^2.$$

Доказ. На основу дефиниција Лајбницевог скаларне и векторске функције, следи да је

$$\begin{aligned} \psi(P) &= m_1 PA_1^2 + \dots + m_k PA_k^2 \\ &= m_1(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA_1}) \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA_1}) + \dots + m_k(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA_k}) \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA_k}) \\ &= \psi(Q) + 2\overrightarrow{PQ} \cdot f(Q) + (m_1 + \dots + m_k)PQ^2. \end{aligned}$$

□

Наведимо још и **Лајбницову теорему** која показује да се пондерисани збир квадрата растојања произвољне тачке P од тачака система може разложити на два дела: један који зависи само од унутрашње структуре самог система и други који зависи од положаја тачке P у односу на барицентар G .

Теорема 2 (Лајбникова теорема). Ако је ψ Лајбникова скаларна функција и G барицентар система пондерисаних тачака $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$, при чему је укупна тежина система различита од нуле, тада за сваку тачку P еуклидског простора важи релација

$$\psi(P) = \psi(G) + (m_1 + \dots + m_n)PG^2.$$

Доказ. Применимо теорему 1 за $Q = G$.

□

У посебном случају када су све тежине једнаке, ако узмемо $m_1 = \dots = m_n = 1$, Лајбникова теорема показује да збир квадрата растојања до датог система тачака достиже минимум управо у његовом тежишту, јер за произвољну тачку M важи $\psi(M) = \psi(T) + nTM^2 \geq \psi(T)$, при чему се једнакост постиже ако и само ако је $M = T$.

Следеће тврђење показује занимљиву примену Лајбницевог скаларне функције и Лајбницевог теореме.

Тврђење 6. Нека је дат систем тачака $A_1, \dots, A_n$ афиног простора $\mathcal{A}$, $\dim \mathcal{A} = 2$, којима су придружени реални бројеви $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, такви да је $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$. Нека је l произвољан реалан број. Тада је скуп свих тачака $P \in \mathcal{A}$ које задовољавају услов $\alpha_1 PA_1^2 + \dots + \alpha_n PA_n^2 = l$ празан скуп, једна тачка или кружница.

Прецизније, ако је S барицентар система $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$, онда постоји константа d таква да за сваку тачку $P \in \mathcal{A}$ важи $\sum_{i=1}^n \alpha_i PA_i^2 = (\sum_{i=1}^n \alpha_i) PS^2 + d$. Одатле следи да је геометријско место Φ одређено условом $\sum_{i=1}^n \alpha_i PA_i^2 = l$ кружница са центром S , тачка S или празан скуп, у зависности од знака броја $\frac{l-d}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$.

Доказ. Нека је $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$ и нека је S барицентар система пондерисаних тачака $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$. Применом Лајбницевог теореме, за сваку тачку $P \in \mathcal{A}$ добијамо $\alpha_1 PA_1^2 + \dots + \alpha_n PA_n^2 = \alpha PS^2 + d$, где је $d = \alpha_1 SA_1^2 + \dots + \alpha_n SA_n^2$ константа која не зависи од тачке P . Услов задатка је $\alpha_1 PA_1^2 + \dots + \alpha_n PA_n^2 = l$. Заменом добијамо $\alpha PS^2 + d = l$, односно $PS^2 = \frac{l-d}{\alpha}$. Према томе геометријско место Φ зависи од вредности броја $\frac{l-d}{\alpha}$. Ако је $\frac{l-d}{\alpha} > 0$, тачке P образују кружницу са центром S и полупречником $r = \sqrt{\frac{l-d}{\alpha}}$. Ако је $\frac{l-d}{\alpha} = 0$, добија се само тачка S . Ако је $\frac{l-d}{\alpha} < 0$, једначина нема решења, па је Φ празан скуп. $\square$

Иако је Лајбницов опис уведен у еуклидском простору и користи метрички појам растојања, сама карактеризација барицентра дата условом $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ не зависи од метрике. Она изражава искључиво афини однос између тачака система и њихових тежинских коефицијената. Управо због тога се појам барицентра природно проширује са еуклидског на афини простор.

Сада можемо увести формалну дефиницију барицентра у афиним простору.

Формална дефиниција

Ако је $\mathcal{A}$ било који афини простор над пољем $\mathbb{K}$, елементе скупа $\mathcal{A} \times \mathbb{K}$ зовемо и **пондерисаним (тежинским) тачкама** тог простора $\mathcal{A}$. Другим речима, то су сви парови (A, α) , где је A нека тачка из $\mathcal{A}$ и α неки скалар из $\mathbb{K}$.

За дату пондерисану тачку (A, α) одговарајући скалар α зовемо и **коефицијентом** или **масом**, односно **тежином** саме тачке A . Такође, ако је S неки систем од n пондерисаних тачака, тада суму $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ њихових маса $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ зовемо **масом** самог тог система S .

Тврђење 7. За сваких n пондерисаних тачака $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ у афину простору $\mathcal{A}$, чија укупна маса $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ није нула, постоји тачно једна тачка G за коју је

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}. \quad (1.8)$$

Доказ. Ако је O фиксирана тачка из $\mathcal{A}$, биће $\overrightarrow{GA_r} = \overrightarrow{OA_r} - \overrightarrow{OG}$, па одмах следи да је релација (1.8) еквивалентна са

$$\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} = (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{OG}.$$

Штавише, како ту $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \alpha$ није нула, тиме је она еквивалентна и са

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1}{\alpha} \overrightarrow{OA_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha} \overrightarrow{OA_n}. \quad (1.9)$$

Отуда и сама теорема, јер за дату тачку O и вектор a на десној страни у (1.9) постоји тачно једна тачка G за коју је $\overrightarrow{OG} = a$, а тиме и тачно једна тачка G за коју важи (1.8). $\square$

Напомена 1. Ако је $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$, тада се услов (1.8) своди на

$$\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} = \vec{0},$$

па више не зависи од тачке G , већ искључиво од тачака $A_1, \dots, A_n$ и њима придружених тежина $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Ако важи $\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$, онда свака тачка $X \in \mathcal{A}$ задовољава услов (1.8), а ако не важи, онда не постоји ниједна тачка која задовољава услов (1.8). Дакле, када је укупна маса система једнака нули, тачка $X \in \mathcal{A}$ која задовољава услов (1.8) није јединствено одређена.

Тачку G о којој је реч у тврђењу 7 зовемо и **барицентром** ученог система пондерисаних тачака $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$, или самих тачака A_r са масама α_r , за које $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ није нула. То је и *једина* тачка простора $\mathcal{A}$, таква да за бар једну, а тиме и *сваку* тачку O из $\mathcal{A}$ важи (1.9). Лако се показује да је једначина (1.9) независна од избора референтне тачке O .

Подсетимо се Лајбнице векторске функције, уведене у делу рада који је посвећен мотивацији за увођење појма барицентра. Она је тада била дефинисана у еуклидском простору, али се њена дефиниција природно преноси и у афини простор, јер се заснива искључиво на векторима. Нека је

$(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ систем тежинских тачака афиног простора $\mathcal{A}$ и нека је $X \in \mathcal{A}$ произвољна тачка. Тада пресликавање $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{V}$ дато са

$$f(X) = \alpha_1 \overrightarrow{XA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{XA_n},$$

називамо Лајбницовом векторском функцијом. Услов (1.8) је сада еквивалентан са $f(G) = \vec{0}$, одакле следи и $G \in f^{-1}(\vec{0})$. Како је, према претходној тврдњи, за $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$ тачка G јединствена тачка која задовољава услов (1.8), важи $f^{-1}(\vec{0}) = \{G\}$. Ако је $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$, следи да је $f(X) = \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}$, па вредност пресликавања f не зависи од тачке X . Дакле, у овом случају Лајбницова векторска функција је константно пресликавање. Ако је та константна вредност једнака нула вектору, онда је $f^{-1}(\vec{0}) = \mathcal{A}$, односно свака тачка простора задовољава услов (1.8). У супротном је $f^{-1}(\vec{0}) = \emptyset$, па тражена тачка не постоји.

Такође, барицентар пондерисаних тачака (A_r, α_r) се не мења, ако се њихове масе помноже истим скаларом $\delta \neq 0$. Наиме, множећи (1.8) са δ , добијена релација тачно значи да је G барицентар и пондерисаних тачака $(A_r, \alpha_r \delta)$, са истим тачкама A_r и масама $\delta_r = \alpha_r \delta$.

Штавише, бирајући ту δ тако да сума $\delta_1 + \dots + \delta_n = \alpha \delta$ буде један, на тај начин следи и да је тачка G барицентар датих тачака $A_1, \dots, A_n$ са извесним масама, ако и само ако постоје и неки скалари α_r , такви да је

$$\vec{OG} = \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} \quad \left(\sum \alpha_r = 1 \right) \quad (1.10)$$

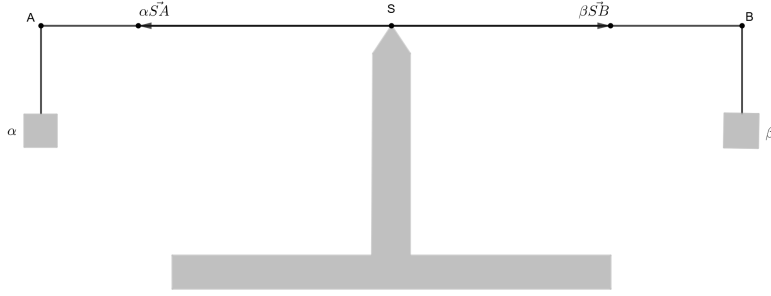
за бар једну, а тиме и сваку тачку O . Наиме, ако ова једнакост важи за неку тачку O , онда за произвољну тачку O' важи

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \alpha_r \overrightarrow{O'A_r} &= \sum_{r=1}^n \alpha_r (\overrightarrow{OA_r} - \overrightarrow{OO'}) \\ &= \vec{OG} - \left(\sum_{r=1}^n \alpha_r \right) \overrightarrow{OO'} \\ &= \vec{OG} - \overrightarrow{OO'} \\ &= \overrightarrow{O'G}, \end{aligned}$$

па је једнакост независна од избора референтне тачке. Наравно, тада је G барицентар и пондерисаних тачака (A_r, α_r) . У том случају, уместо (1.10) такође пишемо и

$$G = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n, \quad (1.11)$$

уз напомену да та релација има смисла једино ако је $\sum \alpha_r = 1$. Тако, на пример, сама релација $G = \alpha A + \beta B$ значи да је тачка G барицентар датих тачака A и B , са масама α и $\beta = 1 - \alpha$. Према претходном, то је еквивалентно, како са $\alpha \overrightarrow{GA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{GB} = \vec{0}$, тако и са $\overrightarrow{BG} = \alpha \overrightarrow{BA}$. То даље значи и да је тачка G барицентар две разне тачке A и B , са извесним масама, ако и само ако је и на правој $\langle A, B \rangle$ (Слика 1.4).



Слика 1.4: Барицентар две разне тачке

Тврђење 8. Ако су G_1 и G_2 , тим редом, барицентри било која два система пондерисаних тачака $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_p, \alpha_p)$ и $(B_1, \beta_1), \dots, (B_q, \beta_q)$, таквих да ни један од скалара

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_p = \alpha, \quad \beta_1 + \dots + \beta_q = \beta \quad (1.12)$$

и $\alpha + \beta = \delta$ није нула, тада је барицентар G свих тих $p + q$ тачака управо барицентар пондерисаних тачака (G_1, α) и (G_2, β) . При том су тачке G_1, G_2, G колинеарне и важи $G_1G : GG_2 = \beta : \alpha$.

Доказ. Пре свега, ако је O било која тачка простора $\mathcal{A}$, према доказу тврђења 7, тачке G_1 и G_2 су одређене са

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{\alpha} \sum_{r=1}^p \alpha_r \overrightarrow{OA_r} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{\beta} \sum_{s=1}^q \beta_s \overrightarrow{OB_s}.$$

Сада је из истих разлога и

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\delta} \sum_{r=1}^p \alpha_r \overrightarrow{OA_r} + \frac{1}{\delta} \sum_{s=1}^q \beta_s \overrightarrow{OB_s} = \frac{1}{\delta} (\alpha \overrightarrow{OG_1} + \beta \overrightarrow{OG_2}),$$

па је тако тачка G барицентар и пондерисаних тачака (G_1, α) и (G_2, β) , са укупном масом $\alpha + \beta = \delta$. Отуда и само тврђење, јер његов преостали део следи директно из релације $\alpha \overrightarrow{GG_1} + \beta \overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$. $\square$

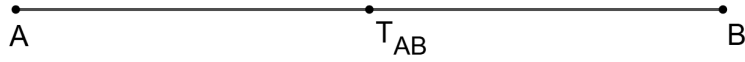
Јасно је да претходно тврђење важи и за *унију* три или више система пондерисаних тачака. Њиме се, за $n > 2$, одређивање барицентра датог система са n пондерисаних тачака може свести на одређивање барицентра неких система са по *мање* од n тачака.

Посебно, ако постоји, барицентар система тачака $S = (A_1, \dots, A_n)$ са истим масама $\alpha \neq 0$, зовемо и његовим **тежиштем**. Наравно, ту мора бити и $n\alpha \neq 0$. Другим речима, то је једина тачка T простора $\mathcal{A}$ за коју је $\overrightarrow{TA_1} + \dots + \overrightarrow{TA_n} = \vec{0}$, а тиме и

$$n \cdot \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$$

за сваку тачку O из $\mathcal{A}$. Такође, ако је тачка A_r различита од тежишта T_r преосталих тачака из S , тако одређене праве $\langle A_r, T_r \rangle$ зовемо и **тежишним правима** уоченог система тачака S . Према претходном тврђењу 8, за $p = 1$, све оне садрже његово тежиште T и при том важи $A_r T : T T_r = n - 1$.

Тако, на пример, једина тежишна права две различите тачке A и B је управо $\langle A, B \rangle$, док је њихово тежиште $T = T_{AB}$ (Слика 1.5) одређено са $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} = \vec{0}$, односно $2\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

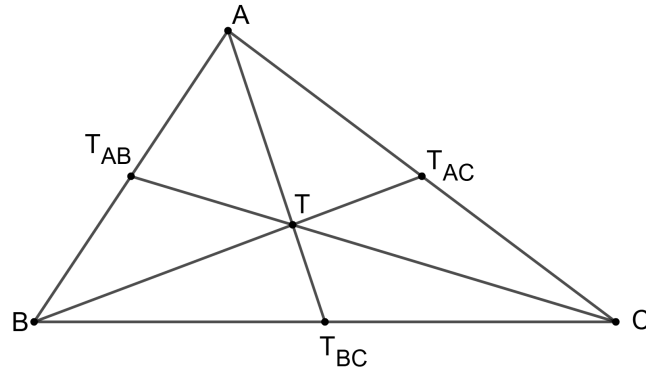


Слика 1.5: Тежиште система од две разне тачке

Такође, систем S неколинеарних тачака A, B, C има три тежишне праве $\langle A, T_{BC} \rangle$, $\langle B, T_{CA} \rangle$ и $\langle C, T_{AB} \rangle$. Оне садрже његово тежиште $T = T_{ABC}$ (Слика 1.6) и при том је

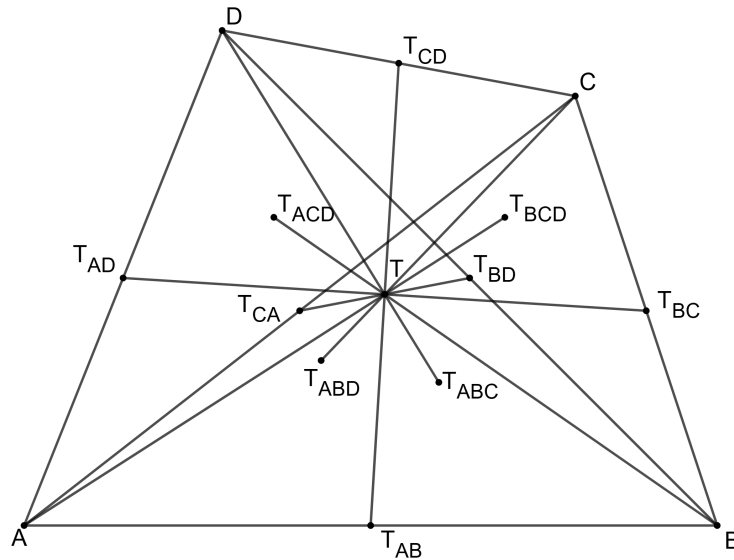
$$3 \cdot \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

$AT : T T_{BC} = 2$ и тако даље.



Слика 1.6: Тежиште система од три неколинеарне тачке

Слично важи и за систем тачака $S = (A, B, C, D)$, међу којима никоје три нису колинеарне. На основу тврђења 7 следи да се, у општем случају, његово тежиште T налази на седам назначених правих (Слика 1.7). Једна од њих је и тежишна права $\langle A, T_{BCD} \rangle$. При том је $AT : TT_{BCD} = 3, T_{AB}T : TT_{CD} = 1$ и тако даље.



Слика 1.7: Тежиште система од четири тачке у равни међу којима никоје три нису колинеарне

Из претходног излагања видимо да свака права у афиним простору $\mathcal{A}$, заједно са тачкама A и B , садржи и све њихове барицентре, то јест сваку од

тачака $G = \alpha A + (1 - \alpha)B$.

Тврђење 9. Ако је $\mathcal{A}$ било који афини простор са пољем скалара $\mathbb{K}$, непразан скуп $\Pi \subset \mathcal{A}$ је и потпростор, ако и само ако за свако $A, B \in \mathcal{A}$ и $\alpha \in \mathbb{K}$, важи

$$A, B \in \Pi \implies \alpha A + (1 - \alpha)B \in \Pi, \quad (1.13)$$

то јест ако и само ако, заједно са било које две разне тачке A и B , садржи и саму праву $\langle A, B \rangle$.

Доказ. Пре свега, ако је O било која тачка из Π , импликација (1.13) значи да скуп Π , заједно са тачкама A и B , садржи и сваку тачку G за коју је

$$\overrightarrow{OG} = \alpha \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OB} \quad (\alpha \in \mathbb{K}). \quad (1.14)$$

Отуда, ако је Π и потпростор, заједно са векторима $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, његова директриса садржи и вектор $\overrightarrow{OG}$, а тиме и само Π тачку $G = \alpha A + (1 - \alpha)B$.

И обрнуто, ако важи (1.13), тада је скуп $\mathbb{U} = \{\overrightarrow{OA} : A \in \Pi\}$ векторски потпростор од $\mathbb{V}$, а тиме и Π један афини потпростор од $\mathcal{A}$, са директрисом $\mathbb{U}$. Наиме, ако су $u = \overrightarrow{OA}$ и $v = \overrightarrow{OB}$ било који вектори из $\mathbb{U}$, на основу (1.14), за $B = O$, прво следи да $\mathbb{U}$ садржи и векторе αu , а затим, за $\alpha = \frac{1}{2}$, да садржи и вектор $2\overrightarrow{OG} = u + v$. $\square$

Тврђење 10. Барицентар G система тачака $A_1, \dots, A_n$ којима су редом придружени позитивни бројеви $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, припада свакој конвексној фигури Φ која садржи тачке $A_1, \dots, A_n$.

Доказ. За $n = 1$ и $n = 2$ тврђење непосредно следи. За $n > 2$ тврђење доказујемо математичком индукцијом. Нека тврђење важи за неко $n - 1$, то јест нека свака конвексна фигура која садржи тачке $A_1, \dots, A_{n-1}$ оптерећене одговарајућим тежинама садржи и њихов барицентар G' . Према дефиницији барицентра је $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$ и $\alpha_1 \overrightarrow{G'A_1} + \dots + \alpha_{n-1} \overrightarrow{G'A_{n-1}} = \vec{0}$. Одузимањем ових двеју једнакости добијамо $\alpha_1 (\overrightarrow{GA_1} - \overrightarrow{G'A_1}) + \dots + \alpha_{n-1} (\overrightarrow{GA_{n-1}} - \overrightarrow{G'A_{n-1}})$. Након што искористимо да је $\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A_i}$, за све $i = 1, \dots, n - 1$, добијамо $(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}) \overrightarrow{GG'} + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$. Ово значи да је тачка G барицентар тачака G' и A_n којима су редом придружени бројеви $\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}$ и α_n . Како су они позитивни, тачка G се налази између тачака G' и A_n па припада конвексној фигури Φ . $\square$

Тврђење 11. Ако су $(A_1, A'_1), (A_2, A'_2), \dots, (A_n, A'_n)$ парови тачака простора $\mathcal{A}$, оптерећени масама $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$, а S и S' барицентри n -торки $(A_1, \dots, A_n)$ и $(A'_1, \dots, A'_n)$, тада је $\alpha_1 \overrightarrow{A_1 A'_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_2 A'_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_n A'_n} = \alpha \overrightarrow{SS'}$.

Доказ. Како је $\overrightarrow{SS'} = \overrightarrow{SA_i} + \overrightarrow{A_i A'_i} + \overrightarrow{A'_i S'}$, $1 \leq i \leq n$, то је

$$\begin{aligned} \alpha \overrightarrow{SS'} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{SS'} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{SA_i} + \overrightarrow{A_i A'_i} + \overrightarrow{A'_i S'}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{SA_i} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_i A'_i} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A'_i S'} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_i A'_i}, \end{aligned}$$

јер су S и S' барицентри одговарајућих система тачака са одговарајућим тежинама. $\square$

Тврђење 12. Ако су $(A_1, A'_1), (A_2, A'_2), \dots, (A_n, A'_n)$ парови тачака простора $\mathcal{A}$, а S и S' редом тежишта n -торки $A_1, \dots, A_n$ и $A'_1, \dots, A'_n$, тада је $\overrightarrow{A_1 A'_1} + \overrightarrow{A_2 A'_2} + \dots + \overrightarrow{A_n A'_n} = n \overrightarrow{SS'}$.

Доказ. Применимо претходно тврђење за $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$. $\square$

Специјално, у претходном тврђењу важи $\overrightarrow{A_1 A'_1} + \overrightarrow{A_2 A'_2} + \dots + \overrightarrow{A_n A'_n} = \vec{0}$ ако и само ако је $S \equiv S'$.

Након претходно доказаних општих резултата о барицентрима система тачака, размотримо њихову примену на карактеристичне тачке троугла. Увођењем афиних односа између темена троугла и његових карактеристичних тачака добијају се једноставни докази појединих познатих својстава Ојлерове праве и Ојлеровог круга. У наставку ћемо извести неколико таквих резултата.

Тврђење 13. Ако је H ортоцентар и O_1 центар Ојлеровог круга троугла ABC , тачка O_1 је тежиште система састављеног од тачака A, B, C, H .

Доказ. Центар описане кружнице O , ортоцентар H , тежиште T и центар Ојлеровог круга O_1 су колинеарне и леже на Ојлеровој правој. Њихов међусобни положај одређен је следећим афиним релацијама: $H = 3T - 2O$

и $O_1 = \frac{O+H}{2}$. Одавде је $O = 2O_1 - H$. Заменом добијеног у израз за тачку H добијамо $H = 3T - 2(2O_1 - H)$, па је $H = 4O_1 - 3T$, односно $H = 4O_1 - (A + B + C)$. Нека је тачка G тежиште система тачака A, B, C, H . Тада важи $G = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}H$. Ово можемо даље расписати на следећи начин:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{4}(A + B + C + H) \\ &= \frac{1}{4}(A + B + C + 4O_1 - (A + B + C)) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4O_1 \\ &= O_1. \end{aligned}$$

Пошто је тежиште јединствено, закључујемо да тачка O_1 јесте тежиште система састављеног од тачака A, B, C, H . $\square$

Тврђење 14. Ако је T тежиште, H ортоцентар и O центар круга описаног око троугла ABC , тада је

- а) $OT^2 = OA^2 - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$;
- б) $OH^2 = 9OA^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

Доказ. а) На основу Лајбницевог теореме, за произвољну тачку M важи $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MT^2 + TA^2 + TB^2 + TC^2$. Ако ставимо $M = O$, добијамо $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OT^2 + TA^2 + TB^2 + TC^2$. Пошто је O центар описане кружнице троугла ABC важи $OA = OB = OC$. Одатле добијамо $3OA^2 = 3OT^2 + TA^2 + TB^2 + TC^2$, па је $OT^2 = OA^2 - \frac{1}{3}(TA^2 + TB^2 + TC^2)$. Треба још показати да важи $TA^2 + TB^2 + TC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$. За тежиште T троугла ABC важи $\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC} = 0$. Скаларним множењем добијене једнакости саме са собом добијамо $TA^2 + TB^2 + TC^2 + 2(\vec{TA} \cdot \vec{TB} + \vec{TB} \cdot \vec{TC} + \vec{TC} \cdot \vec{TA}) = 0$, па је $\vec{TA} \cdot \vec{TB} + \vec{TB} \cdot \vec{TC} + \vec{TC} \cdot \vec{TA} = -\frac{1}{2}(TA^2 + TB^2 + TC^2)$. Такође, важи $AB^2 = |\vec{TB} - \vec{TA}|^2 = TA^2 + TB^2 - 2\vec{TA} \cdot \vec{TB}$ и аналогно за BC^2 и CA^2 . Сабирањем добијамо $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2(TA^2 + TB^2 + TC^2) - 2(\vec{TA} \cdot \vec{TB} + \vec{TB} \cdot \vec{TC} + \vec{TC} \cdot \vec{TA})$. Заменом претходно добијеног изрази за тежиште добијамо $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(TA^2 + TB^2 + TC^2)$ па је заиста $TA^2 + TB^2 + TC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$. Коначно, добијамо да важи $OT^2 = OA^2 - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

- б) Пошто је $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OT}$, скаларним множењем ове једнакости саме са собом добијамо $OH^2 = 9OT^2$. Заменом последње једнакости у једнакост из дела а) добијамо тражену једнакост.

□

1.4 Барицентар у настави физике у средњој школи

Излагање у овом одељку засновано је на материјалу изложеном у књизи [9].

Појам барицентра има непосредну примену у физици, пре свега у проучавању система материјалних тачака и одређивању њиховог центра масе. Иако се у математици барицентар дефинише у оквиру афиног простора, у физици се тежински коефицијенти природно тумаче као масе материјалних тачака. На тај начин математички појам барицентра добија јасно физичко значење: центар масе система материјалних тачака одређен је њиховим положајима и масама, које у математичком моделу имају улогу тежинских коефицијената.

Појам центра масе може се увести преко једноставног модела полуге. Посматрајмо две тачке A и B у којима су концентрисане масе m_1 и m_2 , што ћемо означавати са (A, m_1) и (B, m_2) . Нека је T тачка ослоња за коју је систем у равнотежи.

Услов равнотеже може се записати у векторском облику

$$m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \vec{0}. \quad (1.15)$$

Ова релација представља услов којим је одређен центар масе система од две материјалне тачке и има исту математичку форму као дефиниција барицентра са тежинским коефицијентима m_1 и m_2 . Из претходне релације следи да важи $m_1|AT| = m_2|TB|$, односно

$$|AT| : |TB| = m_2 : m_1.$$

Дакле, центар масе се налази ближе тачки у којој је концентрисана већа маса.

Ако је O произвољно изабрана тачка, важи $\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OB}$. Заменом у релацију (1.15) добијамо

$$m_1(\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA}) + m_2(\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OB}) = \vec{0}.$$

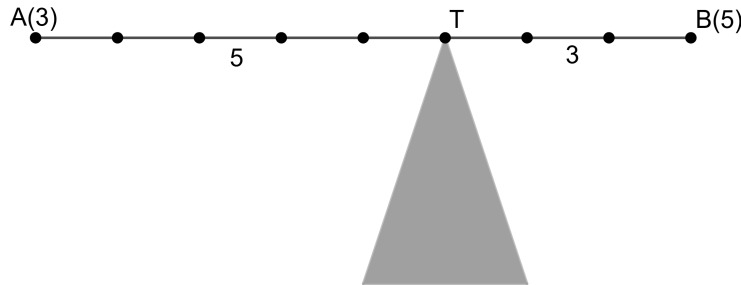
Како је $\overrightarrow{TO} = -\overrightarrow{OT}$, након сређивања добијамо

$$\overrightarrow{OT} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB}}{m_1 + m_2}. \quad (1.16)$$

Из добијене формуле се види да је положај центра масе одређен положајима материјалних тачака и њиховим масама.

Пример 1. На крајевима полуге дужине 16 метара налазе се тела масе 3 килограма и 5 килограма. Одредити положај тачке ослоња T тако да полуга буде у равнотежи.

Решење. Нека су A и B крајеви полуге, при чему се у тачки A налази тело масе $m_1 = 3$, а у тачки B тело масе $m_2 = 5$. Према релацији $m_1 \overrightarrow{TA} + m_2 \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{0}$ важи $|AT| : |TB| = m_2 : m_1 = 5 : 3$. Дакле, $3|AT| = 5|TB|$. Како је $|AT| + |TB| = 16$, заменом добијамо $\frac{5}{3}|TB| + |TB| = 16$. Добијамо да је $|TB| = 6$, а одатле одмах следи да је $|AT| = 10$. Дакле, тачка ослоња T је удаљена 10 метара од тачке A , односно 6 метара од тачке B . Приметимо да је тачка T ближа крају полуге на којем се налази тело веће масе.



Слика 1.8: Класична полуга

Формуле (1.15) и (1.16) могу се разматрати и када неки од коефицијената m_1 и m_2 има негативну вредност, при чему у формули (1.16) мора важити $m_1 + m_2 \neq 0$. У физичком моделу негативан коефицијент може представљати силу супротног смера, као у наредном примеру.

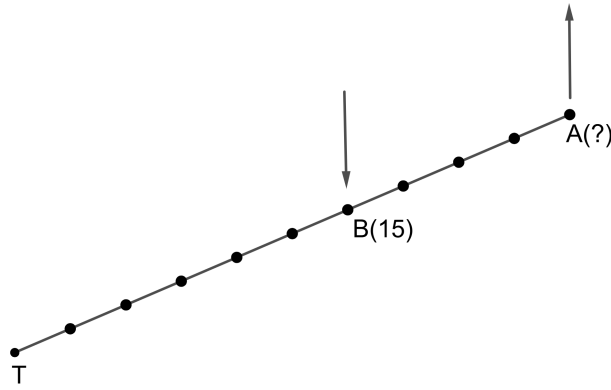
Пример 2. Полуга дужине 10 метара ослоњена је у тачки T . У тачки B , која се налази на растојању 6 метара од ослоња, налази се тело масе 15 килограма. На другом крају полуге, у тачки A , полуга се придржава вертикалном силом

усмереном навише. Одредити коефицијент који одговара тој сили ако је полуга у равнотежи.

Решење. Нека је m_1 коефицијент који одговара сили у тачки A , а $m_2 = 15$ маса тела у тачки B . Пошто сила у тачки A има смер супротан смеру силе која одговара маси у тачки B , очекујемо да ће коефицијент m_1 бити негативан. Према релацији $m_1 \overrightarrow{TA} + m_2 \overrightarrow{TB} = \vec{0}$ имамо $10m_1 + 6 \cdot 15 = 0$.

Одатле следи $10m_1 = -90$, па је $m_1 = -9$.

Дакле, добијамо $m_1 = -9$, што је у складу са очекивањем.



Слика 1.9: Слика уз пример

Посматрајмо сада три материјалне тачке (A, m_1) , (B, m_2) и (C, m_3) . Центар масе T дефинисан је условом

$$m_1 \overrightarrow{TA} + m_2 \overrightarrow{TB} + m_3 \overrightarrow{TC} = \vec{0}.$$

За произвољну тачку O добијамо

$$\overrightarrow{OT} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB} + m_3 \overrightarrow{OC}}{m_1 + m_2 + m_3},$$

при чему је $m_1 + m_2 + m_3 \neq 0$.

Нека је $A_1 \in BC$ центар масе тачака (B, m_2) и (C, m_3) . Тада се дуж AA_1 зове тежишна дуж из темена A . Слично се дефинишу и тежишне дужи BB_1 и CC_1 . Тада важи $\overrightarrow{OA_1} = \frac{m_2 \overrightarrow{OB} + m_3 \overrightarrow{OC}}{m_2 + m_3}$, при чему је $m_2 + m_3 \neq 0$. Убацивањем ове релације у формулу за $\overrightarrow{OT}$ добијамо

$$\overrightarrow{OT} = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \overrightarrow{OA} + \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \overrightarrow{OA_1}.$$

Одавде следи да тачка T лежи на тежишној дужи AA_1 . На исти начин се добија да T припада и тежишним дужима BB_1 и CC_1 . Дакле, закључујемо да се све три тежишне дужи секу у центру масе.

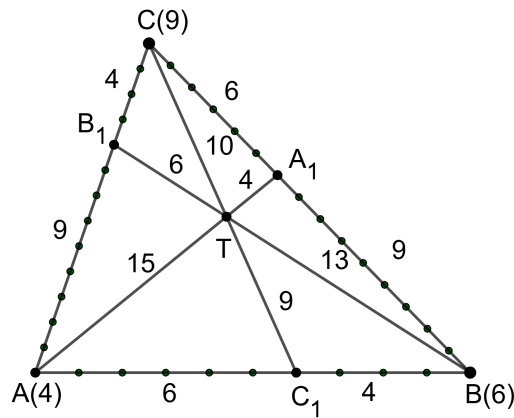
Из претходне формуле следи и однос у коме тачка T дели тежишну дуж AA_1 , односно важи

$$|AT| : |TA_1| = (m_2 + m_3) : m_1.$$

Аналогно, важи и $|BT| : |TB_1| = (m_1 + m_3) : m_2$ и $|CT| : |TC_1| = (m_1 + m_2) : m_3$.

Пример 3. Нека су у теменима троугла A, B, C редом постављене масе $m_1 = 4$, $m_2 = 6$, $m_3 = 9$. Одредити односе у којима центар масе дели тежишне дужи троугла ABC .

Решење. Означимо са T центар масе датог система тачака $(A, 4)$, $(B, 6)$, $(C, 9)$. За тежишну дуж из темена A важи $|AT| : |TA_1| = (6 + 9) : 4 = 15 : 4$, за тежишну дуж из темена B важи $|BT| : |TB_1| = (4 + 9) : 6 = 13 : 6$, док за тежишну дуж из темена C важи $|CT| : |TC_1| = (4 + 6) : 9 = 10 : 9$.



Слика 1.10: Слика уз пример

Уколико су масе у свим теменима једнаке, односно ако важи $m_1 = m_2 = m_3 = m$, формула за центар масе постаје

$$\vec{OT} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

Ово је управо формула за тежиште троугла. Дакле, класично тежиште троугла може се посматрати као посебан случај центра масе система од три материјалне тачке са једнаким масама.

За позитивне масе центар масе се налази унутар троугла. Ако су дозвољене и негативне масе, центар масе се може налазити и ван троугла.

Пример 4. Дат је троугао ABC . На страници BC налази се тачка A_1 , а на страници AC тачка B_1 , тако да је $|BA_1| : |A_1C| = 3 : 5$ и $|AB_1| : |B_1C| = 4 : 3$.

Нека је $\{P\} = AA_1 \cap BB_1$.

(а) Одредити односе $|AP| : |PA_1|$ и $|BP| : |PB_1|$.

(б) Ако је $\{C_1\} = CP \cap AB$, одредити однос $|AC_1| : |C_1B|$.

Решење. Поставимо у темена A , B и C редом масе m_1 , m_2 и m_3 тако да AA_1 и BB_1 буду тежишне дужи.

Из услова за тачку A_1 следи $m_2 : m_3 = 5 : 3$, а из услова за тачку B_1 следи $m_1 : m_3 = 3 : 4$.

Можемо узети $m_3 = 12$, па добијамо $m_1 = 9$, $m_2 = 20$.

(а) Према формули за поделу тежишне дужи, добијамо

$$|AP| : |PA_1| = (m_2 + m_3) : m_1 = 32 : 9,$$

и

$$|BP| : |PB_1| = (m_1 + m_3) : m_2 = 21 : 20.$$

(б) Пошто је CP трећа тежишна дуж, тачка C_1 дели страницу AB у односу

$$|AC_1| : |C_1B| = m_2 : m_1 = 20 : 9.$$

Посматрајмо сада систем од n материјалних тачака (A_1, m_1) , (A_2, m_2) , $\dots$, (A_n, m_n) . Означимо укупан збир маса са $M = \sum_{i=1}^n m_i$, $M \neq 0$. Центар масе система у овом случају дефинишемо релацијом $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{TA_i} = \vec{0}$. За произвољну тачку O тада важи $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}$.

Како формула не зависи од избора тачке O , можемо је изабрати тако да рачунање буде што једноставније, на пример као координатни почетак. Ако су $A_i = (x_i, y_i)$ координате тачака система у равни, онда су координате центра масе $T = \frac{1}{M} (\sum_{i=1}^n m_i x_i, \sum_{i=1}^n m_i y_i)$. У простору се аналогно добија $T = \frac{1}{M} (\sum_{i=1}^n m_i x_i, \sum_{i=1}^n m_i y_i, \sum_{i=1}^n m_i z_i)$.

На овај начин се појам центра масе две и три тачке природно проширује на произвољан број материјалних тачака.

1.5 Барицентричне координате

Да би било могуће описати положај произвољне тачке афиног простора у односу на друге тачке простора, потребно је издвојити коначан скуп тачака који у потпуности одређује читав афини простор. То доводи до појмова афине независности и афине базе, који представљају основу за увођење барицентричних координата.

Интуитивно гледано, афина независност представља геометријски услов који обезбеђује да се посматрани простор не може описати мањим бројем тачака. Тако су две различите тачке увек афино независне, јер одређују јединствену праву. Три тачке су афино независне ако нису колинеарне јер тада одређују јединствену раван, док су четири тачке у тродимензионалном простору афино независне уколико нису компланарне.

У том смислу, афина база је најмањи скуп афино независних тачака који у потпуности одређује посматрани афини простор. Сваке две афине базе истог афиног простора имају једнак број тачака. Ако је димензија афиног простора једнака n , онда се свака афина база састоји од тачно $n + 1$ тачака. Афину базу праве чине две различите тачке, афину базу равни чине три неколинеарне тачке, док афину базу тродимензионалног простора чине четири некомпланарне тачке.

Избор афине базе одређује референтну конфигурацију у односу на коју се може описивати положај сваке друге тачке афиног простора. Она представља природну везу између синтетичког и аналитичког приступа афиној геометрији. Полазећи од афине базе, могуће је свакој тачки придружити бројеве који описују њен положај у односу на тачке базе. Ови бројеви се називају барицентричним координатама.

Уведимо и формално претходно разматране појмове.

На основу тврђења 8 и 9 из претходног поглавља, индукцијом по k следи да сваки афини потпростор Π од $\mathcal{A}$, заједно са тачкама $A_0, \dots, A_k$ садржи и све њихове барицентре. То посебно важи и за њихов афини омотач $\langle A_0, \dots, A_k \rangle$, као пресек свих потпростора од $\mathcal{A}$ који садрже те тачке $A_0, \dots, A_k$.

Теорема 3. Скуп $\mathbb{A}$ свих барицентара система $S = (A_0, \dots, A_k)$ од $k+1$ тачака афиног простора $\mathcal{A}$ је управо његов афини омотач $\langle S \rangle$. При том су и следећи услови еквивалентни:

1° Вектори $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$ су линеарно независни;

2° Афини омотач од $\langle S \rangle$ је димензије k ;

3° За сваку тачку M из скупа $\langle S \rangle$ постоје јединствени скалари α_r за које је $M = \alpha_0 A_0 + \dots + \alpha_k A_k$ и $\alpha_0 + \dots + \alpha_k = 1$.

Доказ. Нека су $A = \alpha_0 A_0 + \dots + \alpha_k A_k$ и $B = \beta_0 A_0 + \dots + \beta_k A_k$ било које тачке скупа $\mathbb{A}$. Ако је O фиксирана тачка из $\mathcal{A}$, тада и за сваку тачку $G = \alpha A + (1 - \alpha)B$ важи

$$\overrightarrow{OG} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k} \quad (1.17)$$

где је $\lambda_r = \alpha_r \alpha + \beta_r (1 - \alpha)$. Како је ту $\sum \alpha_r = \sum \beta_r = 1$, биће и $\sum \lambda_r = 1$, па тако $\mathbb{A}$ садржи и тачку G . Према тврђењу 9, то управо значи да је $\mathbb{A}$ и потпростор од $\mathcal{A}$. Како он садржи све тачке из S , биће и $\langle S \rangle \subset \mathbb{A}$. Отуда и први део теореме јер смо већ видели да је $\mathbb{A} \subset \langle S \rangle$.

1° $\iff$ 2°. Ако је $e_r = \overrightarrow{A_0 A_r}$ и $\mathbb{U} = \Omega(e_1, \dots, e_k)$, афини омотач од $\mathbb{S}$ је управо потпростор $\Pi = A_0 + \mathbb{U}$. Тиме је и $\dim \Pi = \dim \mathbb{U} = k$, ако и само ако су вектори $e_1, \dots, e_k$ и линеарно независни.

1° $\iff$ 3°. Уз претходну симболику, систем $[e_1, \dots, e_k]$ је и линеарно независан, ако и само ако је и једна база од $\mathbb{U}$, то јест ако и само ако, за сваку тачку M из $\Pi = A_0 + \mathbb{U}$, постоје једнозначно одређени скалари $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ за које је

$$\overrightarrow{A_0 M} = \alpha_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{A_0 A_k}$$

и $\alpha_0 = 1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_k)$. Отуда и теорема у целини, јер је ово последње еквивалентно управо са условом 3°. $\square$

За систем $S = (A_0, A_1, \dots, A_k)$ од $k + 1$ тачака простора $\mathcal{A}$ кажемо да је **афино независан**, ако задовољава бар један, а тиме и сваки од услова из теореме 3. Посебно, ако је уочени афини простор $\mathcal{A}$ димензије n , афино независне системе

$$S = (A_0, A_1, \dots, A_n),$$

са по $n + 1$ тачака, зовемо и његовим **афиним базама**. При томе важи $\langle S \rangle = \mathcal{A}$, односно, афини омотач афине базе је читав афини простор. Према теорему 3, тада и за сваку тачку M из $\mathcal{A}$ постоји тачно један систем $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ скалара из $\mathbb{K}$, таквих да је

$$M = \alpha_0 A_0 + \dots + \alpha_n A_n \quad (\sum \alpha_r = 1).$$

Зовемо их и **барицентричним координатама** те тачке M у односу на дату афину базу S простора $\mathcal{A}$.

Такође, ако је ту $\overrightarrow{A_0 A_r} = e_r$ и $A_0 = O$, систем $[e_1, \dots, e_n]$ је и једна база векторског простора $\mathbb{V}$, а тиме и Oe један репер простора $\mathcal{A}$. И обрнуто, сваком реперу Oe афиног простора $\mathcal{A}$ одговара и једна афина база $S = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ за коју је $A_0 = O$, као и $e_1 = \overrightarrow{OA_1}, \dots, e_n = \overrightarrow{OA_n}$.

1.6 Афина пресликавања

Након проучавања основних појмова афине геометрије, природно је поставити питање која пресликавања чувају афину структуру простора. За разлику од произвољних пресликавања, која могу нарушити колинеарност, односе између тачака или барицентре, посебан значај имају пресликавања која их чувају. Управо таква пресликавања називају се афиним пресликавањима. Она представљају основни алат за поређење различитих афиних простора и проучавање њихових геометријских својстава.

Нека су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ било који афини простори над истим пољем скалара $\mathbb{K}$ и са директрисама $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$. Ако је P фиксирана тачка из $\mathcal{A}$, за сваки вектор u из $\mathbb{V}$ постоји тачно једна тачка M из $\mathcal{A}$ за коју је $u = M - P$. Тиме је, за свако пресликавање $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, са

$$L(M - P) = \sigma M - \sigma P \quad (M \in \mathcal{A}) \quad (1.18)$$

дефинисано и једно пресликавање L саме директрисе $\mathbb{V}$ афиног простора $\mathcal{A}$ у директрису $\mathbb{W}$ афиног простора $\mathcal{B}$. Другим речима, ту је

$$L(\overrightarrow{PM}) = \overrightarrow{\sigma P \sigma M} \quad (M \in \mathcal{A}). \quad (1.19)$$

Уз то, како релација $M - P = u$ управо значи да је $P + u = M$, одмах следи да је тада и

$$\sigma(P + u) = \sigma P + L(u) \quad (u \in \mathbb{V}). \quad (1.20)$$

Штавише, у случају када је то пресликавање $L : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ и *линеарно*, оно не зависи и од саме тачке P , то јест тада претходне релације важе и за *сваку* тачку P . Заиста, нека је S било која тачка из $\mathcal{A}$ и $G : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ одговарајуће пресликавање за које је

$$\sigma(S + u) = \sigma S + G(u) \quad (u \in \mathbb{V}).$$

Ако је a вектор из $\mathbb{V}$ за који је $S = P + a$, на основу (1.20) прво следи да је $\sigma S = \sigma P + L(a)$, као и

$$\sigma(S + u) = \sigma(P + a + u) = \sigma P + L(a + u).$$

Због $L(a + u) = L(a) + L(u)$, то се даље своди на $\sigma(S + u) = \sigma S + L(u)$, па је јасно да тада мора бити и $G = L$.

У вези са тим, за пресликавање $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ афиног простора $\mathcal{A}$ у афини простор $\mathcal{B}$, над истим пољем $\mathbb{K}$ и са директрисама $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$, кажемо да је **афино**, ако је, за бар једну тачку P из $\mathcal{A}$, са (1.19) дефинисано и једно *линеарно* пресликавање $L : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$.

Према претходном, тако одређено линеарно пресликавање L зависи једино од σ , то јест не зависи и од саме тачке P . Зовемо га и **линеарним делом** уоченог афиног пресликавања $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Овде ћемо га по правилу означавати са $L = \bar{\sigma}$.

Такође, ако је $L : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ било које линеарно пресликавање и ако су P и R било које тачке афиних простора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, тада је са $\sigma(P + u) = R + L(u)$ дефинисано једно афино пресликавање $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ за које је $\sigma P = R$ и чији је линеарни део управо L .

Тврђење 15. а) Афино пресликавање σ је инјективно, ако и само ако је то и његов линеарни део $L = \bar{\sigma}$. И слично за сурјективност и бијективност.

б) Ако је афино пресликавање $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ бијективно, њему инверзно пресликавање $\sigma^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ је такође афино и са линеарним делом $G = L^{-1}$.

в) Композиција $\omega = \tau \circ \sigma$ два афина пресликавања σ и τ је такође афино пресликавање и његов линеарни део $\bar{\omega}$ је управо композиција $G \circ L$ линеарних пресликавања $G = \bar{\tau}$ и $L = \bar{\sigma}$.

Доказ. а) Пре свега, ако је $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, према (1.20), за произвољне тачке $P + u$ и $P + v$ простора $\mathcal{A}$ важи

$$\sigma(P + u) = \sigma(P + v) \iff L(u) = L(v). \quad (1.21)$$

Отуда, ако је σ инјективно и $L(u) = L(v)$, ту мора бити $P + u = P + v$, то јест $u = v$, па је тада и L инјективно. И обрнуто, ако је L инјективно и $\sigma(P + u) = \sigma(P + v)$, због 1.21 мора бити $u = v$, а тиме и $P + u = P + v$. И слично за сурјективност.

- б) Нека је $\sigma^{-1} = \tau$ и P било која тачка из $\mathcal{A}$. Управо смо видели да је тада бијективно и пресликавање $\bar{\sigma} = L$. Ако је $\sigma P = R$ и $L(u) = w$, из $\sigma(P + u) = \sigma P + L(u)$ одмах следи да је и $P + u = \tau(\sigma P + w)$, то јест

$$\tau(R + w) = \tau R + L^{-1}(w)$$

за сваки вектор w из директрисе простора $\mathcal{B}$. Тиме је и само пресликавање $\tau = \sigma^{-1}$ афино и са линеарним делом L^{-1} .

- в) Како је и пресликавање τ афино, одређујући његове вредности на левој и десној страни релације $\sigma(P + u) = \sigma P + L(u)$, одмах следи да је тада и $\omega(P + u) = \omega P + (G \circ L)(u)$, па је тако и само пресликавање $\omega = \tau \circ \sigma$ афино и са линеарним делом $\bar{\omega} = G \circ L$. □

Бијективна афина пресликавања такође зовемо и **изоморфизмима** у класи афиних простора над истим пољем. Уз то, за два афина простора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, над истим пољем, кажемо да су **изоморфни** и пишемо $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, ако постоји бар један изоморфизам $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Из претходног тврђења следи да је тако дефинисана релација $\cong$ једна еквиваленција у класи свих афиних простора над истим пољем $\mathbb{K}$, као и да су два афина простора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфна, ако и само ако су то и њихове директрисе $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$. При том је $\mathbb{V} \cong \mathbb{W} \iff \dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W}$, па тако важи и:

Теорема 4. Афини простори коначних димензија и над истим пољем су изоморфни, ако и само ако су исте димензије: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \iff \dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B}$.

Посебно, сваки афини простор $\mathcal{A}$ над пољем скалара $\mathbb{K}$ и димензије n је изоморфан афинизацији $\mathbb{K}_{af}^n$ векторског простора $\mathbb{K}^n$. Прецизније, ако је O_e било који репер афиног простора $\mathcal{A}$, тада је са

$$\sigma : M \mapsto M_{O_e}$$

дефинисана једна бијекција $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}^n$, којом се произвољној тачки M из $\mathcal{A}$ придружује њена колона координата M_{O_e} у простору $\mathbb{K}^n$. При том је и

$$\sigma M - \sigma P = M_{O_e} - P_{O_e} = (M - O)_e$$

па се, за $M - P = u$ и сама релација $L(M - P) = \sigma M - \sigma P$ своди на $L(u) = u_e$. Отуда је то пресликавање L линеарно, па је тако и назначено пресликавање

σ афино, а тиме и један изоморфизам афиног простора $\mathcal{A}$ на афини простор $\mathbb{K}^n$.

Нека су, сада, Re и Sg било који репери афиних простора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ над истим пољем $\mathbb{K}$, где су $e = [e_1, \dots, e_n]$ и $g = [g_1, \dots, g_m]$ базе њихових директриса $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$. Ако је L линеарни део пресликавања $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, према претходном је и

$$\sigma(R + u) = \sigma R + L(u) \quad (u \in \mathbb{V}). \quad (1.22)$$

С друге стране, ако је $L(e_s) = \alpha_{1s}g_1 + \dots + \alpha_{ms}g_m$, тада је $A = [\alpha_{rs}]$ и једина матрица за коју је

$$[Le_1, \dots, Le_n] = [g_1, \dots, g_m] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix},$$

то јест $L(e) = gA$. Зовемо је и **матрицом линеарног пресликавања** L , као и самог **афиног пресликавања** σ , у односу на уочени пар база (e, g) и означавамо са $A = [L]_{eg} = [\sigma]_{eg}$. Она је формата $m \times n$ и њена s -та колона је управо колона координата вектора $L(e_s)$ у односу на базу g .

Даље, ако је u_e колона координата вектора $u = \sum x_r e_r$ у односу на базу e , биће $L(e) = \sum x_r L(e_r)$, то јест $u = eu_e$ и $L(u) = L(e)u_e$, па је јасно да је тада и

$$L(u) = gAu_e, \quad L(u)_g = Au_e \quad (u \in \mathbb{V}). \quad (1.23)$$

Отуда, ако је X колона координата тачке $R + u = M$ у односу на репер Re , биће $X = u_e$, а тиме и $L(u)_g = AX$. На тај начин, према (1.22) важи и

$$Y = Y_0 + AX, \quad (1.24)$$

где су Y и Y_0 колоне координата тачака σM и σR у односу на репер Sg у простору $\mathcal{B}$. При том, ако је ту $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_m)$ и $Y_0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, тада се и сама релација $Y = Y_0 + AX$ даље своди на

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 + \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ &\vdots \\ y_m &= \alpha_m + \alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n \end{aligned} \right\}. \quad (1.25)$$

И обрнуто, за дате репере Re и Sg афиних простора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, формулама (1.25) је одређено једно афино пресликавање $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, којим се произвољној

тачки M из $\mathcal{A}$, са колоном координата $X = (x_1, \dots, x_n)$ у односу на репер Re , придружује тачка σM , са колоном координата $Y = (y_1, \dots, y_m)$ у односу на репер Sg .

Према томе, уз претходну симболику, учено афино пресликавање $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ је одређено једнозначно својим формулама (1.25) у односу на репере Re и Sg , а тиме и матрицом

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & Y_0 \\ O & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & \alpha_m \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

у којој је $A = [\alpha_{rs}]$ матрица његовог линеарног дела L у односу на пар векторских база e, g и $Y_0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ колона координата тачке σR у односу на репер Sg . Зовемо је и матрицом тог афиног пресликавања σ у односу на саме репере Re и Sg .

У случају када је ту $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ и $Re = Sg$, уместо $A = [\sigma]_{ee}$ пишемо само $A = [\sigma]_e$ и говоримо о матрици ученог афиног оператора σ , односно његовог линеарног дела L у односу на саму базу e . И слично за његову матрицу $\hat{A} = [\sigma]_{Re}$.

Афини оператори

Нека су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ било који афини простори над пољем $\mathbb{K}$ и са директрисама $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$. Према претходном одељку, пресликавање $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ је афино и са линеарним делом $L : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$, ако и само ако за бар једну, а тиме и сваку тачку P из $\mathcal{A}$ важи

$$\sigma(P + u) = \sigma P + L(u) \quad (u \in \mathbb{V}) \quad (1.26)$$

то јест $\sigma M = \sigma P + Lu$, где је $P + u = M$ врх вектора u са почетком P , а σM врх вектора $Lu = L(u)$ са почетком σP . При томе је само то афино пресликавање σ и инјективно, односно сурјективно, ако и само ако је то и његов линеарни део $\bar{\sigma} = L$.

Тврђење 16. Свако афино пресликавање $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ чува потпросторе, колинеарност тачака, релацију паралелности, као и барицентре, то јест важи:

- а) Ако је Π потпростор у $\mathcal{A}$, његова слика $\Omega = \sigma\Pi$ је потпростор простора $\mathcal{B}$ и тада мора бити $\dim \Omega \leq \dim \Pi$;
- б) Ако су тачке A , B и C колинеарне у афиним простору $\mathcal{A}$, онда су то и њихове слике σA , σB и σC у простору $\mathcal{B}$;
- в) Ако су потпростори Π и Γ паралелни у простору $\mathcal{A}$, онда су то и њихове слике $\sigma\Pi$ и $\sigma\Gamma$ у простору $\mathcal{B}$;
- г) Ако је G барицентар коначно много тачака A_r са масама α_r у простору $\mathcal{A}$, његова слика $T = \sigma G$ је барицентар тачака $B_r = \sigma A_r$ са истим масама α_r у простору $\mathcal{B}$.

Доказ. а) Ако је P било која тачка и $\mathbb{U}$ директриса уоченог потпростора Π од $\mathcal{A}$, биће $\Pi = \{P + u : u \in \mathbb{U}\}$, па на основу (1.26) следи да је тада и

$$\Omega = \sigma\Pi = \{\sigma P + Lu : u \in \mathbb{U}\},$$

то јест $\Omega = \sigma P + L(\mathbb{U})$. Како је $L(\mathbb{U})$ потпростор векторског простора $\mathbb{W}$, то посебно значи да је и Ω један потпростор афиног простора $\mathcal{B}$, са директрисом $L(\mathbb{U})$. Уз то је $\dim L(\mathbb{U}) \leq \dim \mathbb{U}$, а тиме и $\dim \Omega \leq \dim \Pi$.

- б) Ако су тачке A , B , C на некој правој Π , њихове слике σA , σB и σC су у потпростору $\Omega = \sigma\Pi$. Уз то је $\dim \Omega \leq \dim \Pi = 1$, па су тада и тачке σA , σB , σC колинеарне у простору $\mathcal{B}$.
- в) Нека је L линеарни део од σ . Ако су $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$ директрисе паралелних потпростора Π и Γ , једна од њих је садржана у оној другој. Јасно је да то онда важи и за директрисе $L(\mathbb{U})$ и $L(\mathbb{W})$ потпростора $\sigma\Pi$ и $\sigma\Gamma$ простора $\mathcal{B}$, па је тада и $\sigma\Pi // \sigma\Gamma$.
- г) Нека је $e_r = \overrightarrow{GA_r}$ и $\bar{\sigma} = L$. Како је $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$, због линеарности пресликавања L , из $\sum \alpha_r e_r = \vec{0}$ следи да тада мора бити и $\sum \alpha_r L e_r = \vec{0}$. То се даље своди на

$$\alpha_1 \overrightarrow{TB_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{TB_n} = \vec{0},$$

јер из $A_r = G + e_r$ и (1.26) следи да је ту и $B_r = T + L e_r$, то јест $L e_r = \overrightarrow{TB_r}$ за свако r . Отуда и само тврђење, јер је тиме и тачка $T = \sigma G$ барицентар тачака $B_r = \sigma A_r$ са масама α_r .

□

Посебно, ако је $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ систем барицентричних координата било које тачке M у односу на неку афину базу $(A_0, \dots, A_n)$ у простору $\mathcal{A}$, њена слика σM при афином пресликавању $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ је управо барицентар $M' = \alpha_0 B_0 + \dots + \alpha_n B_n$ тачака $B_r = \sigma A_r$ са масама α_r у простору $\mathcal{B}$.

Теорема 5. За сваку афину базу $(A_0, \dots, A_n)$ афиног простора $\mathcal{A}$ и сваки систем $\mathbb{T} = (B_0, \dots, B_n)$ од $n + 1$ тачака из афиног простора $\mathcal{B}$, над истим пољем $\mathbb{K}$, постоји тачно једно афино пресликавање $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, такво да је

$$\sigma A_0 = B_0, \sigma A_1 = B_1, \dots, \sigma A_n = B_n. \quad (1.27)$$

При том је то пресликавање и инјективно, односно сурјективно, ако и само ако је и систем $\mathbb{T}$ афино слободан, односно афина база у простору $\mathcal{B}$.

Доказ. Нека је $e_r = A_r - A_0$ и $g_r = B_r - B_0$. Тада је систем $[e_1, \dots, e_n]$ једна база директрисе $\mathbb{V}$ простора $\mathcal{A}$. При том су и g_r -ови из директрисе $\mathbb{W}$ простора $\mathcal{B}$, па постоји тачно једно линеарно пресликавање $L : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ за које је $L(e_r) = g_r$ за свако r . Тиме је са

$$\sigma(A_0 + u) = B_0 + L(u) \quad (u \in \mathbb{V}) \quad (1.28)$$

дефинисано и једно афино пресликавање $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Уз то је $A_0 + e_r = A_r$ и $B_0 + g_r = B_r$ за свако $r > 0$, па је тако и $\sigma A_r = B_r$ за свако r . Наравно, ако то својство има и неко афино пресликавање τ , његов линеарни део мора бити уочено L , а тиме и $\tau = \sigma$.

Такође, према претходном одељку, то афино пресликавање је и инјективно, ако и само ако је то и његов линеарни део L . Ово последње ће бити једино ако су и вектори g_r линеарно независни, а самим тим и тачке $B_0, \dots, B_n$ афино слободне. И слично за његову сурјективност. $\square$

Посебно, ако је $\dim \mathcal{A} = 2$, из претходне теореме следи да је афино пресликавање σ равни $\mathcal{A}$ у неки афини простор $\mathcal{B}$ једнозначно одређено, ако је дато на три неколинеарне тачке, на пример A, B, C . При томе, саме слике $\sigma A, \sigma B, \sigma C$ тих тачака могу бити и колинеарне. И слично за простор $\mathcal{A}$ димензије 3, само што је тада σ одређено ако је дато на четири тачке A, B, C, D које нису у једној равни.

За нас су овде од посебног интереса афина пресликавања $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ афиног простора $\mathcal{A}$ у њега самог. Зовемо их и **афиним операторима** на

то простору $\mathcal{A}$. Њихови линеарни делови су управо *линеарни оџерацији* на векторском простору $\mathbb{V}$.

Сам скуп свих афиних оператора датог простора $\mathcal{A}$ је и један *моноид*, то јест и једна полугрупа са неутралом у односу на слагање пресликавања $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma \circ \tau$. Означаватимо га са $\mathbb{MA}(\mathcal{A})$. Његов неутрал је идентични оператор $\varepsilon : M \mapsto M$ афиног простора $\mathcal{A}$. Зовемо га и **коинцидацијом** на том простору $\mathcal{A}$. Њен линеарни део $\bar{\varepsilon}$ је управо идентични оператор I на векторском простору $\mathbb{V}$.

Међутим, линеарни део афиног оператора σ на $\mathcal{A}$ може бити идентични оператор на $\mathbb{V}$ и у случају када је $\sigma \neq \varepsilon$. Тако, на пример, ако су P и S две фиксиране тачке из $\mathcal{A}$ и L било који линеарни оператор на $\mathbb{V}$, тада је са

$$\sigma(P + u) = S + Lu \quad (u \in \mathbb{V})$$

дефинисан један афини оператор $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, чији је линеарни део $\bar{\sigma} = L$ и за који је $\sigma P = S$. За $P \neq S$ и $L = I$, ту мора бити $\sigma \neq \varepsilon$. Штавише, тада је $\sigma M \neq M$ и за сваку тачку $M = P + u$.

У вези са тим, за афини оператор $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ кажемо да **фиксира** неку тачку P из $\mathcal{A}$, као и да је та тачка **фиксна** у односу на оператор σ , ако је $\sigma P = P$. Овде ћемо скуп свих фиксних тачака P , по правилу означавати са $\mathbb{F} = \mathbb{F}_\sigma$. Управо смо видели да он може бити, како празан, тако и цео афини простор $\mathcal{A} = \mathbb{F}_\varepsilon$.

Слично, за вектор u кажемо да је **фиксан** у односу на дати линеарни оператор $L : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, ако је $L(u) = u$, то јест $(L - I)(u) = \vec{0}$. То посебно значи да је скуп свих фиксних вектора линеарног оператора L управо језгро $\mathcal{F} = \ker(L - I)$ линеарног оператора $L - I$, а тиме и један потпростор векторског простора $\mathbb{V}$.

Теорема 6. Скуп $\mathbb{F}$ свих фиксних тачака афиног оператора $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ је или празан, или један афини потпростор од $\mathcal{A}$ чија је директриса управо скуп $\mathcal{F} = \ker(L - I)$ свих фиксних вектора оператора $L = \bar{\sigma}$. У првом случају је $\dim \mathcal{F} \geq 1$, а у другом $\dim \mathcal{F} = \dim \mathbb{F}$.

Доказ. Прво, ако σ има бар једну фиксну тачку, на пример P , према (1.26), тада је и $\sigma(P + u) = P + Lu$ за сваки вектор u директрисе $\mathbb{V}$ простора $\mathcal{A}$. Тиме је и сама релација $\sigma(P + u) = P + u$ еквивалентна са $L(u) = u$, то јест $u \in \mathcal{F}$. Отуда је и нека од тачака $P + u$ у скупу $\mathbb{F}$, ако и само ако је и у скупу $P + \mathcal{F}$, па је тада $\mathbb{F} = P + \mathcal{F}$.

Нека је, сада, скуп $\mathbb{F}$ празан и P било која тачка из $\mathcal{A}$. То значи да не постоји тачка $M = P + u$ за коју је $\sigma M = M$, то јест $\sigma P + Lu = P + u$. Тиме не постоји ни вектор u за који је

$$(L - I)(u) = Lu - u = \overrightarrow{\sigma P P},$$

па линеарни оператор $L - I$ није сурјективан. Како је векторски простор $\mathbb{V}$ коначне димензије, према претходној секцији, тај оператор није ни инјективан. Отуда и преостали део тврђења, јер то управо значи да је тада $\ker(L - I) \neq \{\vec{0}\}$, а тиме и $\dim \mathcal{F} \geq 1$. $\square$

Посебно, ако су неке тачке фиксне у односу на афини оператор σ , заједно са њима, потпростор $\mathbb{F} = \mathbb{F}_\sigma$ садржи и њихов афини омотач Ω .

Тврђење 17. Ако су тачке $P_0, \dots, P_m$ фиксне у односу на дати афини оператор σ простора $\mathcal{A}$, онда је то и свака од тачака P из њиховог афиног омотача $\Omega = \langle P_0, \dots, P_m \rangle$.

Такође, за неки подскуп Δ афиног простора $\mathcal{A}$ кажемо да је **фиксан**, односно **инваријантан** у односу на афини оператор σ , ако је $\sigma(\Delta) = \Delta$, односно $\sigma(\Delta) \subset \Delta$. Наравно, то не значи да је тада и свака тачка P из Δ фиксна, него само да су и тачке σP у скупу Δ . Ако то важи, то јест ако је и $\sigma P = P$ за сваку тачку P из Δ , тада за скуп Δ кажемо и да је, у односу на σ , фиксан **тачка по тачка**.

С друге стране, ако је Oe било који репер простора $\mathcal{A}$ димензије n , линеарни део L афиног оператора σ на $\mathcal{A}$ је једнозначно одређен својом матрицом $A = [L]_e$ у односу на базу $e = [e_1, \dots, e_n]$ простора $\mathbb{V}$. Уз то је $L(u)_e = Au_e$, где u_e означава колону координата вектора u у односу на ту базу e . Матрицу A зовемо и матрицом самог афиног оператора σ у односу на уочену базу e , односно репер Oe и означавамо са $[\sigma]_e = [\bar{\sigma}]_e$, односно $[\sigma]_{Oe}$. Уз то, како је линеарни део композиције $\sigma \circ \tau$ два афина оператора σ и τ управо композиција линеарних оператора $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$, биће $[\sigma \circ \tau] = [\sigma]_e [\tau]_e$ па је тако са $\Phi(\sigma) = [\sigma]_e$ дефинисан и један епиморфизам моноида $\mathbb{AF}(\mathcal{A})$ на мултипликативни моноид $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ свих квадратних матрица реда n над пољем скалара $\mathbb{K}$.

Најзад, ако је Sg неки репер афиног простора $\mathcal{A}$ и P матрица за коју је $g = eP$, одговарајућа матрица $B = [\sigma]_g$ је слична матрици $A = [\sigma]_e$ и тада је $B = P^{-1}AP$. То посебно значи да се сви појмови који су исти за све сличне

матрице могу пренети и на афини оператор, мислећи при том на одговарајуће појмове било које његове матрице.

Тако, на пример, говоримо о детерминанти $\det \sigma$, карактеристичном полиному ϕ и минималном полиному μ афиног оператора σ и његовог линеарног дела L , мислећи при том на одговарајуће појмове било које од њуихових матрица $A = [\sigma]_e = [L]_e$.

Афина група

Нека је $\mathcal{A}$ било који афини простор, са директрисом $\mathbb{V}$ и пољем скалара $\mathbb{K}$. **Бијективне афине операторе** на $\mathcal{A}$, то јест бијективна афина пресликавања $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ такође зовемо и **афиним трансформацијама** на том простору $\mathcal{A}$.

Према одељку везаном за афина пресликавања, ако су σ и τ било које афине трансформације на $\mathcal{A}$, онда је то и њихова композиција $\omega = \sigma \circ \tau$, као и њихови инверзи. То посебно значи да је скуп свих афиних трансформација на $\mathcal{A}$ и једна група у односу на њихово слагање $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma \circ \tau$. Зовемо је и **афином групом** уоченог афиног простора $\mathcal{A}$. Овде ћемо је по правилу означавати са $\mathbb{GA}(\mathcal{A})$ или само са $\mathbb{GA}$ -ако је јасно о ком простору $\mathcal{A}$ је реч. Њен неутрал је коинциденција ε простора $\mathcal{A}$. При том ћемо и уместо $\sigma \circ \tau$ писати само $\sigma\tau$.

Наравно, заједно са афином трансформацијом σ и њен линеарни део $\bar{\sigma} = L$ је бијективан, а тиме и један елемент *линеарне групе* $\mathbb{GL}(\mathbb{V})$ свих инверзибилних линеарних оператора на простору $\mathbb{V}$.

Такође, ако је тачка P фиксна у односу на трансформације σ и τ , онда је она фиксна и у односу на трансформације $\sigma \circ \tau$ и σ^{-1} . Тиме је скуп $\mathbb{GA}_P$ свих трансформација из $\mathbb{GA}$ са истом фиксном тачком P , то јест скуп $\mathbb{GA}_P = \{\sigma \in \mathbb{GA} : \sigma P = P\}$ једна подгрупа групе $\mathbb{GA}$. При том је линеарни део од $\sigma \circ \tau$ управо $\bar{\sigma} \circ \bar{\tau}$, па је са

$$\Phi(\sigma) = \bar{\sigma} \quad (\sigma \in \mathbb{GA}_P)$$

дефинисан и један изоморфизам Φ групе $\mathbb{GA}_P$ на линеарну групу $\mathbb{GL}(\mathbb{V})$. Наиме, за свако L из групе $\mathbb{GL}(\mathbb{V})$ постоји тачно једно σ из $\mathbb{GA}$ за које је $\sigma P = P$ и $\bar{\sigma} = L$, што управо значи да је то Φ и бијективно. Отуда је и

$$\mathbb{GA}_P \cong \mathbb{GL}(\mathbb{V}) \cong \mathbb{GL}(n, \mathbb{K}),$$

јер је, за дату базу e , са $L \mapsto [L]_e$ дефинисан и један изоморфизам групе $\mathbb{GL}(\mathbb{V})$ на групу свих инверзibilних матрица реда $n = \dim \mathbb{V}$ над пољем $\mathbb{K}$, то јест линеарну групу $\mathbb{GL}(n, \mathbb{K})$.

Тврђење 18. За сваку коначну групу $\mathbb{G}$ афиних трансформација афиног простора $\mathcal{A}$, над пољем $\mathbb{K}$ карактеристике нула, постоји бар једна тачка P , таква да је $\sigma P = P$ за свако σ из $\mathbb{G}$.

Доказ. Нека је $\mathbb{G} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ и A било која тачка простора $\mathcal{A}$. Ако је $A_r = \sigma_r A$ и σ било која од трансформација из $\mathbb{G}$, тада је и $\sigma \sigma_r = \sigma_s$ за неко s . Тиме је, за свако r и тачка

$$\sigma A_r = \sigma \sigma_r A = \sigma_s A = A_s$$

у скупу $\mathbb{S} = \{A_1, \dots, A_m\}$. При том је skup $\mathbb{S}$ коначан и пресликавање σ инјективно, па ту мора бити и $\sigma \mathbb{S} = \mathbb{S}$.

С друге стране, како је поље $\mathbb{K}$ карактеристике нула, skup $\mathbb{S}$ има и тежиште, на пример P . Према тврђењу 16, тада је и тачка σP тежиште скупа $\sigma \mathbb{S} = \mathbb{S}$, па је тако и $\sigma P = P$ за свако σ из $\mathbb{G}$. $\square$

Транслација и хомотетија

Ако је a било који вектор из директрисе $\mathbb{V}$ афиног простора $\mathcal{A}$ и $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ пресликавање одређено са $\tau M = M + a$, одмах следи да тада и за сваке две тачке S и M важи

$$\overrightarrow{M\tau M} = a, \quad \overrightarrow{\tau S\tau M} = \overrightarrow{SM}. \quad (1.29)$$

Тиме је то пресликавање $\tau = \tau_a$ и једна афина трансформација на $\mathcal{A}$, чији је линеарни део управо идентични оператор $\bar{\tau} = I$ простора $\mathbb{V}$. Зовемо је и **транслацијом** афиног простора $\mathcal{A}$ за уочени вектор a .

Другим речима, ту је $\tau(S + v) = \tau S + v$ за сваки вектор v из $\mathbb{V}$, где је τS врх вектора a са почетком у фиксираној тачки S . То посебно значи да транслација τ_a нема фиксних тачака, осим ако је $a = 0$, а самим тим и $\tau = \tau_0 = \varepsilon$. При том је

$$\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b} \quad \wedge \quad \tau_a^{-1} = \tau_{-a} \quad (a, b \in \mathbb{V}), \quad (1.30)$$

па је skup $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathcal{A})$ свих транслација τ_a афиног простора $\mathcal{A}$ и једна *комутиативна* подгрупа афине групе $\mathbb{GA}$.

Штавише, та подгрупа је и *нормална* у групи $\mathbb{GA}$, то јест, заједно са τ садржи и сваку од композиција $\sigma = \pi \circ \tau \circ \pi^{-1}$. Прецизније, за $\tau = \tau_a$ важи и

$$\pi \circ \tau_a \circ \pi^{-1} = \tau_c \quad (\pi \in \mathbb{GA}, c = \bar{\pi}a). \quad (1.31)$$

Наиме, ако је ту $\pi^{-1}M = P$, као и $\tau_a P = Q$, то јест $Q = P + a$, биће и

$$\sigma M = \pi(P + a) = \pi P + \bar{\pi}a = M + \bar{\pi}a,$$

па је σ транслација за вектор $\bar{\pi}a$. Тиме се може говорити и о количничкој групи $\mathbb{GA}/\mathbb{T}$ афине групе $\mathbb{GA}$ по њеној нормалној подгрупи $\mathbb{T}$.

Тврђење 19. Ако је ω било која трансформација из $\mathbb{GA}(\mathcal{A})$, за сваку тачку P афиног простора $\mathcal{A}$ постоје тачно једна транслација $\tau = \tau_a$ и тачно једна трансформација σ за које је

$$\omega = \tau_a \circ \sigma \quad \wedge \quad \sigma P = P. \quad (1.32)$$

И слично за једнозначност растављања $\omega = \pi \circ \tau_c$ у коме је $\pi P = P$. Уз то је $\pi = \sigma$, $\bar{\sigma} = \bar{\omega}$ и $a = \bar{\omega}c$.

Доказ. Према 1.30, релације 1.32 се свODE на $\sigma = \tau_{-a} \circ \omega$ и $\omega P - a = P$, па како је вектор a са тим својством одређен једнозначно са σ и P , биће то и сама трансформација σ .

И слично за растављање $\omega = \pi \circ \tau_c$. Према 1.31, тада је и $\omega = \tau_{\bar{\pi}c} \circ \pi$, па због једнозначности тих растављања, ту мора бити $a = \bar{\pi}c$, као и $\pi = \sigma$. Уз то је $\bar{\tau} = I$, а тиме и $\bar{\omega} = \bar{\tau} \circ \bar{\sigma} = \bar{\pi}$. $\square$

Другим речима, сваки елемент ω групе $\mathbb{GA}$ има тачно једно растављање облика $\omega = \tau \circ \sigma$, где је τ неки елемент њене нормалне подгрупе $\mathbb{T}$, док је σ неки елемент подгрупе $\mathbb{GA}_P$ свих трансформација из $\mathbb{GA}$ са датом фиксном тачком P . Тиме је и

$$\mathbb{GA}/\mathbb{T} \cong \mathbb{GA}_P \cong \mathbb{GL}(\mathbb{V}).$$

Уосталом, како је са $\Phi(\sigma) = \bar{\sigma}$ дефинисан један епиморфизам групе $\mathbb{GA}$ на групу $\mathbb{GL}(\mathbb{V})$, према првој теорему о изоморфизмима група, ова друга је изоморфна са $\mathbb{GA}/\ker \Phi$. Уз то, ако је σ из $\ker \Phi$, то јест $\Phi(\sigma) = I$, релација $\bar{\sigma} = I$ тачно значи да је σ једна транслација, па је ту $\ker \Phi = \mathbb{T}$.

С друге стране, према 1.29, транслације афиног простора $\mathcal{A}$ су само нека од пресликавања $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ која сваку праву Δ пресликавају на њој паралелну

праву $\sigma\Delta$. Наиме, ако су M, N, P било које неколинеарне тачке и $\sigma : M \mapsto \bar{M}$, према Дезарговој теореме, тада су праве $\langle M, \bar{M} \rangle$, $\langle N, \bar{N} \rangle$ и $\langle P, \bar{P} \rangle$, или паралелне, или се секу у једној тачки, на пример S . У првом случају, то пресликавање σ је управо транслација за вектор $a = \bar{P} - P$, а у другом, према Талесовој теореме, важи и $S\bar{M} : SM = S\bar{P} : SP$, то јест

$$\overrightarrow{S\sigma M} = \alpha \overrightarrow{SM} \quad (M \in \mathcal{A}) \quad (1.33)$$

за тачно једна скалар $\alpha = S\bar{P} : SP$ из $\mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. При том је, за свако $\alpha \neq 0$, са (1.33) дефинисана једна афина трансформација на $\mathcal{A}$, са линеарним делом $L = \alpha I$. Зовемо је **хомотетијом** афиног простора $\mathcal{A}$, са центром или средиштем S и коефицијентом α .

Теорема 7. Једине трансформације афиног простора $\mathcal{A}$, које све његове праве пресликавају на њима паралелне праве, су транслације и хомотетије, то јест све афине трансформације чији су линеарни делови облика $L = \alpha I$.

Посебно, скуп $\mathbb{HT}$ свих хомотетија и свих транслација афиног простора $\mathcal{A}$ је и једна подгрупа његове афине групе $\mathbb{GA}$. То су управо све афине трансформације из $\mathbb{GA}$ које у односу на бар један, а тиме и сваки репер Oe имају матрицу облика αE , а тиме и формуле облика

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = \alpha_1 + \alpha x_1, \\ \vdots \\ y_n = \alpha_n + \alpha x_n \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} y_1 = \alpha_1 + x_1, \\ \vdots \\ y_n = \alpha_n + x_n \end{array} \right\},$$

то јест $Y = Y_0 + \alpha X$. За $\alpha = 1$, то су формуле транслације τ_a за вектор $a = \sum a_r e_r$, а за $\alpha \neq 1$, формуле хомотетије $\nu = \nu_{S, \alpha}$ са коефицијентом α и центром у њихој јединој фиксној тачки S чије су координате одређене са $X = Y_0 + \alpha X$, то јест $x_r = \frac{\alpha_r}{1-\alpha}$.

Најзад, ако ту карактеристика поља $\mathbb{K}$ није 2, на пример за $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, хомотетије са коефицијентом -1 такође зовемо и **централним симетријама**. Наравно, њихова матрица у односу на било који репер Oe је управо $-E$.

1.7 Барицентричне комбинације и афини омотач

Излагање у овом и наредном одељку засновано је на материјалу изложеном у књизи [11].

Појам барицентра може се природно проширити на барицентричне комбинације тачака. Нека су $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ изабране тачке афиног простора $\mathcal{A}$. Поставља се питање да ли се и у скуп тачака могу увести неке операције сабирања и множења скаларом. Изаберимо произвољну тачку $O \in \mathcal{A}$. Свакој тачки A_r тада одговара вектор $\overrightarrow{OA_r}$ придруженог векторског простора $\mathbb{V}$. Због тога се јавља идеја да изразу $\alpha_0 A_0 + \dots + \alpha_k A_k$ придружимо тачку A такву да је $\overrightarrow{OA} = \alpha_0 \overrightarrow{OA_0} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{OA_k}$. Међутим, у општем случају добијена тачка A зависи од избора тачке O . Следеће тврђење показује како то можемо избећи.

Напомена 2. Користећи претходно уведену нотацију, запис $\overrightarrow{OA} = \alpha_0 \overrightarrow{OA_0} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{OA_k}$ је еквивалентан запису $A = O + \sum_{r=0}^k \alpha_r \overrightarrow{OA_r}$.

Тврђење 20. Ако су $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ скалари такви да је $\sum_{r=0}^k \alpha_r = 1$, тада тачка $A = O + \sum_{r=0}^k \alpha_r \overrightarrow{OA_r}$ не зависи од избора тачке O , већ само од скалара $\alpha_0, \dots, \alpha_k$.

Доказ. Нека је $O' \in \mathcal{A}$ тачка различита од тачке O . Тада је

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'A} &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{O'O} + \sum_{r=0}^k \alpha_r \overrightarrow{OA_r} \\ &= \left(\sum_{r=0}^k \alpha_r \right) \overrightarrow{O'O} + \sum_{r=0}^k \alpha_r \overrightarrow{OA_r} \\ &= \sum_{r=0}^k \alpha_r (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_r}) \\ &= \sum_{r=0}^k \alpha_r \overrightarrow{O'A_r}, \end{aligned}$$

што управо и значи да је $P = O' + \sum_{r=0}^k \alpha_r \overrightarrow{O'A_r}$. □

Тачка $A = O + \sum_{r=0}^k \alpha_r \overrightarrow{OA_r}$, независна од избора тачке O , то јест за коју је $\sum_{r=0}^k \alpha_r = 1$, назива се **барицентрична комбинација** тачака $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ са коефицијентима $\alpha_0, \dots, \alpha_k$, где је $\alpha_0 + \dots + \alpha_k = 1$, и обележава $A = \sum_{r=0}^k \alpha_r A_r = \alpha_0 A_0 + \dots + \alpha_k A_k$.

Напомена 3. Барицентричну комбинацију не треба поистовећивати са барицентром. Барицентрична комбинација је тачка добијена од задатих тачака и коефицијената чији је збир 1, док је барицентар јединствена тачка система пондерисаних тачака која задовољава услов из дефиниције барицентра.

Операција уведена, на претходно описан начин, у скупу тачака нема уобичајена својства сабирања, као што се и могло очекивати. Уместо асоцијативности важи следеће:

Тврђење 21. Ако је $\alpha_k \neq 1$, онда је

$$\alpha_0 A_0 + \dots + \alpha_k A_k = (1 - \alpha_k) \left(\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_k} A_0 + \dots + \frac{\alpha_{k-1}}{1 - \alpha_k} A_{k-1} \right) + \alpha_k A_k.$$

Доказ. Нека је $A = \alpha_0 A_0 + \dots + \alpha_k A_k$. Изаберимо тачку O . Тада је $1 - \alpha_k \neq 0$ и тврђење непосредно следи из

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (\alpha_0 \overrightarrow{OA_0} + \dots + \alpha_{k-1} \overrightarrow{OA_{k-1}}) + \alpha_k \overrightarrow{OA_k} \\ &= (1 - \alpha_k) \left(\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_k} \overrightarrow{OA_0} + \dots + \frac{\alpha_{k-1}}{1 - \alpha_k} \overrightarrow{OA_{k-1}} \right) + \alpha_k \overrightarrow{OA_k}. \end{aligned}$$

□

Барицентричне комбинације се понашају добро у односу на афина пресликавања, као што показује следеће тврђење.

Тврђење 22. За свако афино пресликавање $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ афиних простора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ важи

$$\sigma(A) = \sum_{r=0}^k \alpha_r \sigma(A_r),$$

где је $A = \sum_{r=0}^k \alpha_r A_r$ и $\sum_{r=0}^k \alpha_r = 1$, $r = 0, \dots, k$.

Доказ. Ако је L линеарни део од σ , из афиности σ добијамо

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= \sigma\left(O + \sum_{r=0}^k \alpha_r \overrightarrow{OA_r}\right) \\ &= \sigma(O) + L\left(\sum_{r=0}^k \alpha_r \overrightarrow{OA_r}\right) \\ &= \sigma(O) + \sum_{r=0}^k \alpha_r (\sigma(A_r) - \sigma(O)) \\ &= \sum_{r=0}^k \alpha_r \sigma(A_r).\end{aligned}$$

У последњем кораку смо искористили $\sum_{r=0}^k \alpha_r = 1$. □

Барицентричне комбинације у афиној геометрији имају сличну улогу као линеарне комбинације у векторском простору.

Ако је $S \subset \mathcal{A}$ подскуп афиног простора $\mathcal{A}$, скуп

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{r=0}^k \alpha_r A_r : \sum_{r=0}^k \alpha_r = 1, A_r \in S, r = 0, \dots, k \right\}$$

назива се **афини омотач** скупа S .

Тврђење 23. Афини омотач $\langle S \rangle$ скупа $S \subset \mathcal{A}$ је најмањи афини потпростор од $\mathcal{A}$ који садржи скуп S , једнак пресеку свих афиних потпростора простора $\mathcal{A}$ који садрже S .

Доказ. Докажимо да је $\langle S \rangle$ афини потпростор. Довољно је показати да он, заједно са сваке две своје различите тачке A и B , садржи целу праву AB . Нека су $A = \sum_{r=0}^k \alpha_r A_r$ и $B = \sum_{r=0}^k \beta_r A_r$, где су $A_r \in S$, $\sum_{r=0}^k \alpha_r = 1$ и $\sum_{r=0}^k \beta_r = 1$. Ако је $M \in AB$, тада постоји $\alpha \in \mathbb{K}$ такво да је $M = A + \alpha \overrightarrow{AB}$. Пошто је

$$\overrightarrow{AB} = \sum_{r=0}^k \beta_r \overrightarrow{AA_r},$$

добијамо

$$M = A + \alpha \sum_{r=0}^k \beta_r \overrightarrow{AA_r} = (1 - \alpha)A + \alpha \sum_{r=0}^k \beta_r A_r = \sum_{r=0}^k ((1 - \alpha)\alpha_r + \alpha\beta_r) A_r.$$

При томе је $\sum_{r=0}^k ((1 - \alpha)\alpha_r + \alpha\beta_r) = (1 - \alpha) + \alpha = 1$, па је $M \in \langle S \rangle$. Дакле, $\langle S \rangle$ је афини потпростор.

Нека је Σ пресек свих афиних потпростора који садрже S . Потпростор Σ је непразан, јер садржи сам простор $\mathcal{A}$. Пошто је $\langle S \rangle$ афини потпростор који садржи S , биће $\Sigma \subset \langle S \rangle$.

Са друге стране, нека је $B \in \langle S \rangle$. Тада је $B = \sum_{r=0}^k \alpha_r A_r$, где су $A_r \in S$ и $\sum_{r=0}^k \alpha_r = 1$. Нека је $A \in \Sigma$. Пошто Σ садржи S , важи $A_r \in \Sigma$ за $r = 0, \dots, k$, па су $\overrightarrow{AA_r}$ вектори придруженог векторског потпростора од Σ . Стога је $B = A + \sum_{r=0}^k \alpha_r \overrightarrow{AA_r} \in \Sigma$. Дакле, $\langle S \rangle \subset \Sigma$, па следи $\langle S \rangle = \Sigma$.

Према томе, $\langle S \rangle$ је најмањи афини потпростор од $\mathcal{A}$ који садржи S и једнак је пресеку свих афиних потпростора који садрже S . $\square$

Нека је $\mathcal{A}$ афини простор, а $A_0, \dots, A_k$ тачке у $\mathcal{A}$. Кажемо да су тачке A_r у **општем положају** ако је $\dim \langle A_0, \dots, A_k \rangle = k$. Три тачке у општем положају називамо **неколинеарним**, а четири **некомпланарним**. Када тачке нису у општем положају, то јест, када је $\dim \langle A_0, \dots, A_k \rangle < k$, три и више тачака на истој правој ($\dim \langle A_0, \dots, A_k \rangle = 1$) називамо **колинеарним**, а четири и више тачака у истој равни ($\dim \langle A_0, \dots, A_k \rangle = 2$) називамо **компланарним**.

Приметимо да су две тачке у општем положају ако и само ако су различите.

Тврђење 24. За произвољне тачке $A_0, \dots, A_k$ важи

$$\langle A_0, \dots, A_k \rangle = A_0 + \Omega(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}).$$

Тачке су у општем положају ако и само ако су вектори $v_r = \overrightarrow{A_0A_r}$ ($r = 1, \dots, k$) линеарно независни.

Доказ. Ако је $\sum_{r=0}^k \alpha_r = 1$, тада је $\alpha_0 A_0 + \dots + \alpha_k A_k = A_0 + \alpha_0 \overrightarrow{A_0A_0} + \alpha_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{A_0A_k} = A_0 + \alpha_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{A_0A_k}$, при чему $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ могу да буду произвољни, а $\alpha_0 = 1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_k)$. Одатле следи да је $\langle A_0, \dots, A_k \rangle = A_0 + \Omega(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k})$. Тачке су у општем положају ако и само ако је димензија векторског потпростора једнака k што је еквивалентно томе да вектори $\overrightarrow{A_0A_r}$ ($r = 1, \dots, k$) чине базу. $\square$

Напомена 4. Ако су тачке $A_0, \dots, A_k$ у општем положају, онда је свака тачка $A \in \langle A_0, \dots, A_k \rangle$ на јединствен начин представљена у облику $A = \alpha_0 A_0 + \dots + \alpha_k A_k$, где је $\alpha_0 + \dots + \alpha_k = 1$.

На основу претходног следи да сваке две различите тачке једнозначно одређују праву

$$AB = \langle A, B \rangle = \{\alpha A + (1 - \alpha)B : \alpha \in \mathbb{K}\},$$

а сваке три неколинеарне једнозначно одређују раван

$$\Pi(ABC) = \langle A, B, C \rangle = \{\alpha A + \beta B + \gamma C : \alpha + \beta + \gamma = 1\}.$$

Аксиоме индциденције (аксиоме прве групе) и аксиома паралелности (аксиома пете групе) еуклидске геометрије, у афиној геометрији су тврђења која се доказују.

1.8 Конвексни подскупови афиног простора

До сада смо геометрију афиног простора развијали над произвољним основним пољем $\mathbb{K}$. Међутим, уређеност поља $\mathbb{R}$ реалних бројева има врло специфичне геометријске последице, које су од значаја за нашу интуитивну геометрију. Зато ћемо у остатку овог одељка за основно поље над којим посматрамо афине просторе узети реалне бројеве $\mathbb{R}$. Дакле, нека је $\mathcal{A}$ афини простор над $\mathbb{R}$, а $A_0, \dots, A_k$ изабране тачке из $\mathcal{A}$.

Барицентрична комбинација $B = \sum_{r=0}^k \alpha_r A_r$ са $\sum_{r=0}^k \alpha_r = 1$ и $\alpha_r \geq 0$ ($r = 0, \dots, k$) назива се **конвексном комбинацијом** тачака $A_0, \dots, A_k$ са коефицијентима $\alpha_0, \dots, \alpha_k$.

Приметимо да из услова $\alpha_0 + \dots + \alpha_k = 1$ и сви $\alpha_r \geq 0$ следи $0 \leq \alpha_r \leq 1$.

Ако је $S \subset \mathcal{A}$ произвољан подскуп, скуп

$$\mathcal{C}(S) = \{\alpha_0 A_0 + \dots + \alpha_k A_k : \sum_{r=0}^k \alpha_r = 1, \alpha_r \geq 0, A_r \in S\}$$

назива се **конвексни омотач** скупа S . За коначан скуп тачака у општем положају $S = \{A_0, \dots, A_k\}$, $\mathcal{C}(S)$ се назива **симплексом** са теменима $A_0, \dots, A_k$ и обележава са $\Delta(A_0 \dots A_k)$. Димензија симплекса Δ је број $\dim \Delta = \dim \langle \Delta \rangle = k$. За $k = 1$ једнодимензионални симплекс са два различита темена A_0, A_1 назива се **дуж** са крајевима A_0, A_1 и обележава са $A_0 A_1$. За $k = 2$ дводимензионални симплекс $\Delta(A_0 A_1 A_2)$ са три неколинеарна темена A_0, A_1, A_2 је **троугао**, за $k = 3$ тродимензионални симплекс $\Delta(A_0 A_1 A_2 A_3)$ са четири некомпланарна темена A_0, A_1, A_2, A_3 је **тетраедар**. Тачка $A = \frac{1}{k+1} A_0 + \dots + \frac{1}{k+1} A_k$

је **центар симплекса** Δ , који се за $k = 1$ назива још и **средиште дужи** A_0A_1 .

Дакле, дуж AB је скуп конвексних комбинација њених крајева $AB = \{\alpha A + (1 - \alpha)B : 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset \mathcal{A}$, а њено средиште је тачка $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. Приметимо да је M средиште дужи AB ако и само ако је $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Видимо да је $\mathcal{C}(S) \subset \langle S \rangle$.

Подскуп $S \subset \mathcal{A}$ је **конвексан** ако заједно са сваке своје две различите тачке A и B садржи и целу дуж AB . Празан скуп и једноелементни скуп (тачка) су конвексни скупови.

Тврђење 25. а) Конвексни скуп K садржи сваку конвексну комбинацију својих тачака.

б) Пресек произвољне фамилије конвексних скупова је конвексан.

Доказ. а) Нека су $A_0, \dots, A_k \in K$. Доказаћемо да је $A = \alpha_0 A_0 + \dots + \alpha_k A_k \in K$ индукцијом по k . За $k = 0$ тврђење је очигледно. Докажимо индуктивни корак. Ако је $\alpha_k = 1$, онда су сви $\alpha_r = 0$ ($r = 0, \dots, k - 1$), па је $A = A_k \in K$. Ако је пак $\alpha_k \neq 1$, онда је на основу тврђења 21,

$$A = \alpha_0 A_0 + \dots + \alpha_k A_k = (1 - \alpha_k) \left(\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_k} A_0 + \dots + \frac{\alpha_{k-1}}{1 - \alpha_k} A_{k-1} \right) + \alpha_k A_k,$$

па је на основу индуктивне хипотезе, $A \in K$.

б) $A, B \in \cap \mathcal{F}_i \iff (\forall i, A, B \in \mathcal{F}_i) \Rightarrow (\forall i, AB \subset \mathcal{F}_i) \iff AB \subset \cap \mathcal{F}_i$.

□

Тврђење 26. Конвексни омотач $\mathcal{C}(S)$ подскупа $S \subset \mathcal{A}$ представља најмањи конвексни подскуп од $\mathcal{A}$ који садржи S , једнак пресеку свих конвексних скупова који садрже S .

Доказ. Докажимо да је конвексан омотач заиста конвексан скуп. Нека су $A, B \in \mathcal{C}(S)$. Тада је $A = \sum_{r=0}^k \alpha_r A_r$, $B = \sum_{r=0}^k \beta_r A_r$ (можемо сматрати да су у питању исте тачке A_r јер је њихов број коначан, а додавање тачке са коефицијентом нула је могуће и не мења барицентричну комбинацију). За произвољну тачку M дужи AB је сада

$$M = \alpha A + (1 - \alpha)B = \alpha \left(\sum_{r=0}^k \alpha_r A_r \right) + (1 - \alpha) \left(\sum_{r=0}^k \beta_r A_r \right) = \sum_{r=0}^k [\alpha \alpha_r + (1 - \alpha) \beta_r] A_r,$$

при чему је $\sum_{r=0}^k [\alpha\alpha_r + (1-\alpha)\beta_r] = \alpha + (1-\alpha) = 1$ и $\alpha\alpha_r + (1-\alpha)\beta_r \geq 0$. Нека је K пресек свих конвексних скупова који садрже S и пошто је $\mathcal{C}(S)$ конвексан, биће $K \subset \mathcal{C}(S)$. Али на основу претходног тврђења је и $\mathcal{C}(S) \subset K$. $\square$

Приметимо да су симплекси конвексни скупови.

Сваки конвексан скуп је повезан, јер за сваке две његове тачке важи да садржи и целу дуж која их спаја.

Примена у рачунарској графици

Појмови барицентричних и конвексних комбинација, као и појам симплекса, имају непосредну примену у рачунарској графици. Један од основних примера јесте одређивање положаја тачке у односу на троугао.

Нека су A_0, A_1, A_2 темена троугла $\Delta(A_0A_1A_2)$ и нека је P произвољна тачка афиног простора. Пошто су темена троугла неколинеарна, за сваку тачку P њиховог афиног омотача постоје јединствени скалари $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ такви да је $P = \alpha_0A_0 + \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2$ и $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

На основу дефиниције конвексног омотача, тачка P припада троуглу $\Delta(A_0A_1A_2)$ ако и само ако су сви коефицијенти $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ненегативни. Дакле,

$$P \in \Delta(A_0A_1A_2) \iff \alpha_0 \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0.$$

При томе, ако су сви коефицијенти позитивни, тачка P припада унутрашњости троугла. Ако је један од коефицијената једнак нули, а преостала два су ненегативна, тачка се налази на одговарајућој страници троугла. Уколико је неки од коефицијената негативан, тачка се налази изван троугла.

У координатној равни, нека су темена троугла $A_0 = (x_0, y_0)$, $A_1 = (x_1, y_1)$ и $A_2 = (x_2, y_2)$, а нека је $P = (x, y)$. Одређивање коефицијената $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ своди се на решавање система

$$\begin{cases} x = \alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2, \\ y = \alpha_0y_0 + \alpha_1y_1 + \alpha_2y_2, \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \end{cases}$$

Након њиховог израчунавања, положај тачке у односу на троугао одређује се једноставним испитивањем њихових знакова.

На пример, нека су $A_0 = (0, 0)$, $A_1 = (1, 0)$ и $A_2 = (0, 1)$. За тачку $P = (0.2, 0.3)$ добијамо $\alpha_0 = 0.5$, $\alpha_1 = 0.2$ и $\alpha_2 = 0.3$. Сви коефицијенти

су позитивни, па се тачка P налази у унутрашњости троугла. За тачку $P = (0.4, 0.6)$ добијамо $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0.4$ и $\alpha_2 = 0.6$, па се тачка налази на страници A_1A_2 . Са друге стране, за тачку $P = (0.7, 0.6)$ добијамо $\alpha_0 = -0.3$, $\alpha_1 = 0.7$ и $\alpha_2 = 0.6$, па је тачка изван троугла.

Овај пример показује како се афина и конвексна геометрија могу непосредно применити у рачунарској графици. Провера припадности тачке троуглу може се свести на израчунавање коефицијената њеног јединственог представљања у односу на темена троугла и испитивање њихових знакова. Како се сложени геометријски објекти у рачунарској графици често представљају помоћу мреже троуглова, овакав поступак има практичан значај при обради и приказивању геометријских објеката.

1.9 Оријентација

Нека је у овом поглављу, из истих разлога као и у претходном, поље скалара поље реалних бројева, односно $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Наравно, тада је скуп $\mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 0\}$, то јест скуп свих *позитивних* елемената поља $\mathbb{R}$ затворен, како у односу на сабирање, тако и у односу на множење у том пољу. Уз то је са $\alpha \mapsto -\alpha$ дефинисана једна бијекција скупа $\mathbb{R}^+$ на скуп $\mathbb{R}^-$ свих *негативних* елемената поља $\mathbb{R}$.

Нека је $\mathcal{A}$ било који афини простор коначне димензије n , чије је поље скалара $\mathbb{R}$ уређено. Ако је e било која база његове директрисе $\mathbb{V}$, свака од њених база f је облика $f = eA$ за тачно једну матрицу A из $\text{GL}(n, \mathbb{R})$. При том је са

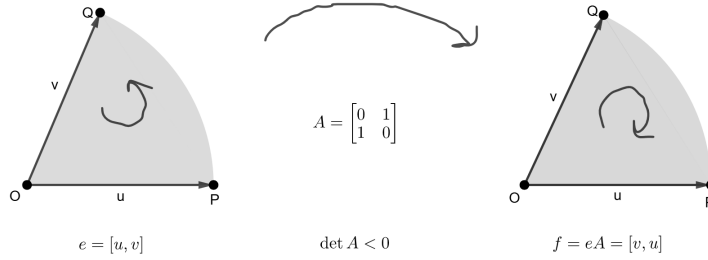
$$e \sim f \iff f = eA, \quad \det A > 0$$

дефинисана и једна релација еквиваленције у скупу $\mathcal{E}$ свих база векторског простора $\mathbb{V}$, чије две класе еквиваленције можемо означити са $\mathbb{V}^+$ и $\mathbb{V}^-$. Зовемо их његовим *оријентацијама*.

При том, за сам векторски простор $\mathbb{V}$ кажемо да је *оријентисан*, ако је изабрана једна од његових оријентација. У том случају, за базе које припадају изабраној оријентацији $\mathbb{V}^+$ кажемо да су *директне* и за сваку од тих база e важи $\mathbb{V}^+ = \{eA : \det A > 0\}$.

Наравно, сада и за афини простор $\mathcal{A}$ над уређеним пољем скалара $\mathbb{R}$ кажемо да је *оријентисан*, ако је то и његова директриса $\mathbb{V}$. Уз то, његову **оријентацију** обично одређујемо као скуп $\mathcal{A}^+$ свих репера Oe чије базе e

припадају самој оријентацији $\mathbb{V}^+$ простора $\mathbb{V}$. Као и за базе из $\mathbb{V}^+$, тада и за репере из $\mathcal{A}^+$ кажемо да су **директни**. Саме те репере одређујемо и као афино независне системе $(O, P_1, \dots, P_n)$ од $n + 1$ тачака простора $\mathcal{A}$, са почетком у тачки O и базом $e = [e_1, \dots, e_n]$ за коју је $P_r = O + e_r$.



Слика 1.11: Два супротно оријентисана афина репера

Такође, за трансформацију σ из афине групе $\mathbb{GA}$ простора $\mathcal{A}$ кажемо да је **директна**, ако чува његову оријентацију, то јест ако сваки репер Oe и његова слика $O'e'$ припадају истој оријентацији од $\mathcal{A}$. У супротном, за ту трансформацију кажемо да је **индиректна**.

Тврђење 27. Бијективна афина трансформација σ афиног простора $\mathcal{A}$ над пољем $\mathbb{R}$ је директна, акко бар једна, а тиме и свака од њених матрица има позитивну детерминанту, то јест ако и само ако за сваки репер Oe простора $\mathcal{A}$ важи $A = [\sigma]_e \implies \det A > 0$.

Доказ. Ако је L линеарни део од σ , сама релација $A = [\sigma]_e = [L]_e$ тачно значи да је $L(e) = eA$. Тиме су и базе e и $e' = L(e)$, односно репери Oe и $O'e'$ у истој оријентацији од $\mathcal{A}$, ако и само ако је $\det A > 0$. При том, $\det A = \det L$ не зависи од саме базе e , па то онда важи и за сваки репер Oe простора $\mathcal{A}$. $\square$

1.10 Распоред тачака

Нека је $\mathcal{A}$ било који афини простор димензије n над уређеним пољем $\mathbb{K}$, на пример пољем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. За тачку S кажемо да је **између** две различите тачке A и B у том простору и пишемо $\mathcal{B}(A, S, B)$, ако су вектори $u = \overrightarrow{AS}$ и $v = \overrightarrow{SB}$ у истој оријентацији праве $\langle A, B \rangle$. Другим речима, то тачно

значи да је тада $u = \delta v$ за неки *иозитиван* скалар δ из $\mathbb{K}$, а тиме и

$$\overrightarrow{AS} = \alpha \overrightarrow{AB}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

за неко α између 0 и 1. Јасно је да је тада и $\mathcal{B}(B, S, A)$. У том случају такође кажемо и да су тачке A и B са **разних страна** тачке S , као и да су тачке S и B са **исте стране** тачке A .

Уз напомену да ћемо уместо $\mathcal{B}(A, S, B)$ писати и $A - S - B$, тако дефини-сану релацију $\mathcal{B}$ дужине 3 зовемо и **релацијом између** или **распоредом** у уоченом афину простору $\mathcal{A}$.

Напомена 5. У аксиоматском заснивању еуклидске геометрије, својства распо-реда тачака на правој припадају аксиомама друге групе, односно аксио-мама распо-реда. У афиној геометрији, међутим, захваљујући претходно уве-деним појмовима и својствима афиног простора, ова својства се могу извести и посматрају се као тврђења која је могуће доказати.

Тврђење 28. Ако је Π права одређена тачкама A и B , њене преостале тачке су управо све тачке M за које важи бар једна од релација $A - B - M$, $A - M - B$, $M - A - B$.

Такође, за сваке две различите тачке A и B постоји и бар једна тачка M која је између те две тачке. Скуп свих тачака M са тим својством зовемо и **отвореном дужи** са **крајевима** или **теменима** A и B и означавамо са (AB) . Унију скупова (A, B) и $\{A, B\}$ означавамо са $[A, B]$ и зовемо **затвореном дужи** са крајевима A и B . И слично за **полуотворене дужи** $(AB]$ и $[AB)$ са тим истим крајевима. Овде ћемо их све означавати са AB , само што ће, рецимо, отворена дуж AB имати значење скупа (AB) . При том, ако се не каже другачије, дуж AB ће увек имати значење затворене дужи $[A, B]$.

С друге стране, скуп Π свих барицентара $M = \alpha A + (1 - \alpha)B$ две разне тачке A и B је управо права $\langle A, B \rangle$. То посебно значи да је

$$\overrightarrow{AM} = (1 - \alpha) \overrightarrow{AB},$$

па је ту тачка M између A и B , ако и само ако је $0 < \alpha < 1$. Тиме је и

$$AB = \{\alpha A + (1 - \alpha)B : 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

Такође, ако је $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$ за неки ненула скалар $\lambda \neq -1$, тада за тачку M кажемо и да дели дуж AB у датој размери $\lambda : 1$ (или само λ), па у том смислу

пишемо и

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB} \iff \lambda = AM : MB.$$

Посебно, за $\lambda = 1$, одговарајућа тачка M је управо тежиште пара тачака (A, B) . Зовемо је и **средиштем** саме дужи AB .

Тврђење 29. Тачка M дели дуж AB у односу λ ако и само ако је $M = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{1+\lambda}B$.

Доказ. Имамо да је $M = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{1+\lambda}B$ ако и само ако за неко, а онда и свако $P \in \mathcal{A}$, $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{PA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{PB}$. Ако за тачку P узмемо да је $P = M$, добијамо да је $0 = \overrightarrow{MA} + \lambda \overrightarrow{MB}$, што управо значи да M дели дуж AB у односу λ . $\square$

Ако су на правој Π дате две различите тачке A и B , знамо да је оне деле на три подскупа: дуж AB и две (отворене) полуправе Γ_A и Γ_B с крајевима A , B . Ти подскупови се лако карактеришу помоћу односа дељења дужи. Наиме, ако је $M \in \Pi$ и $\lambda = \lambda(M)$ однос у којем та тачка дели дуж AB , тада је:

$$M \in AB \quad (M \text{ између } A \text{ и } B) \iff \lambda > 0,$$

$$M \in \Gamma_A \quad (A \text{ између } M \text{ и } B) \iff -1 < \lambda < 0,$$

$$M \in \Gamma_B \quad (B \text{ између } A \text{ и } M) \iff \lambda < -1.$$

Тврђење 30. Нека су A, B, C и D четири тачке афиног простора $\mathcal{A}$. Следећа тврђења су еквивалентна: (1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; (2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$; (3) дужи AD и BC имају заједничко средиште.

Доказ. (1) $\iff$ (2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$. Обрнута импликација важи због симетрије.

(1) $\iff$ (3) Нека је M средиште дужи AD . Тада је $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MD}$, па је $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC}$, тј. M је средиште дужи BC .

(3) $\iff$ (1) Ако је M заједничко средиште AD и BC , онда је $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$.

$\square$

Напомена 6. Ако тачке A, B и C нису колинеарне, онда су услови из претходног тврђења еквивалентни томе да тачке A, B, D и C представљају темева паралелограма. У том случају су AB и DC , као и AC и BD , парови супротних страница, док се дијагонале AD и BC полове у њиховом заједничком средишту.

1.11 Полуправа и полупростор

Нека је Π права у афиним простору $\mathcal{A}$ и S фиксирана тачка те праве. За тачке $M, P \in \Pi \setminus \{S\}$ кажемо да су **са исте стране** тачке S ако је

$$\overrightarrow{SM} = \alpha \overrightarrow{SP}$$

за неко $\alpha > 0$. Тада отворену полуправу са почетком S која садржи тачку P означавамо са

$$(S, P) = \{S + \alpha(P - S) : \alpha > 0\}.$$

При том је свака њена тачка облика

$$M = (1 - \alpha)S + \alpha P, \quad \alpha > 0,$$

па је M барицентар тачака S и P са позитивном тежином α у тачки P . Одговарајућа затворена полуправа је

$$[S, P) = \{S\} \cup (S, P).$$

Свака тачка праве разлаже је на две отворене полуправе.

Нека је сада Π хиперраван у афиним простору $\mathcal{A}$. За тачке $A, B \in \mathcal{A} \setminus \Pi$ кажемо да су **са исте стране** хиперравни Π ако

$$AB \cap \Pi = \emptyset.$$

Тиме се $\mathcal{A} \setminus \Pi$ разлаже на две класе, које називамо **отвореним полупросторима** са основом Π . Ако је $P \notin \Pi$, један од њих означавамо са

$$(\Pi, P) = \{M \in \mathcal{A} : M, P \text{ са исте стране } \Pi\}.$$

Унија Π и отвореног полупростора (Π, P) назива се **затвореним полупростором** са основом Π .

Посебно, у случају афине равни полупросторе називамо **полуравнима**. Нека су A, B, C неколинеарне тачке. Тада је отворена полураван (AB, C) управо скуп свих барицентара тачака A, B, C са позитивном тежином у тачки C , односно

$$(AB, C) = \{M = \alpha A + \beta B + \gamma C : \alpha + \beta + \gamma = 1, \gamma > 0\}.$$

Дакле, услов $\gamma > 0$ у барицентричној комбинацији тачака A, B, C еквивалентан је услову да се тачка M налази у отвореној полуравни (AB, C) . Аналогно, услови

$$\alpha > 0 \quad \text{и} \quad \beta > 0$$

еквивалентни су условима

$$M \in (BC, A) \quad \text{и} \quad M \in (CA, B),$$

редом. Према томе, ако је

$$\alpha, \beta, \gamma > 0,$$

тачка M припада пресеку све три полуравни, односно унутрашњости троугла ABC .

1.12 Класичне теореме афине геометрије

Сваку тројку (A, B, C) тачака афиног простора $\mathcal{A}$, које нису колинеарне, зовемо и једним **тротемеником**, а саме те тачке, његовим **теменима**. Означаваћемо га и са ABC .

Према теорему 3, тачка M припада равни тротеменика ABC , ако и само ако је један од барицентара његових темена. Штавише, тада постоји и тачно један пар скалара α, β за које је $M = \alpha A + \beta B + (1 - \alpha - \beta)C$.

С друге стране, ако су тачке A, B и S колинеарне, уместо релације $\overrightarrow{AS} = \alpha \overrightarrow{SB}$ пишемо и $AS : SB = \alpha$. То такође значи и да је S барицентар тачака A и B са масама 1 и α , а тиме и пондерисаних тачака (A, δ) и $(B, \delta\alpha)$ за свако $\delta \neq 0$.

Теорема 8. Ако је ABC тротеменик и P, Q, R , тим редом, било које од преосталих тачака правих $\langle B, C \rangle$, $\langle C, A \rangle$ и $\langle A, B \rangle$, тада за $BP : PC = \alpha$, $CQ : QA = \beta$ и $AR : RB = \gamma$ важи:

1. Тачке P, Q, R су на једној правој, ако и само ако је $\alpha\beta\gamma = -1$;
2. Праве AP, BQ и CR су у истом прамену, то јест конкурентне или паралелне ако и само ако је $\alpha\beta\gamma = 1$.

Доказ. Пре свега, релација $BP : PC = \alpha$ значи да је тачка P барицентар пондерисаних тачака $(B, 1)$ и (C, α) . На исти начин је и тачка Q барицентар

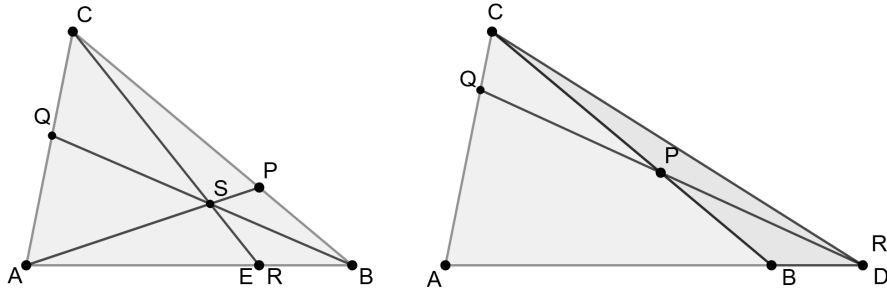
од (C, α) и $(A, \alpha\beta)$. Према тврђењу 8, за $p = 1$, тиме је и барицентар S те три пондерисане тачке управо пресек правих AP и BQ . Из истих разлога, сада и права CS садржи барицентар F од $(A, \alpha\beta)$ и $(B, 1)$, то јест тачку F праве AB за коју је $AF : FB = \frac{1}{\alpha\beta}$.

Тиме и права CR садржи тачку $\{S\} = AP \cap BQ$, ако и само ако је и $F = R$. Отуда и (2), јер је ту и $AR : RB = \gamma$, па је то даље еквивалентно управо са $\frac{1}{\alpha\beta} = \gamma$, то јест $\alpha\beta\gamma = 1$.

За доказ теореме под (1), уз претходну симболику, нека је сада и D тачка праве AB за коју је B барицентар пондерисаних тачака $(A, \alpha\beta)$ и (D, δ) , укупне масе $\alpha\beta + \delta = 1$. Уз то, из $AB : BD = \frac{\delta}{\alpha\beta}$ следи да је и

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{\alpha\beta} \overrightarrow{DB},$$

то јест $AD : DB = -\frac{1}{\alpha\beta}$. Како је и тачка P барицентар тачака $(B, 1)$ и (C, α) , на основу тврђења 8, она је барицентар и пондерисаних тачака (C, α) $(A, \alpha\beta)$ и (D, δ) , а тиме и на правој DQ . Ово последње зато што је и тачка Q барицентар од (C, α) и $(A, \alpha\beta)$. Отуда су и саме тачке P, Q, R колинеарне, ако и само ако је $R = D$. Због $AR : RB = \gamma$, то је могуће једино ако је и $\gamma = -\frac{1}{\alpha\beta}$, то јест $\alpha\beta\gamma = -1$. (Слика 1.12)



Слика 1.12: Менелајева (1) и Чевина (2) теорема

□

Уз симболику из претходног тврђења, ако се праве AP , BQ и CR секу у једној тачки, њихов пресек S је управо барицентар пондерисаних тачака $(A, \alpha\beta)$, $(B, 1)$ и (C, α) . Тиме је и

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{1 + \alpha + \alpha\beta} (\overrightarrow{AB} + \alpha \overrightarrow{AC}).$$

При том, само то тврђење под (1) зовемо и **Менелајевом**, а оно под (2) **Чевиним** теоремом.

Теорема 9 (Рутова теорема). Нека је ABC троугао и нека су P, Q, R , тим редом, тачке страница BC, CA, AB , за које важи $BP : PC = \alpha, CQ : QA = \beta, AR : RB = \gamma$, где су $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Нека су $\{X\} = BQ \cap CR, \{Y\} = CR \cap AP, \{Z\} = AP \cap BQ$. Ако $\alpha\beta\gamma \neq 1$, праве AP, BQ, CR образују троугао XYZ и важи

$$\frac{[XYZ]}{[ABC]} = \frac{(\alpha\beta\gamma - 1)^2}{(\alpha\beta + \alpha + 1)(\beta\gamma + \beta + 1)(\gamma\alpha + \gamma + 1)}.$$

Овде $[XYZ]$ и $[ABC]$ означавају површине одговарајућих троуглова.

Напомена 7. Ова теорема представља природно проширење Чевине теореме. Док Чевина теорема даје услов под којим су праве AP, BQ, CR конкурентне, Рутова теорема, у случају када тај услов није испуњен, даје однос површине троугла који те праве одређују и површине полазног троугла.

Посебно, ако је $\alpha\beta\gamma = 1$, према Чевиној теореме праве су конкурентне, па се добијени троугао дегенерише и његова површина је једнака нули.

Доказ. Пошто је $BP : PC = \alpha$, тачка P је барицентар пондерисаних тачака $(B, 1)$ и (C, α) , па је $P = \frac{1}{1+\alpha}B + \frac{\alpha}{1+\alpha}C$. На исти начин, $Q = \frac{\beta}{1+\beta}A + \frac{1}{1+\beta}C$ и $R = \frac{1}{1+\gamma}A + \frac{\gamma}{1+\gamma}B$.

За потребе израчунавања односа површина увешћемо у равни троугла ABC координате у односу на придружени векторски простор са почетном тачком A и базом $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. У овим координатама тачке B и C имају координате $(1, 0)$ и $(0, 1)$, па су P, Q, R редом представљене координатама $P = (\frac{1}{1+\alpha}, \frac{\alpha}{1+\alpha})$, $Q = (0, \frac{1}{1+\beta})$, $R = (\frac{\gamma}{1+\gamma}, 0)$. Права AP има једначину $y = \alpha x$. Права BQ има једначину $x + (1+\beta)y = 1$, а права CR има једначину $(1+\gamma)x + \gamma y = \gamma$. Одавде се лако добијају координате пресечних тачака. За $\{X\} = BQ \cap CR$ добијамо $X = (\frac{\beta\gamma}{1+\beta+\beta\gamma}, \frac{1}{1+\beta+\beta\gamma})$. За $\{Y\} = CR \cap AP$ добијамо $Y = (\frac{\gamma}{1+\gamma+\alpha\gamma}, \frac{\alpha\gamma}{1+\gamma+\alpha\gamma})$, док за $\{Z\} = AP \cap BQ$ добијамо $Z = (\frac{1}{1+\alpha+\alpha\beta}, \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha\beta})$.

За произвољан троугао, чије су координате темена $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, површина је једнака половини апсолутне вредности следеће детерминанте:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Израчунавањем површина троглова ABC и XYZ и заменом добијамо

$$\frac{[XYZ]}{[ABC]} = \frac{(\alpha\beta\gamma - 1)^2}{(\alpha\beta + \alpha + 1)(\beta\gamma + \beta + 1)(\gamma\alpha + \gamma + 1)},$$

чиме је теорема доказана.

□

Глава 2

Барицентар и барицентричне координате у настави математике у средњој школи

У овом поглављу разматра се појам барицентричних координата у контексту наставе математике у средњој школи, са посебним нагласком на њихову геометријску интерпретацију и примену у класичној геометрији.

Циљ овог дела рада није развој опште теорије, већ њена интерпретација на нивоу погодном за наставу у средњој школи, уз наглашавање интуитивног разумевања, геометријске слике и примене у класичној геометрији.

Посебна пажња посвећена је афиној равни и троуглу као централном објекту наставе геометрије у средњој школи, при чему се барицентричне координате користе као јединствен координатни оквир који обједињује различите класичне појмове и омогућава њихову систематизацију.

2.1 Барицентар и барицентричне координате у афином простору димензије два

Нека је сада афини простор A димензије два, то јест, афина раван и нека је оговарајуће поље $\mathbb{R}$. Нека су A , B и C три неколинеарне тачке афине равни. Оне одређују једну афину базу те равни. Означимо је са (A, B, C) . То значи да се свака тачка P те афине равни може представити на јединствен

ГЛАВА 2. БАРИЦЕНТАР И БАРИЦЕНТРИЧНЕ КООРДИНАТЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

начин у облику

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$

при чему важи $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Уређену тројку реалних бројева (α, β, γ) називамо барицентричним координатама тачке P у односу на афину базу (A, B, C) .

Приметимо да овако дефинисане тачке A , B и C одређују темена троугла.

Сама темена троугла ABC имају веома једноставне барицентричне координате: $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ јер је свако теме барицентар полазног система у коме само оно има тежину различиту од нуле.

Посматрајмо сада Декартов координатни систем у афиној равни. Нека су координате тачака A , B , C и P у том координатном систему дате са $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ и $P = (x_P, y_P)$. Посматрајући једнакост $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ по координатама добијамо две једначине:

$$x_P = \alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C$$

$$y_P = \alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C.$$

У комбинацији са условом $\alpha + \beta + \gamma = 1$, добијамо систем од три једначине са три непознате α, β, γ . Решавањем овог система добијамо изразе за барицентричне координате α, β, γ преко Декартових координата тачака A , B , C и P . На тај начин, ако су нам познате координате ових тачака у Декартовом координатном систему, можемо непосредно израчунати барицентричне координате тачке P у односу на афину базу (A, B, C) .

Дакле, добијамо систем

$$\begin{cases} x_P = \alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C, \\ y_P = \alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C, \\ \alpha + \beta + \gamma = 1, \end{cases}$$

који решавамо по непознатим α, β, γ .

Решавањем овог система добијамо

$$\alpha = \frac{(x_P - x_C)(y_B - y_C) - (x_B - x_C)(y_P - y_C)}{(x_A - x_C)(y_B - y_C) - (x_B - x_C)(y_A - y_C)},$$

$$\beta = \frac{(x_A - x_C)(y_P - y_C) - (x_P - x_C)(y_A - y_C)}{(x_A - x_C)(y_B - y_C) - (x_B - x_C)(y_A - y_C)},$$

$$\gamma = \frac{(x_A - x_P)(y_B - y_C) + (x_P - x_B)(y_A - y_C)}{(x_A - x_C)(y_B - y_C) - (x_B - x_C)(y_A - y_C)}.$$

Покажимо сада да се барицентричне координате могу изразити преко од-
носа оријентисаних површина одговарајућих троуглова.

За тачке $X = (x_X, y_X)$, $Y = (x_Y, y_Y)$ и $Z = (x_Z, y_Z)$, оријентисана површина
троугла XYZ дата је формулом

$$[XYZ] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_X & y_X & 1 \\ x_Y & y_Y & 1 \\ x_Z & y_Z & 1 \end{vmatrix}.$$

Посматрајмо сада троуглове PBC и ABC . Имамо

$$[PBC] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix},$$

док је

$$[ABC] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Развијањем детерминанти по првој колони добијамо

$$[PBC] = \frac{1}{2}(x_P(y_B - y_C) - x_B(y_P - y_C) + x_C(y_P - y_B)),$$

односно, груписањем чланова

$$[PBC] = \frac{1}{2}((x_P - x_C)(y_B - y_C) - (x_B - x_C)(y_P - y_C)).$$

На исти начин добијамо и

$$[ABC] = \frac{1}{2}((x_A - x_C)(y_B - y_C) - (x_B - x_C)(y_A - y_C)).$$

Према томе,

$$\frac{[PBC]}{[ABC]} = \frac{(x_P - x_C)(y_B - y_C) - (x_B - x_C)(y_P - y_C)}{(x_A - x_C)(y_B - y_C) - (x_B - x_C)(y_A - y_C)}.$$

Међутим, десна страна је управо израз који смо претходно добили за α .
Дакле, $\alpha = \frac{[PBC]}{[ABC]}$. Аналогним поступком, посматрањем троуглова PCA и

ГЛАВА 2. БАРИЦЕНТАР И БАРИЦЕНТРИЧНЕ КООРДИНАТЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

ABC , добијамо $\beta = \frac{[PCA]}{[ABC]}$, а посматрањем троуглова PAB и ABC , добијамо $\gamma = \frac{[PAB]}{[ABC]}$.

На тај начин смо показали да се барицентричне координате тачке P могу представити као односи оријентисаних површина одговарајућих троуглова.

Из добијених једнакости следи да знак сваке барицентричне координате одређује однос оријентација одговарајућих троуглова. На пример, $\alpha = \frac{[PBC]}{[ABC]}$. Пошто су бројилац и именилац оријентисане површине, важи $\alpha > 0$ ако и само ако су троуглови PBC и ABC исто оријентисани, док је $\alpha < 0$ ако и само ако су они супротно оријентисани. При томе није важно која од две оријентације се сматра позитивном, важно је само да ли су оријентације исте или супротне. Аналогно важи и за β и γ .

Уколико је нека барицентрична координата једнака нули, одговарајућа оријентисана површина је једнака нули. На пример, $\alpha = 0$ ако и само ако је $[PBC] = 0$, што значи да су тачке P , B , C колинеарне, односно P лежи на правој BC . Аналогно за остале.

На основу ових односа можемо закључити о положају тачке P у односу на троугао ABC . Уколико су $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, тачка P се налази унутар троугла ABC . Ако је једна од координата једнака нули, тачка P лежи на одговарајућој страници троугла, док појава негативне барицентричне координате указује на то да се тачка P налази изван троугла. На пример, ако је $\alpha < 0, \beta > 0, \gamma > 0$, онда су ABC и PBC супротно оријентисани, док су друга два пара исто оријентисана. То одговара ситуацији у којој се P налази изван троугла, преко странице BC .

Из претходно доказаних једнакости $\alpha = \frac{[PBC]}{[ABC]}$, $\beta = \frac{[PCA]}{[ABC]}$, $\gamma = \frac{[PAB]}{[ABC]}$ можемо добити још једно геометријско тумачење барицентричних координата. Троуглови ABC и PBC имају заједничку основу BC . Због тога је количник њихових оријентисаних површина, до на знак, једнак количнику њихових одговарајућих висина. Знак је позитиван ако се тачке A и P налазе са исте стране праве BC , а негативан ако се налазе са супротних страна. Ако са $h_{P,BC}$ и $h_{A,BC}$ означимо висине тачака P и A на праву BC , онда је

$$\alpha = \frac{[PBC]}{[ABC]} = \begin{cases} \frac{h_{P,BC}}{h_{A,BC}}, & \text{ако су } A \text{ и } P \text{ са исте стране праве } BC, \\ -\frac{h_{P,BC}}{h_{A,BC}}, & \text{ако су } A \text{ и } P \text{ са супротних страна праве } BC. \end{cases}$$

Аналогно добијамо и $\beta = \frac{h_{P,CA}}{h_{B,CA}}$ и $\gamma = \frac{h_{P,AB}}{h_{C,AB}}$, при чему се знак одређује на исти начин, у зависности од тога да ли су одговарајуће теме и тачка P са исте или

ГЛАВА 2. БАРИЦЕНТАР И БАРИЦЕНТРИЧНЕ КООРДИНАТЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

са супротних страна одговарајуће странице.

Дакле, свака барицентрична координата тачке P одређена је количником висине тачке P на одговарајућу страницу троугла и висине одговарајућег темена на ту страницу, при чему се знак одређује на основу њиховог положаја у односу на одговарајућу страницу. Ово нам такође даје још једно тумачење знака барицентричних координата. На пример, ако је $\alpha > 0$, онда су P и A са исте стране праве BC , док за $\alpha < 0$ леже са супротних страна праве BC .

Пример 5. Странице троугла ABC су $AB = 21$, $BC = 17$, $CA = 10$. У унутрашњој области троугла дата је тачка P чије је растојање од странице AB једнако 2, а од странице BC једнако 4. Одредити растојање тачке P од странице CA .

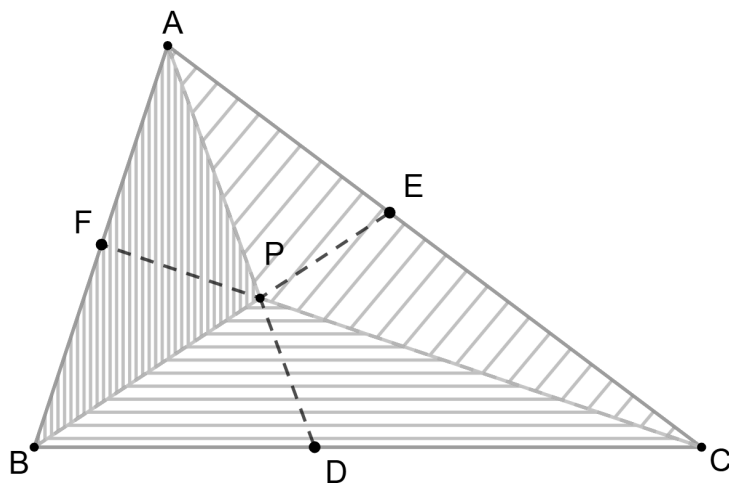
Решење. Нека су (α, β, γ) барицентричне координате тачке P у односу на троугао ABC , при чему је $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Пошто се тачка P налази у унутрашњости троугла, све барицентричне координате су позитивне. Према представљању барицентричних координата помоћу висина важи $\alpha = \frac{h_{P,BC}}{h_{A,BC}}$, $\beta = \frac{h_{P,CA}}{h_{B,CA}}$ и $\gamma = \frac{h_{P,AB}}{h_{C,AB}}$.

Из услова задатка је $h_{P,AB} = 2$ и $h_{P,BC} = 4$. Како је $a = BC = 17$, $b = CA = 10$, $c = AB = 21$ на основу Хероновог обрасца добијамо $[ABC] = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} = 84$. Тада је $h_{A,BC} = \frac{2[ABC]}{BC} = \frac{168}{17}$. Слично добијамо и $h_{B,CA} = \frac{168}{10}$, $h_{C,AB} = 8$. Заменом добијамо $\alpha = \frac{17}{42}$ и $\gamma = \frac{1}{4}$, а из $\alpha + \beta + \gamma = 1$ следи да је $\beta = \frac{29}{84}$.

Сада из $\beta = \frac{h_{P,CA}}{h_{B,CA}}$ добијамо $h_{P,CA} = \beta \cdot h_{B,CA} = 5,8$. Дакле, тражено растојање тачке P од странице CA је 5,8.

Можемо отићи и корак даље. Нека је $\{D\} = AP \cap BC$. Пошто је $D \in BC$, његове барицентричне координате у односу на (A, B, C) имају облик $D = (0, \delta, \varepsilon)$, $\delta + \varepsilon = 1$. Пошто је $P \in AD$, можемо писати $P = \alpha A + (1 - \alpha)D$. Сада из тога добијамо $P - D = \alpha(A - D)$, односно $\overrightarrow{PD} = \alpha \overrightarrow{AD}$. Аналогно ако дефинишемо $\{E\} = BP \cap CA$, онда је $\overrightarrow{PE} = \beta \overrightarrow{BE}$, а ако је $\{F\} = CP \cap AB$, онда је $\overrightarrow{PF} = \gamma \overrightarrow{CF}$.

Дакле, барицентричне координате тачке P могу се тумачити и преко односа одговарајућих вектора. На овај начин се барицентричне координате могу посматрати као коефицијенти који одређују положај тачке P на правама AD , BE и CF .



Слика 2.1: Подела троугла ABC на подтроуглове тачком P

Поред нормализованих барицентричних координата (α, β, γ) , за које важи $\alpha + \beta + \gamma = 1$, користимо и њихов хомогени облик. Хомогене барицентричне координате означаваћемо са $(x : y : z)$. Нормализоване барицентричне координате добијају се дељењем хомогених координата њиховим збиром. Дакле, $(x : y : z)$ прелази у $\left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right)$.

Нека су хомогене барицентричне координате тачке $P = (x : y : z)$ и нека је $\{D\} = AP \cap BC$. Пошто $D \in BC$, његове барицентричне координате имају облик $(0 : y : z)$. Дакле, имамо $D = \frac{y}{y+z}B + \frac{z}{y+z}C$. Одатле је $\overrightarrow{BD} = D - B = \frac{z}{y+z}(C - B) = \frac{z}{y+z}\overrightarrow{BC}$, док је $\overrightarrow{DC} = C - D = \frac{y}{y+z}(C - B) = \frac{y}{y+z}\overrightarrow{BC}$. Зато је $\frac{BD}{DC} = \frac{z}{y}$. Потпуно аналогно важи и $\frac{CE}{EA} = \frac{x}{z}$ и $\frac{AF}{FB} = \frac{y}{x}$.

Представљање значајних тачака троугла помоћу барицентричних координата

У наставку ћемо коришћењем изложених геометријских представљања барицентричних координата произвољне тачке одредити барицентричне координате значајних тачака троугла.

Тежиште

Нека је T тежиште троугла ABC . Тежиште представља пресечну тачку тежишних дужи, па нека су D , E , F редом средишња страница BC , CA ,

AB .

Посматрајмо најпре тежишну дуж AD . Пошто је D средиште странице BC , важи $\frac{BD}{DC} = 1$. Према претходно добијеној вези између барицентричних координата и односа вектора, за тачку T и пресек $\{D\} = AT \cap BC$ важи $\overrightarrow{TD} = \alpha \overrightarrow{AD}$. Пошто је T тежиште, оно дели тежишну дуж у односу $AT : TD = 2 : 1$, па је $\frac{TD}{AD} = \frac{1}{3}$. Одатле следи да је $\alpha = \frac{1}{3}$.

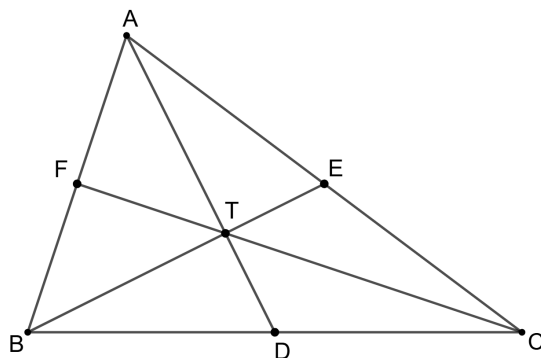
На потпуно исти начин, посматрајући тежишне дужи BE и CF , добијамо $\beta = \frac{1}{3}$ и $\gamma = \frac{1}{3}$.

Дакле, барицентричне координате тежишта су

$$T = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

У хомогеном облику, множењем свих координата са 3, добијамо

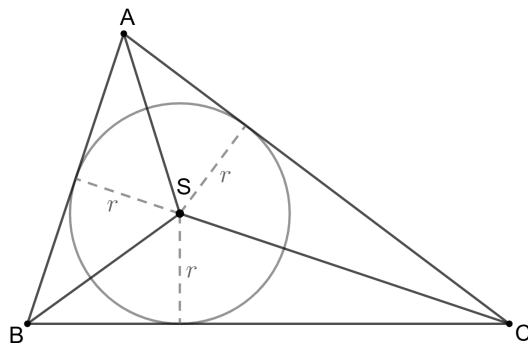
$$T = (1 : 1 : 1).$$



Слика 2.2: Барицентричне координате тежишта троугла

Центар уписане кружности

Нека је S центар уписане кружности троугла ABC и r њен полупречник. Означимо $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$. Тада је $[SBC] = \frac{1}{2}ar$ и слично за $[SCA]$ и $[SAB]$. Одатле одмах добијамо да су координате центра уписане кружности у хомогеном облику $(\frac{1}{2}ar : \frac{1}{2}br : \frac{1}{2}cr)$ (тј. $(a : b : c)$). Да бисмо добили тражене барицентричне координате потребно је да добијене хомогене координате поделимо са $\frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{a+b+c}{2}r = sr$, где је s полуобим троугла ABC . Дакле барицентричне координате центра уписане кружности су $S = (\frac{a}{2s}, \frac{b}{2s}, \frac{c}{2s})$, односно $S = \frac{1}{2s}(a, b, c)$.



Слика 2.3: Баричентричне координате центра уписане кружнице троугла

Центри споља приписаних кружница

Посматрајмо центре S_a, S_b, S_c кружница споља приписаних троуглу ABC , где је S_a центар кружнице споља приписане страници $BC = a$, S_b центар кружнице споља приписане страници $CA = b$, а S_c центар кружнице споља приписане страници $AB = c$.

Покажимо најпре како се добијају баричентричне координате центра S_a . Користићемо чињеницу да се баричентричне координате тачке могу изразити као односи оријентисаних површина.

Пошто је S_a центар кружнице споља приписане страници BC , његово растојање од праве BC једнако је полупречнику те кружнице, али је, у односу на оријентацију троугла ABC , супротног знака од растојања темена A од праве BC . Због тога је $\frac{[S_a BC]}{[ABC]} < 0$. Са друге стране, S_a и B се налазе са исте стране праве CA , док се S_a и C налазе са исте стране праве AB . Зато су одговарајући односи оријентисаних површина позитивни.

Добијамо, у хомогеном облику,

$$S_a = (-a : b : c).$$

Да бисмо добили баричентричне координате, нормализујемо их тако да им збир буде једнак 1. Пошто је $-a + b + c = 2(s - a)$, добијамо

$$S_a = \left(-\frac{a}{2(s-a)}, \frac{b}{2(s-a)}, \frac{c}{2(s-a)} \right).$$

Потпуно аналогно, за центре кружница споља приписаних страницама CA и AB , добијамо координате у хомогеном облику

$$S_b = (a : -b : c), \quad S_c = (a : b : -c).$$

ГЛАВА 2. БАРИЦЕНТАР И БАРИЦЕНТРИЧНЕ КООРДИНАТЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Након нормализације добијамо

$$S_b = \left(\frac{a}{2(s-b)}, -\frac{b}{2(s-b)}, \frac{c}{2(s-b)} \right)$$

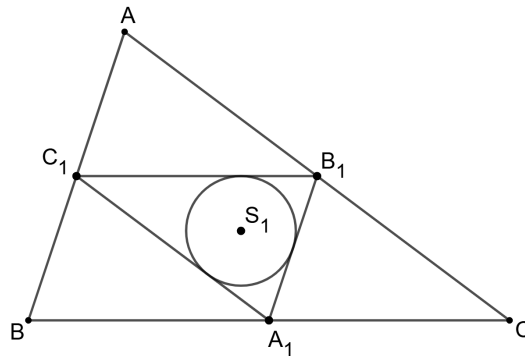
и

$$S_c = \left(\frac{a}{2(s-c)}, \frac{b}{2(s-c)}, -\frac{c}{2(s-c)} \right).$$

Спикерова тачка

Спикерова тачка S_1 представља центар уписане кружнице троугла чија су темена средишта страница датог троугла ABC . Означимо средишта страница троугла ABC са $A_1 = \frac{B+C}{2}$, $B_1 = \frac{C+A}{2}$, $C_1 = \frac{A+B}{2}$. Ако означимо $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$, страница троугла $A_1B_1C_1$ биће $B_1C_1 = \frac{a}{2}$, $CA_1 = \frac{b}{2}$, $A_1B_1 = \frac{c}{2}$. По претходно приказаном резултату за центар уписане кружнице, добијамо да су координате тачке S_1 у хомогеном облику $(\frac{a}{2} : \frac{b}{2} : \frac{c}{2}) = (a : b : c)$, али у односу на базу (A_1, B_1, C_1) . Дакле $S_1 = \frac{aA_1 + bB_1 + cC_1}{a+b+c}$. Убацивањем израза за A_1 , B_1 , C_1 добијамо $S_1 = \frac{a\frac{B+C}{2} + b\frac{C+A}{2} + c\frac{A+B}{2}}{a+b+c}$, односно $S_1 = \frac{(b+c)A + (c+a)B + (a+b)C}{2(a+b+c)} = \frac{(b+c)A + (c+a)B + (a+b)C}{4s}$ (s је полуобим троугла ABC). Коначно следи да су барицентричне координате Спикерове тачке

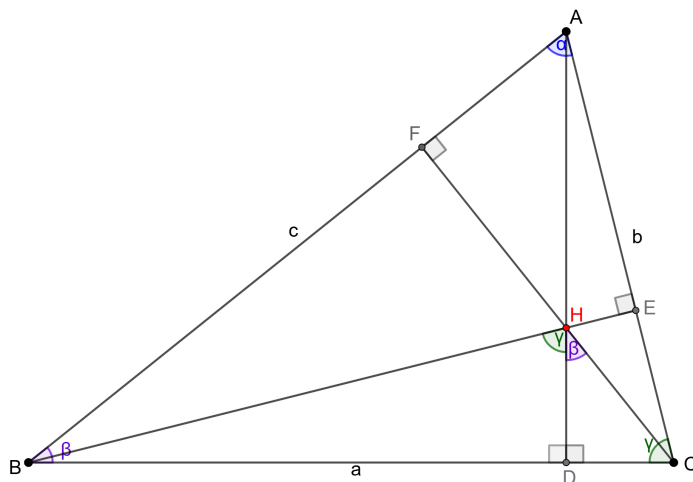
$$S_1 = \frac{1}{4s}(b+c, c+a, a+b).$$



Слика 2.4: Барицентричне координате Спикерове тачке

Ортоцитар

Дат је троугао ABC .



Слика 2.5: Баричентричне координате ортоцентра

Нека је тачка D пресечна тачка нормале из тачке A и стране BC . Аналогно уводимо и тачке E, F . Координате ортоцентра у хомогеном облику су $([HBC] : [HCA] : [HAB])$. Пошто је $[HBC]$ оријентисана површина троугла, можемо је израчунати на следећи начин: $[HBC] = \frac{1}{2}BC \cdot HD$. Важи $\angle BHD = 90^\circ - \angle DBH = \angle ECB = \gamma$, $\angle EHF = 180^\circ - \alpha$ и $\angle EHF = \angle CHD + \angle DHB$. Заменом познатих релација у последњу једнакост добијамо $\angle CHD = \beta$. Посматрајмо сада троугао ADC . Важи $\tan \gamma = \frac{AD}{DC}$, односно

$$AD = DC \tan \gamma. \quad (2.1)$$

Посматрајмо сада и троугао HDC . Важи $\tan(90^\circ - \beta) = \frac{HD}{DC}$ то јест $\cot \beta = \frac{HD}{DC}$. Одатле је

$$HD = DC \cot \beta. \quad (2.2)$$

Из једнакости (2.1) и (2.2) добијамо да је $HD = AD \frac{\cot \beta}{\tan \gamma}$. За висину AD троугла ABC важи $AD = c \sin \beta = b \sin \gamma$. Вратимо се сада на формулу за израчунавање површине $[HBC]$. Добијамо

$$[HBC] = \frac{1}{2}ac \sin \beta \frac{\cot \beta}{\tan \gamma} = \frac{1}{2}ac \sin \beta \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} = \frac{1}{2}ac \cos \beta \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma}$$

На основу синусне теореме важи $c = 2R \sin \gamma$, где је R полупречник описане кружнице троугла ABC . Заменом у претходни идентитет и сређивањем

ГЛАВА 2. БАРИЦЕНТАР И БАРИЦЕНТРИЧНЕ КООРДИНАТЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

добијамо $[HBC] = aR \cos \beta \cos \gamma$. Аналогно добијамо и $[HCA] = bR \cos \alpha \cos \gamma$ и $[HAB] = cR \cos \alpha \cos \beta$.

Коначно, координате ортоцентра H троугла ABC у хомогеном облику су

$$(aR \cos \beta \cos \gamma : bR \cos \alpha \cos \gamma : cR \cos \alpha \cos \beta),$$

односно

$$(a \cos \beta \cos \gamma : b \cos \alpha \cos \gamma : c \cos \alpha \cos \beta).$$

Посебно, како на основу синусне теореме важи $a = 2R \sin \alpha$, добијамо

$$a \cos \beta \cos \gamma = 2R \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Слично добијамо и за остале координате. Пошто су координате хомогене, можемо све изразе да поделимо са $2R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$. Одатле добијамо $(\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \gamma)$.

Међутим, ми желимо да одредимо барицентричне координате ортоцентра, а не само хомогене. Може се показати да важи следећа једнакост: $a \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4abc}(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$ и аналогно за остале. Заменом добијамо $((c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) : (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) : (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2))$. Директним рачуном, добија се да је фактор нормализације $16s(s-a)(s-b)(s-c) = 16[ABC]^2 = 16r^2s^2$, где је s полуобим, а r полупречник уписане кружнице троугла ABC . Дакле, барицентрична координата ортоцентра која одговара темену A је $\frac{1}{16r^2s^2}(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$, аналогно за остале.

Нагелова тачка

Нагелова тачка N се налази у пресеку дужи које спајају свако теме троугла са одговарајућом додирном тачком споља приписане кружнице на наспрамној страници. Означимо са A_2 додирну тачку споља приписане кружнице наспрам темена A и странице BC , аналогно за B_2 и C_2 .

Споља приписана кружница наспрам темена A додирује продужетке страница AB и AC , па пошто су тангентне дужи из исте тачке једнаке, важи да је $BA_2 = s - b$ и $CA_2 = s - c$, где је s полуобим троугла ABC .

Нека су барицентричне координате тачке N у хомогеном облику $(x : y : z)$. То значи да темену A одговара тежински коефицијент x и аналогно за темена B и C . Тачка A_2 дели дуж BC на два дела и како су теменима B и C додељене тежине y и z , мора важити $\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{z}{y}$. Како је $BA_2 = s - b$ и $CA_2 = s - c$,

ГЛАВА 2. БАРИЦЕНТАР И БАРИЦЕНТРИЧНЕ КООРДИНАТЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

добиамо $\frac{z}{y} = \frac{s-b}{s-c}$. Цикличним понављањем добијамо да важи и $\frac{x}{z} = \frac{s-c}{s-a}$, $\frac{y}{x} = \frac{s-a}{s-b}$. Из ових односа директно следи $(x : y : z) = (s-a) : (s-b) : (s-c)$. Одавде следи да су координате Нагелове тачке у хомогеном облику $(s-a : s-b : s-c)$. Да бисмо добили нормализоване координате, хомогене координате делимо са $s-a + s-b + s-c = 3s - (a+b+c) = 3s - 2s = s$. Коначно, барицентричне координате Нагелове тачке су

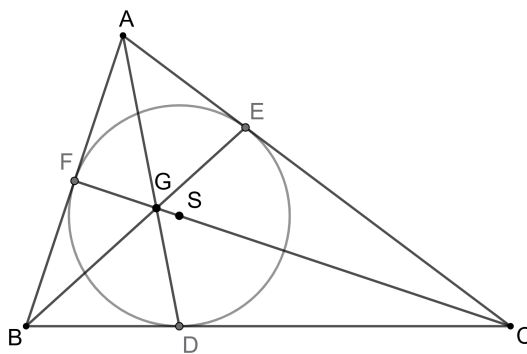
$$N = \frac{1}{s}(s-a, s-b, s-c).$$

Жергонова тачка

Нека је S центар уписане кружнице троугла ABC . Нека уписана кружница додирује редом странице BC , CA , AB у тачкама D , E , F . Тада се праве AD , BE , CF секу у тачки коју називамо Жергонова тачка. Означимо је са G . Означимо дужине страница троугла са $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, а полуобим са $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Из особина тангентних дужи уписане кружнице следи $BD = s-b$, $DC = s-c$, $CE = s-c$, $EA = s-a$ и $AF = s-a$, $FB = s-b$. Зато важи $\frac{BD}{DC} = \frac{s-b}{s-c}$, $\frac{CE}{EA} = \frac{s-c}{s-a}$ и $\frac{AF}{FB} = \frac{s-a}{s-b}$.

Одатле добијамо $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$. Према Чевиној теорему, праве AD , BE и CF се секу у једној тачки, што је управо Жергонова тачка.



Слика 2.6: Барицентричне координате Жергонове тачке

Нека су хомогене барицентричне координате тачке $G = (x : y : z)$. Према претходно доказаној вези између барицентричних координата и односа у којима праве кроз темена секу наспрамне странице, важи $\frac{BD}{DC} = \frac{z}{y}$, $\frac{CE}{EA} = \frac{x}{z}$ и $\frac{AF}{FB} = \frac{y}{x}$. Уврштавањем претходно добијених односа тангентних дужи добијамо $\frac{z}{y} = \frac{s-b}{s-c}$, $\frac{x}{z} = \frac{s-c}{s-a}$ и $\frac{y}{x} = \frac{s-a}{s-b}$. Из прве једнакости следи $z : y = (s-b) : (s-c)$,

ГЛАВА 2. БАРИЦЕНТАР И БАРИЦЕНТРИЧНЕ КООРДИНАТЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

односно $y : z = (s - c) : (s - b)$ па је $y : z = \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c}$. Из друге једнакости добијамо $x : z = (s - c) : (s - a)$, а из треће $y : x = (s - a) : (s - b)$. Одатле коначно добијамо $x : y : z = \frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c}$. Према томе, хомогене барицентричне координате Жергонове тачке су

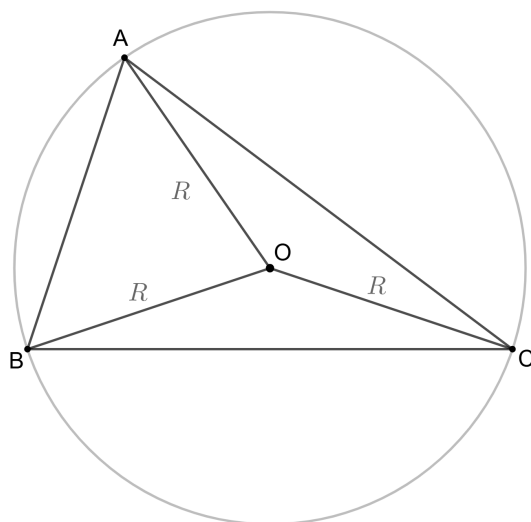
$$G = \left(\frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c} \right).$$

Да бисмо добили барицентричне координате у нормализованом облику, хомогене координате делимо њиховим збиром $\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}$. Сређивањем добијамо

$$G = \frac{1}{(s-b)(s-c) + (s-a)(s-c) + (s-a)(s-b)}((s-b)(s-c), (s-a)(s-c), (s-a)(s-b)).$$

Центар описане кружности

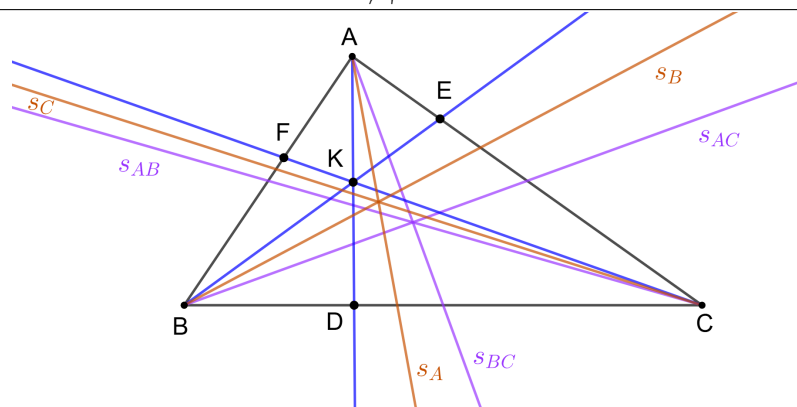
Нека је O центар описане кружности троугла ABC . За хомогене координате тачке O важи $(x : y : z) = ([OBC] : [OCA] : [OAB])$. По формули за површину троугла је $[OBC] = \frac{1}{2}OB \cdot OC \sin \angle BOC$. Пошто је O центар описане кружности, важи $OB = OC = R$, где је R полупречник описане кружности троугла ABC . Такође, централни угао $\angle BOC$ над луком BC је два пута већи од периферијског угла код темена A , па је $\angle BOC = 2\alpha$. Одатле добијамо $[OBC] = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha$. Слично добијамо и $[OCA] = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\beta$ и $[OAB] = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\gamma$. Коначно, после сређивања добијамо да су координате тачке O у хомогеном облику $(\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)$. Тражене барицентричне координате су тада $O = \frac{1}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}(\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma)$. Ово можемо додатно средити користећи тригонометријске идентитете и синусну теорему. Како важи $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, добија се $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. Знамо да важи и $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ и аналогно за остале. Из свега наведеног добијамо $O = \left(\frac{\cos \alpha}{2 \sin \beta \sin \gamma}, \frac{\cos \beta}{2 \sin \alpha \sin \gamma}, \frac{\cos \gamma}{2 \sin \alpha \sin \beta} \right)$. Ако још искористимо синусну, косинусну теорему и формулу за површину троугла ABC тј. $P_{ABC} = \frac{abc}{4R}$, добијамо $O = \frac{1}{16P_{ABC}^2}(a^2(b^2 + c^2 - a^2), b^2(c^2 + a^2 - b^2), c^2(a^2 + b^2 - c^2))$, где смо са P_{ABC} означили површину троугла ABC .



Слика 2.7: Баричентричне координате центра описане кружнице

Симедијални центар

Симедијални центар K представља тачку пресека три симедијане троугла. Симедијана је права симетрична медијани у односу на симетралу угла. Ако посматрамо медијану из темена A троугла ABC и симетралу унутрашњег угла у темену A , онда симедијану која одговара темену A добијамо тако што медијану пресликамо симетрично у односу на посматрану симетралу угла. Симедијане које одговарају теменима троугла ABC и симедијални центар K приказани су на следећој слици. Тачке пресека симедијана из темена A , B , C и страница BC , CA , AB означене су редом са D , E , F . Са A_1 је означено средиште странице BC .



Слика 2.8: Баричентричне координате симедијалног центра

За одређивање баричентричних координата симедијалног центра K искористимо теорему о симедијани.

Теорема 10 (Теорема о симедијани). Уз коришћење претходно уведене нотације, ако симедијана из темена A сече страницу BC у тачки D , онда важи $\frac{BD}{DC} = \frac{c^2}{b^2}$. Аналогно тврђење се може формулисати и за темена B и C .

Доказ. Означимо углове троугла ABC са $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$. Нека је $\varphi = \angle CAA_1$. Пошто су AA_1 и AD симетричне у односу на симетралу угла α , следи да је $\angle BAD = \varphi$ и $\angle CAD = \alpha - \varphi$. Пошто је A_1 средиште странице BC , важи $BA_1 = CA_1$.

Посматрајмо троугао ACA_1 . Применом синусне теореме добијамо

$$\frac{CA_1}{\sin \varphi} = \frac{AA_1}{\sin \gamma}, \text{ одакле следи } \frac{CA_1}{AA_1} = \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma} \quad (1).$$

Посматрајмо сада троугао ABA_1 . Применом синусне теореме добијамо

$$\frac{BA_1}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{AA_1}{\sin \beta}, \text{ па је } \frac{BA_1}{AA_1} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \beta} \quad (2).$$

Дељењем једнакости (1) и (2) и коришћењем чињенице да је $CA_1 = BA_1$, добијамо $1 = \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \varphi)}$. Одатле следи $\frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$.

Посматрајмо, затим, троугао ABD и његове углове $\angle BAD = \varphi$, $\angle ABD = \beta$. Применом синусне теореме добијамо $\frac{BD}{\sin \varphi} = \frac{AD}{\sin \beta}$, одакле је $\frac{BD}{AD} = \frac{\sin \varphi}{\sin \beta} \quad (4).$

Посматрајмо сада и троугао ACD и његове углове $\angle CAD = \alpha - \varphi$, $\angle ACD = \gamma$. Према синусној теореме, $\frac{CD}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{AD}{\sin \gamma}$, па следи $\frac{CD}{AD} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \gamma} \quad (5).$

Дељењем једнакости (4) и (5) добијамо $\frac{BD}{CD} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$. На основу једнакости (3) следи $\frac{BD}{CD} = \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \beta}\right)^2$.

ГЛАВА 2. БАРИЦЕНТАР И БАРИЦЕНТРИЧНЕ КООРДИНАТЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Применом синусне теореме на троугао ABC , добијамо $\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin \beta}$. Пошто је $AB = c$ и $AC = b$, следи $\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{c}{b}$. Зато је $\frac{BD}{DC} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{c^2}{b^2}$. $\square$

Знамо да за координате тачке K у хомогеном облику, односно за $(x : y : z)$ важи $\frac{BD}{DC} = \frac{z}{y}$. Одавде добијамо $\frac{z}{y} = \frac{c^2}{b^2}$, односно $y : z = b^2 : c^2$. Аналогно добијамо и остале односе из симедијана из темена B и C . Дакле, важи $(x : y : z) = (a^2 : b^2 : c^2)$. Да бисмо добили барицентричне координате симедијалног центра K , хомогене координате делимо са $a^2 + b^2 + c^2$. Коначно, тражене барицентричне координате су

$$K = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}(a^2, b^2, c^2).$$

2.2 Барицентар и барицентричне координате у афином простору димензије три

Нека је сада афини простор $\mathcal{A}$ димензије три, а одговарајуће поље $\mathbb{R}$. Нека су A, B, C и D четири некомпланарне тачке афиног простора. Оне одређују једну афину базу тог простора. Означимо је са (A, B, C, D) . То значи да се свака тачка P афиног простора може представити на јединствен начин у облику

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D,$$

при чему важи $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$.

Уређену четворку реалних бројева $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ називамо барицентричним координатама тачке P у односу на афину базу (A, B, C, D) .

Приметимо да овако дефинисане тачке A, B, C и D одређују темена тетраедра.

Темена тетраедра $ABCD$ имају веома једноставне барицентричне координате: $A = (1, 0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0, 0)$, $C = (0, 0, 1, 0)$, $D = (0, 0, 0, 1)$.

Ако су Декартове координате тачка $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$, $C = (x_C, y_C, z_C)$, $D = (x_D, y_D, z_D)$ и $P = (x_P, y_P, z_P)$, онда из $P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ добијамо систем

$$\begin{cases} x_P = \alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D, \\ y_P = \alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D, \\ z_P = \alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C + \delta z_D, \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1. \end{cases}$$

ГЛАВА 2. БАРИЦЕНТАР И БАРИЦЕНТРИЧНЕ КООРДИНАТЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Пошто су A, B, C, D некопланарне, односно афино независне, овај систем има јединствено решење.

За четири тачке X, Y, Z, W , оријентисана запремина тетраедра $XYZW$ може се дефинисати као

$$[XYZW] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_X & y_X & z_X & 1 \\ x_Y & y_Y & z_Y & 1 \\ x_Z & y_Z & z_Z & 1 \\ x_W & y_W & z_W & 1 \end{vmatrix}.$$

Тада добијамо: $\alpha = \frac{[PBCD]}{[ABCD]}$, $\beta = \frac{[APCD]}{[ABCD]}$, $\gamma = \frac{[ABPD]}{[ABCD]}$ и $\delta = \frac{[ABCP]}{[ABCD]}$.

Пошто се ради о оријентисаним запреминама, лако изводимо закључак и о знаку барицентричних координата. Посматрајмо $\alpha = \frac{[PBCD]}{[ABCD]}$. Важи $\alpha > 0$ ако су тетраедри $PBCD$ и $ABCD$ исто оријентисани, а $\alpha < 0$ ако су супротно оријентисани. Такође, $\alpha = 0$ ако је $[PBCD] = 0$, што заправо значи да су тачке P, B, C, D компланарне, односно да тачка P лежи у равни која садржи страну BCD тетраедра $ABCD$. Аналогно важи и за остале барицентричне координате.

Тачка P се налази унутар тетраедра $ABCD$ ако и само ако је $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Ако је нека од координата негативна, тачка P је изван тетраедра $ABCD$. На пример, ако је $\alpha < 0$ и $\beta, \gamma, \delta > 0$, онда се тачка P налази са супротне стране равни BCD у односу на теме A .

Тетраедри $PBCD$ и $ABCD$ имају заједничку основу BCD . Зато је количник њихових запремина, до на знак, једнак количнику њихових одговарајућих висина. Знак је позитиван ако су тачке P и A са исте стране равни BCD , а негативан ако су са супротних страна. Ако са $h_{P,BCD}$ и $h_{A,BCD}$ означимо висине тачака P и A на раван BCD , онда је

$$\alpha = \begin{cases} \frac{h_{P,BCD}}{h_{A,BCD}}, & \text{ако су } P \text{ и } A \text{ са исте стране равни } BCD, \\ -\frac{h_{P,BCD}}{h_{A,BCD}}, & \text{ако су } P \text{ и } A \text{ са супротних страна равни } BCD. \end{cases}$$

Аналогно важи и за остале барицентричне координате.

Нека је $\{D_A\} = AP \cap (BCD)$. Дакле, D_A је пресек праве AP и равни BCD . Пошто D_A лежи у равни BCD , његова барицентрична координата која одговара темену A је једнака нули. У односу на тетраедар $ABCD$ је $D_A = (0, \beta', \gamma', \delta')$, при чему је $\beta' + \gamma' + \delta' = 1$. Пошто су P, A, D_A колинеарне,

ГЛАВА 2. БАРИЦЕНТАР И БАРИЦЕНТРИЧНЕ КООРДИНАТЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

P се може записати као $P = \alpha A + (1 - \alpha)D_A$. Одатле је $P - D_A = \alpha(A - D_A)$, па добијамо $\overrightarrow{PD_A} = \alpha\overrightarrow{AD_A}$. Аналогно дефинишемо и тачке D_B, D_C, D_D и добијамо одговарајуће односе.

Са $(x : y : z : w)$ означавамо хомогене барицентричне координате, док њиховим дељењем са $x + y + z + w$ добијамо нормализоване барицентричне координате, то јест $(\frac{x}{x+y+z+w}, \frac{y}{x+y+z+w}, \frac{z}{x+y+z+w}, \frac{w}{x+y+z+w})$, под условом да је $x + y + z + w \neq 0$.

Барицентричне координате неких значајних тачака тетраедра можемо одредити аналогно значајним тачкама троугла. На пример, барицентричне координате тежишта су $T = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, барицентричне координате центра уписане сфере су $S = \frac{1}{[BCD] + [ACD] + [ABD] + [ABC]}([BCD], [ACD], [ABD], [ABC])$, док су барицентричне координате споља пиписане сфере стране BCD заправо $S_{BCD} = \frac{1}{-[BCD] + [ACD] + [ABD] + [ABC]}(-[BCD], [ACD], [ABD], [ABC])$.

Глава 3

Задаци

3.1 Лајбницова теорема

Задатак 1. Ако је P произвољна тачка круга описаног око једнакостраничног троугла ABC , доказати да је $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 2AB^2$.

Решење. Нека је T тежиште троугла ABC . Применом Лајбницове теореме, добијамо $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3PT^2 + (TA^2 + TB^2 + TC^2)$. Како је троугао ABC једнакостраничан, тежиште и центар описане кружнице се поклапају, па важи $TA = TB = TC = R$, где је R полупречник описане кружнице троугла ABC . Такође, како тачка P припада описаној кружници, важи и $PT = R$. Одатле добијамо да је $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 6R^2$. У једнакостраничном троуглу је $R = \frac{AB}{\sqrt{3}}$, па је $R^2 = \frac{AB^2}{3}$. Коначно добијамо да важи $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 2AB^2$, што је и требало показати.

Задатак 2. Ако је у равни дат правоугаоник $ABCD$, доказати да за сваку тачку P те равни важи релација $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

Решење. Дијагонале правоугаоника AC и BD се полове. Означимо са M њихово средиште. Тада важи $AM = BM = CM = DM = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2}$. Овако дефинисана тачка M је тежиште тачака A, C односно B, D . На основу Лајбницове теореме важи $PA^2 + PC^2 = 2PM^2 + AM^2 + CM^2$ и $PB^2 + PD^2 = 2PM^2 + BM^2 + DM^2$. Убацивањем претходно добијених веза и сређивањем добијамо $PA^2 + PC^2 = 2PM^2 + \frac{AC^2}{2}$ и $PB^2 + PD^2 = 2PM^2 + \frac{AC^2}{2}$. Одавде одмах следи да је $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

Задатак 3. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао такав да за сваку тачку M која је у равни тог шестоугла важи $MA^2 + MC^2 + ME^2 = MB^2 + MD^2 + MF^2$. Доказати да се тежишта троуглова ACE и BDF поклапају.

Решење. Нека је G тежиште троугла ACE и H тежиште троугла BDF . По дефиницији, за тежиште троугла ACE важи $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GE} = 0$. Нека је M произволна тачка равни датог шестоугла $ABCDEF$. Посматраћемо разлику $MA^2 + MC^2 + ME^2 - (MB^2 + MD^2 + MF^2)$. На основу Лајбницевог теореме важи $MA^2 + MC^2 + ME^2 = 3MG^2 + GA^2 + GC^2 + GE^2$. Аналогно важи и $MB^2 + MD^2 + MF^2 = 3MH^2 + HB^2 + HD^2 + HF^2$. Добијено можемо записати као $MA^2 + MC^2 + ME^2 = 3MG^2 + C_1$ и $MB^2 + MD^2 + MF^2 = 3MH^2 + C_2$, где су C_1 и C_2 константе. Пошто су ова два збира једнака за сваку тачку M , добијамо $3MG^2 + C_1 = 3MH^2 + C_2$, то јест следи да је разлика $MG^2 - MH^2$ константна за сваку тачку M . Претпоставимо сада да је $G \neq H$. Узмимо $M = G$. Тада је $MG^2 - MH^2 = 0 - GH^2 = -GH^2$. Узмимо сада $M = H$. Тада је $MG^2 - MH^2 = GH^2 - 0 = GH^2$. Одавде следи да је $-GH^2 = GH^2$, што је немогуће јер је $GH^2 > 0$. Дакле, мора бити $G = H$.

3.2 Барицентар и барицентричне координате

Задатак 4. Ако су $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ барицентричне координате тачака P , Q , R у односу на било коју афину базу (A, B, C) равни Π , доказати да су те тачке колинеарне, ако и само ако је

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} = 0$$

Решење. Како су $P = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $Q = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $R = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ барицентричне координате, важи $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1$, $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 1$, $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 1$ и $P = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C$, $Q = \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C$, $R = \alpha_3 A + \beta_3 B + \gamma_3 C$. Тачке P , Q , R су колинеарне ако и само ако постоје скалари $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ тако да важи $R = \lambda P + \mu Q$, $\lambda + \mu = 1$. Заменом барицентричних координата у ову релацију добијамо

$$\begin{aligned} \alpha_3 A + \beta_3 B + \gamma_3 C &= \lambda(\alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C) + \mu(\alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C) \\ (\alpha_3 - \lambda\alpha_1 - \mu\alpha_2)A + (\beta_3 - \lambda\beta_1 - \mu\beta_2)B + (\gamma_3 - \lambda\gamma_1 - \mu\gamma_2)C &= 0 \end{aligned}$$

Пошто су темена A, B, C афино независна, добијамо $\alpha_3 = \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2$, $\beta_3 = \lambda\beta_1 + \mu\beta_2$, $\gamma_3 = \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2$. То значи да је вектор $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ линеарна комбинација вектора $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. То можемо записати и овако

$$\begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Дакле, колоне матрице $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$ су линеарно зависне, што је еквивалентно са

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Напомена 8. Из претходног задатка непосредно следи да се права одређена двома различитим тачкама P и Q може записати у барицентричним координатама. Ако су њихове координате $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, тада је права PQ одређена условом

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma \end{bmatrix} = 0,$$

где су (α, β, γ) барицентричне координате произвољне тачке на правој PQ .

Задатак 5. Ако је $\alpha + \beta + \gamma = 0$, доказати да тада вектор $\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC}$ не зависи од тачке P , то јест да зависи једино од тих скалара α, β, γ и датих тачака A, B, C .

Решење. Расписивањем вектора $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ и коришћењем $\alpha + \beta + \gamma = 0$ добијамо:

$$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} &= \alpha(A - P) + \beta(B - P) + \gamma(C - P) \\ &= \alpha A + \beta B + \gamma C - (\alpha + \beta + \gamma)P \\ &= \alpha A + \beta B + \gamma C. \end{aligned}$$

Ово управо значи да дати израз не зависи од тачке P , већ да зависи само од скалара α, β, γ и тачака A, B, C .

Напомена 9. У напомени 1 је показано да тврђење претходног задатка важи и у општем случају, када имамо n тачака.

Задатак 6. Дат је троугао ABC . Доказати да центар описане кружнице, тежиште и ортоцентар датог троугла припадају једној правој (Ојлерова права), а затим одредити однос дужи на тој правој и доказати Хамилтонову теорему.

Решење. Означимо са O , T , H редом центар описане кружнице, тежиште и ортоцентар датог троугла ABC . У теоријском делу рада смо показали да су њихове барицентричне координате:

$$\begin{aligned} O &= \frac{1}{16P^2}(a^2(b^2 + c^2 - a^2), b^2(c^2 + a^2 - b^2), c^2(a^2 + b^2 - c^2)), \\ T &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \\ H &= \frac{1}{16P^2}((c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2), (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2), \\ &\quad (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)), \end{aligned}$$

где је са P означена површина троугла ABC .

Означимо са H_1 прву барицентричну координату тачке H . Аналогно уводимо ознаке T_1 и O_1 . Важи

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{16P^2} \\ &= \frac{a^4 + a^2b^2 - a^2c^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - c^4 - a^2b^2 - b^4 + b^2c^2}{16P^2} \\ &= \frac{a^4 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4}{16P^2} \end{aligned}$$

Расписивањем израза $16P^2$, коришћем Хероновог обрасца добијамо $16P^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$. Упоредивањем добијеног израза са бројоцем разломка H_1 , бројилац разломка H_1 можемо написати у облику $16P^2 - 2a^2(b^2 + c^2 - a^2)$. Дакле, добијамо да важи

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{16P^2 - 2a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{16P^2} \\ &= 1 - \frac{2a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{16P^2} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{16P^2}a^2(b^2 + c^2 - a^2) \\ &= 3T_1 - 2O_1. \end{aligned}$$

Претходним рачуном смо добили $H_1 = 3T_1 - 2O_1$. Потпуно аналогним поступком добијамо $H_2 = 3T_2 - 2O_2$ и $H_3 = 3T_3 - 2O_3$. Одатле закључујемо да за тачке O, T, H важи $H = 3T - 2O$. Одавде следи $H - O = 3(T - O)$, односно $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OT}$. Даље имамо $\overrightarrow{HT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OT} - 3\overrightarrow{OT} = -2\overrightarrow{OT} = 2\overrightarrow{TO}$, односно важи $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$. Према томе, тачке O, T, H су колинеарне, при чему је T између O и H и важи $HT : TO = 2 : 1$.

Пошто су барицентричне координате тежишта T једнаке $T = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, по дефиницији барицентричних координата важи

$$T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

Полазећи од претходно добијене релације $H = 3T - 2O$, заменом израза за T добијамо

$$H = 3 \cdot \frac{1}{3}(A + B + C) - 2O = A + B + C - 2O.$$

Одавде следи $H - O = (A - O) + (B - O) + (C - O)$, односно $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Овиме је доказана Хамилтонова теорема.

Задатак 7. Дат је троугао ABC . Доказати да центар уписане кружнице, тежиште, Спикерова тачка и Нагелова тачка датог троугла припадају једној правој (Нагелова права) и одредити односе добијених дужи на тој правој.

Решење. Означимо са S, T, S_1, N редом центар уписане кружнице, тежиште, Спикерову тачку и Нагелову тачку датог троугла ABC . У теоријском делу рада смо показали да су њихове барицентричне координате:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{a+b+c}(a, b, c) = \frac{1}{2s}(a, b, c), \\ T &= \frac{1}{3}(1, 1, 1), \\ S_1 &= \frac{1}{2(a+b+c)}(b+c, c+a, a+b) = \frac{1}{4s}(b+c, c+a, a+b), \\ N &= \frac{1}{s}(s-a, s-b, s-c), \end{aligned}$$

где је s полуобим датог троугла. Посматрајмо барицентричне координате

Нагелове тачке:

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{2}{a+b+c} \left(\frac{b+c-a}{2}, \frac{a+c-b}{2}, \frac{a+b-c}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{a+b+c} (b+c-a, a+c-b, a+b-c) \\
 &= \frac{1}{a+b+c} (a+b+c-2a, a+b+c-2b, a+b+c-2c) \\
 &= \frac{1}{a+b+c} (a+b+c, a+b+c, a+b+c) - \frac{2}{a+b+c} (a, b, c) \\
 &= (1, 1, 1) - \frac{2}{a+b+c} (a, b, c) \\
 &= 3 \cdot \frac{1}{3} (1, 1, 1) - \frac{2}{a+b+c} (a, b, c) \\
 &= 3T - 2S.
 \end{aligned}$$

Дакле, добили смо да важи $N = 3T - 2S$, односно $\overrightarrow{TN} = 2\overrightarrow{ST}$. Ово значи да су тачке N, T, S колинеарне и да важи однос дужи $ST : TN = 1 : 2$.

Посматрајмо сада следећи збир:

$$\begin{aligned}
 \frac{N+S}{2} &= \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}S = \frac{1}{2s}(s-a, s-b, s-c) + \frac{1}{4s}(a, b, c) \\
 &= \frac{2}{4s}(s-a, s-b, s-c) + \frac{1}{4s}(a, b, c) \\
 &= \frac{1}{4s}(2s-2a+a, 2s-2b+b, 2s-2c+c) \\
 &= \frac{1}{4s}(2s-a, 2s-b, 2s-c) \\
 &= \frac{1}{2(a+b+c)}(a+b+c-a, a+b+c-b, a+b+c-c) \\
 &= \frac{1}{2(a+b+c)}(b+c, a+c, a+b) \\
 &= S_1.
 \end{aligned}$$

Добили смо да је $\frac{N+S}{2} = S_1$ што значи да је тачка S_1 средиште дужи NS . Ово показује да су и тачке N, S, S_1 колинеарне. Дакле све посматране тачке припадају једној правој.

Из $S_1 = \frac{N+S}{2}$ заменом да је $N = 3T - 2S$ и сређивањем долазимо до $2\overrightarrow{TS_1} = \overrightarrow{ST}$. Одавде је $ST : TS_1 = 2 : 1$.

Задатак 8. Нека је O унутрашња тачка троугла ABC и нека праве AO, BO и CO секу странице BC, CA и AB редом у тачкама A_1, B_1 и C_1 . Ако је AA_1 највећа од дужи AA_1, BB_1 и CC_1 , доказати да је $OA_1 + OB_1 + OC_1 \leq AA_1$.

Решење. Нека су барицентричне координате тачке O у односу на троугао ABC дате са $O = (\alpha, \beta, \gamma)$, при чему је $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Пошто је O унутрашња тачка троугла важи $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Како тачке A, O, A_1 леже на истој правој, тачку O можемо написати као афину комбинацију тачака A и A_1 . Барицентричне координате тачака A и A_1 у односу на троугао ABC су $A = (1, 0, 0)$ и $A_1 = (0, \beta, \gamma)$. Како је $O = \alpha A + \beta B + \gamma C$ и $\beta + \gamma = 1 - \alpha$, добијамо $O = \alpha A + (1 - \alpha)A_1$. Ово показује да тачка O дели дуж AA_1 тако да је $OA_1 = \alpha AA_1$. Аналогно добијамо да важи и $OB_1 = \beta BB_1$ и $OC_1 = \gamma CC_1$.

Дакле, $OA_1 + OB_1 + OC_1 = \alpha AA_1 + \beta BB_1 + \gamma CC_1$.

Из услова да је AA_1 највећа дуж, добијамо $\alpha AA_1 + \beta BB_1 + \gamma CC_1 \leq \alpha AA_1 + \beta AA_1 + \gamma AA_1$. Према томе, важи $OA_1 + OB_1 + OC_1 \leq (\alpha + \beta + \gamma)AA_1$. Како је $\alpha + \beta + \gamma = 1$, добијамо $OA_1 + OB_1 + OC_1 \leq AA_1$.

Задатак 9. Тетраедар $ABCD$ уписан је у сферу полупречника R с центром O , при чему се тачка O налази у унутрашњости тетраедра $ABCD$. Праве AO, BO, CO, DO секу наспрамне стране тераедра у тачкама A_1, B_1, C_1 и D_1 редом. Доказати да важи $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 \geq \frac{16}{3}R$.

Решење. Нека су барицентричне координате тачке O у односу на тетраедар $ABCD$ дате са $O = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, при чему је $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ и важи $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ јер тачка O припада унутрашњости тетраедра $ABCD$.

Тачка A_1 припада страни тетраедра BCD па важи $A_1 = (0, \beta, \gamma, \delta)$. Како су A, O, A_1 колинеарне, то важи да је $O = \alpha A + (1 - \alpha)A_1$. Додатно, пошто је O између A и A_1 , важи $AO = (1 - \alpha)AA_1$. Како је $AO = R$, добијамо $AA_1 = \frac{R}{1 - \alpha}$. Аналогно добијамо да важи и $BB_1 = \frac{R}{1 - \beta}$, $CC_1 = \frac{R}{1 - \gamma}$, $DD_1 = \frac{R}{1 - \delta}$. Следи

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = R \left(\frac{1}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \beta} + \frac{1}{1 - \gamma} + \frac{1}{1 - \delta} \right).$$

Сада примењујемо неједнакост између аритметичке и хармонијске средине на позитивне бројеве $1 - \alpha, 1 - \beta, 1 - \gamma, 1 - \delta$. Како је $(1 - \alpha) + (1 - \beta) + (1 - \gamma) + (1 - \delta) = 4 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 3$, добијамо

$$\frac{3}{4} \geq \frac{4}{\frac{1}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \beta} + \frac{1}{1 - \gamma} + \frac{1}{1 - \delta}},$$

односно

$$\frac{1}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \beta} + \frac{1}{1 - \gamma} + \frac{1}{1 - \delta} \geq \frac{16}{3}.$$

Одатле следи да је $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 \geq \frac{16}{3}R$.

Задатак 10. Нека је P произвољна тачка у унутрашњости троугла ABC . Означимо пресечне тачке правих AP , BP , CP и страница троугла са A_1 , B_1 , C_1 , редом. Ако је $x = \frac{AP}{PA_1}$, $y = \frac{BP}{PB_1}$, $z = \frac{CP}{PC_1}$, доказати да важи $xyz = x + y + z + 2$.

Решење. Нека су барицентричне координате тачке P у односу на троугао ABC дате са $P = (\alpha, \beta, \gamma)$, где је $\alpha + \beta + \gamma = 1$ и важи $\alpha, \beta, \gamma > 0$ јер тачка P припада унутрашњости троугла ABC .

Права AP сече страницу BC у тачки A_1 . Како тачка P лежи на дужи AA_1 , важи $P = \alpha A + (1 - \alpha)A_1$. Одатле добијамо $\frac{AP}{PA_1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$. Дакле $x = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$. Аналогно добијамо и $y = \frac{\gamma+\alpha}{\beta}$, $z = \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$.

Сада је $xyz = \frac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma}$.

Са друге стране важи

$$\begin{aligned} x + y + z + 2 &= \frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\gamma} + 2 \\ &= \frac{\beta\gamma(\beta + \gamma) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha) + \alpha\beta(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)}{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Дакле, важи $xyz = x + y + z + 2$.

3.3 Геометријска места тачака

Задатак 11. Ако тачке A, B, C у афиним простору $\mathcal{A}$ нису колинеарне и ако је S_α барицентар тачака $(A, \alpha), (B, \alpha - 2), (C, 2)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ није нула, доказати да све тако одређене тачке S_α припадају једној фиксираној правој Π .

Решење. По дефиницији барицентра добијамо $S_\alpha = \frac{\alpha A + (\alpha - 2)B + 2C}{\alpha + (\alpha - 2) + 2}$, односно после сређивања $S_\alpha = \frac{\alpha(A+B) + 2(C-B)}{2\alpha}$. Раздвајањем чланова добијамо $S_\alpha = \frac{A+B}{2} + \frac{1}{\alpha}(C - B)$. Означимо са $M = \frac{A+B}{2}$ средиште дужи AB и $\lambda = \frac{1}{\alpha}$. Закључујемо да важи $\lambda \neq 0$. Тада је $S_\alpha = M + \lambda(C - B)$ што даље можемо записати као $S_\alpha = M + \lambda \overrightarrow{BC}$. Како је $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ скалар, претходно добијено управо значи да свака тачка S_α лежи на правој која садржи тачку M и има правац $\overrightarrow{BC}$. То је права која садржи средиште дужи AB и паралелна је правој

BC , односно $\Pi = \{M + \mu \overrightarrow{BC} : \mu \in \mathbb{R}\}$. Према томе, за свако $\alpha \neq 0$, $S_\alpha \in \Pi$ чиме је доказано да сви барицентри S_α припадају једној фиксној правој.

Можемо прецизније описати скуп свих тачака S_α . Како је $\lambda = \frac{1}{\alpha}$, а α пролази кроз $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, тако и λ пролази кроз $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Зато важи

$$\{S_\alpha : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \{M + \lambda \overrightarrow{BC} : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Дакле, добијени скуп је права Π без тачке M , која одговара вредности $\lambda = 0$. Према томе, скуп свих тачака S_α представља унију две отворене полуправе са заједничком почетном тачком M .

Задатак 12. а) Ако тачке A, B, C у афиним простору $\mathcal{A}$ нису колинеарне и ако је Π скуп свих тачака P из $\mathcal{A}$ за које су вектори $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}$ и $2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ колинеарни, доказати да је тај скуп једна права у том простору и одредити бар две њене тачке.

б) Нека је $ABCD$ квадрат у простору $\mathcal{A}$. Одредити геометријско место свих тачака P из $\mathcal{A}$ за које је $|2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{AB}|$.

в) Нека је ABC било који троугао у простору $\mathcal{A}$. Одредити геометријско место Π свих тачака P из $\mathcal{A}$ за које је $|2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}|$.

Решење. а) Дате су тачке A, B, C које нису колинеарне. Нека је Π скуп свих тачака P за које су вектори $u = \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}$ и $v = 2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ колинеарни. Треба одредити геометријско место Π . Најпре ћемо повезати ова два вектора. Посматрајмо њихову разлику $v - u = (2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) - (\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}) = \overrightarrow{PA} - 3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}$. Сада у овоја израз заменимо $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC}$ и добијемо $\overrightarrow{PA} - 3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$, односно $v - u = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$. Дакле, добили смо фиксиран вектор који не зависи од тачке P . Означимо $w = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$. Пошто су A, B, C неколинеарне важи $w \neq 0$. Пошто су u и v колинеарни, онда су они и паралелни. Пошто је $v = u + w$ и како због колинеарности u и v важи $v = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{K}$, следи $u + w = \lambda u$, односно $w = (\lambda - 1)u$. Одатле добијамо да су u и w паралелни. То је еквивалентно са тим да су вектори $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}$ и $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$ паралелни. Сада одређујемо тачку кроз коју пролази тражена права. Нека је M барицентар тачака A, B, C са масама $1, 2, -1$. Пошто је $1 + 2 - 1 = 2$, важи $M = \frac{A+2B-C}{2}$. Пошто је M барицентар, важи

$2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}$, за сваку тачку P . Због тога, претходно добијени услов даје да су вектори $2\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$ паралелни, односно вектори $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$ су паралелни. Према томе, све тачке P леже на правој која пролази кроз тачку M и има правац $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$. Зато је $\Pi = \{M + \lambda(\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}) : \lambda \in \mathbb{K}\}$ тражена права. Две њене тачке су $M = \frac{A+2B-C}{2}$ и $M + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$, њих добијамо за $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$.

б) Нека је $ABCD$ квадрат. Тражимо све тачке P за које је $|2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{AB}|$. Посматрајмо вектор $2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$. Збир коефицијената је $2 - 1 + 1 = 2$, па постоји тачка S таква да је $2\overrightarrow{PS} = 2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$. Тачка S је барицентар система $(A, 2), (B, -1), (C, 1)$, па важи $S = \frac{2A-B+C}{2}$. Сада одређујемо њен положај у квадрату. Како је $S = A + \frac{1}{2}(C - B)$, то је и $S = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Пошто у квадрату важи $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, добијамо $S = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. То значи да је S средиште странице AD . Сада услов задатка постаје $|2\overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{AB}|$, односно $2|PS| = |AB|$. Одатле је $|PS| = \frac{|AB|}{2}$. Дакле, тражено геометријско место је сфера са центром у средишту странице AD и полупречником $\frac{|AB|}{2}$.

в) Дато је $|2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}|$. Уведимо две фиксне тачке $S_1 = \frac{2A-B+C}{2}$ и $S_2 = \frac{A+2B-C}{2}$. По дефиницији барицентра важи $2\overrightarrow{PS}_1 = 2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ и $\overrightarrow{PS}_2 = \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}$. Заменом у дати услов добијамо $|2\overrightarrow{PS}_1| = |2\overrightarrow{PS}_2|$, то јест $|\overrightarrow{PS}_1| = |\overrightarrow{PS}_2|$. Дакле, тачка P је једнако удаљена од фиксних тачака S_1 и S_2 , а скуп свих тачака које су једнако удаљене од две фиксне тачке је симетрална раван дужи S_1S_2 . Дакле, тражено геометријско место тачака Π је симетрална раван дужи S_1S_2 .

Задатак 13. Нека су X_n и Y_n ($n \in \mathbb{N}$) тачке ивица AB и AC троугла ABC такве да је $\overrightarrow{AX_n} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AY_n} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AC}$. Доказати да постоји тачка која припада свим правима X_nY_n .

Решење. Из услова $\overrightarrow{AX_n} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{AB}$ следи да тачка X_n дели дуж AB тако да је $X_n = \frac{n}{n+1}A + \frac{1}{n+1}B$. Одатле добијамо барицентричне координате тачке X_n у односу на троугао ABC односно $X_n = (\frac{n}{n+1}, \frac{1}{n+1}, 0)$.

Слично, из $\overrightarrow{AY_n} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AC}$ добијамо $Y_n = \frac{n-1}{n}A + \frac{1}{n}C$, па су барицентричне координате тачке Y_n у односу на троугао ABC дате са $Y_n = (\frac{n-1}{n}, 0, \frac{1}{n})$.

Нека је $P = (\alpha, \beta, \gamma)$, где је $\alpha + \beta + \gamma = 1$, произвољна тачка праве $X_n Y_n$. Три тачке су колинеарне ако и само ако је

$$\det \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{n}{n+1} & \frac{1}{n+1} & 0 \\ \frac{n-1}{n} & 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} = 0.$$

Множењем другог реда са $n + 1$, а трећег са n , добијамо еквивалентан израз

$$\det \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ n & 1 & 0 \\ n-1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Развијањем детерминанте добијамо $\alpha - n\beta - (n-1)\gamma = 0$. Дакле, једначина праве $X_n Y_n$ је $\alpha - n\beta - (n-1)\gamma = 0$. Можемо је написати и у облику $\alpha + \gamma - n(\beta + \gamma) = 0$.

Тражимо тачку $P = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, која припада свим правама $X_n Y_n$. Зато мора да важи $\alpha + \gamma - n(\beta + \gamma) = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Пошто је ово једнакост која мора да важи за свако n , коефицијент уз n и слободан члан морају бити једнаки нули, односно $\beta + \gamma = 0$ и $\alpha + \gamma = 0$. Одатле добијамо $\alpha = \beta = -\gamma$. Како важи $\alpha + \beta + \gamma = 1$, заменом добијамо $\alpha + \alpha - \alpha = 1$, одакле је $\alpha = 1$. Одатле добијамо $\beta = 1, \gamma = -1$. Дакле, заједничка тачка свих правих $X_n Y_n$ има барицентричне координате $P = (1, 1, -1)$. Како је $1 + 1 - 1 = 1$, добијене координате заиста задовољавају услов дефиниције барицентричних координата. Пошто је $\gamma < 0$, ова тачка се налази ван троугла ABC , што није проблем јер се тражи заједничка тачка правих $X_n Y_n$, а не дужи.

Задатак 14. Ако су P и Q тачке ивица AB и AC троугла ABC , такве да је $\frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{AP}|} + \frac{|\overrightarrow{QC}|}{|\overrightarrow{AQ}|} = 1$, доказати да тежиште тог троугла припада свим тако добијеним дужима PQ .

Решење. Нека је $P \in AB$, $Q \in AC$. Пошто су P и Q на ивицама троугла, њихове барицентричне координате у односу на троугао ABC су $P = (\alpha, \beta, 0)$ и $Q = (\alpha', 0, \gamma')$, где је $\alpha + \beta = 1$, $\alpha' + \gamma' = 1$.

За тачку $P \in AB$, из барицентричних координата имамо $P = \alpha A + \beta B$. Зато је $\overrightarrow{AP} = \beta \overrightarrow{AB}$. Са друге стране, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} = (1 - \beta) \overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AB}$. Одатле следи да је $\frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{AP}|} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Слично, за тачку $Q \in AC$, пошто је $Q = \alpha' A + \gamma' C$, имамо $\overrightarrow{AQ} = \gamma' \overrightarrow{AC}$, а $\overrightarrow{QC} = \alpha' \overrightarrow{AC}$. Одатле је $\frac{|\overrightarrow{QC}|}{|\overrightarrow{AQ}|} = \frac{\alpha'}{\gamma'}$.

Дати услов сада постаје $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\gamma'} = 1$.

Тежиште троугла ABC има барицентричне координате $T = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Желимо да докажемо да су тачке T, P, Q колинеарне. Произвољна тачка $M = (x, y, z)$ је колинеарна са $P = (\alpha, \beta, 0)$ и $Q = (\alpha', 0, \gamma')$ ако и само ако важи

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & 0 \\ \alpha' & 0 & \gamma' \end{bmatrix} = 0.$$

Развијањем детерминанте добијамо $\beta\gamma'x - \alpha\gamma'y - \alpha'\beta z = 0$. Да бисмо проверили да ли тежиште T задовољава овај услов, заменимо $x = y = z = \frac{1}{3}$. Добијамо услов $\frac{1}{3}(\beta\gamma' - \alpha\gamma' - \alpha'\beta) = 0$, односно треба да важи $\beta\gamma' = \alpha\gamma' + \alpha'\beta$. Делењем са $\beta\gamma'$ добијамо $1 = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\gamma'}$, а то је управо дати услов. Дакле, тачка T је колинеарна са P и Q .

Дакле, тачке T, P и Q су колинеарне, па T припада правој PQ . Да бисмо показали да T припада дужи PQ , посматрајмо барицентрични запис $T = \lambda P + (1 - \lambda)Q$. Из друге и треће координате тачке T добијамо $\lambda\beta = \frac{1}{3}$, $(1 - \lambda)\gamma' = \frac{1}{3}$, односно $\lambda = \frac{1}{3\beta}$, $1 - \lambda = \frac{1}{3\gamma'}$. Пошто су разломци у услову дефинисани, важи $\beta > 0$ и $\gamma' > 0$, па су $\lambda > 0$ и $1 - \lambda > 0$. Осим тога, $\lambda + (1 - \lambda) = 1$. Према томе, тачка T припада дужи PQ .

3.4 Тежиште

Задатак 15. У равни је дат произвољан петоугао $ABCD$. Конструисати лењиром и шестаром тежиште тог петоугла.

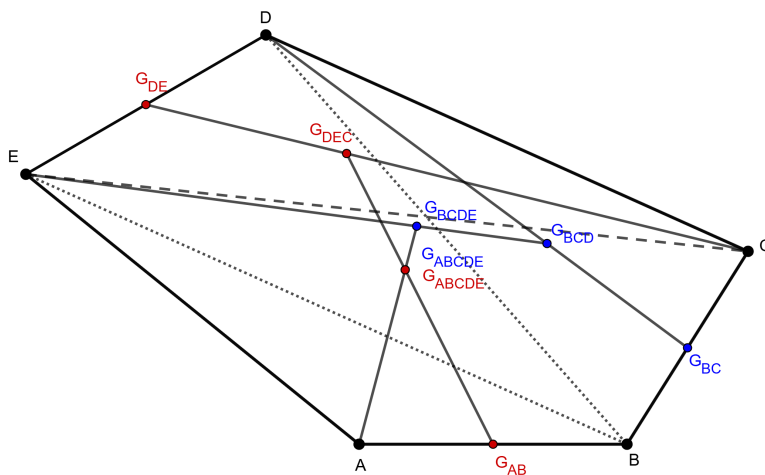
Решење. При решавању задатка користићемо тврђење 8 наведено у теоријском делу, а која каже да ако се систем тежинских тачака подели на два подсистема, онда је барицентар целог система барицентар барицентара тих подсистема, при чему су њихове тежине једнаке укупним тежинама одговарајућих подсистема.

Задатак ћемо решити на два начина и доказати да се у оба случаја добија иста тачка.

Посматрајмо систем тачака $\{A, B, C, D, E\}$ са једнаким тежинама, на пример нека све тачке имају тежину једнаку 1. Формирајмо подсистем $\{A\}$ и подсистем $\{B, C, D, E\}$. Барицентар G_{BCDE} подсистема $\{B, C, D, E\}$ добијамо

тако што најпре одредимо барицентар G_{BCD} троугла BCD , а затим барицентар тачака G_{BCD} и E . Да бисмо одредили барицентар троугла G_{BCD} , прво морамо одредити барицентар тачака B и C . Како оне имају исту тежину, њихов барицентар G_{BC} биће средиште дужи BC и он има тежину 2. Даље барицентар G_{BCD} добијамо из $DG_{BCD} : G_{BCD}G_{BC} = 2 : 1$ и он има тежину 3. Сада барицентар G_{BCDE} добијамо из $EG_{BCDE} : G_{BCDE}G_{BCD} = 3 : 1$ и он има тежину 4. Коначно, тражено тежиште петоугла, односно барицентар G_{ABCDE} добијамо из $AG_{ABCDE} : G_{ABCDE}G_{BCDE} = 4 : 1$ и он има тежину 5.

Други начин је да на почетку формирамо подсистеме $\{A, B\}$ и $\{C, D, E\}$. Тражено тежиште односно барицентар G_{ABCDE} налазимо тако што прво одредимо барицентре G_{AB} G_{CDE} . Како тачке A и B имају исту тежину, њихов барицентар G_{AB} ће бити средиште дужи AB и он има тежину 2. Одредимо сада барицентар подсистема $\{C, D, E\}$. Како тачке D и E имају исту тежину, њихов барицентар G_{DE} ће бити средиште дужи DE и он има тежину 2. Сада барицентар G_{CDE} добијамо из $CG_{CDE} : G_{CDE}G_{DE} = 2 : 1$ и он има тежину 3. Коначно, тежиште петоугла, односно барицентар G_{ABCDE} добијамо из $G_{CDE}G_{ABCDE} : G_{CDE}G_{AB} = 2 : 3$ и он има тежину 5.



Слика 3.1: Конструкција тежишта произвољног петоугла

На слици су приказана оба начина конструкције траженог тежишта петоугла. Видимо да се тачке које представљају тражено тежиште петоугла добијене у првом и другом начину конструисања поклапају, што је и очекивано јер знамо да је тежиште јединствено.

Задатак 16. Ако су P, Q, R тим редом барицентри пондерисаних тачака (B, α) и (C, β) , (C, α) и (A, β) , (A, α) и (B, β) , при чему је $\alpha + \beta \neq 0$, доказати да тачке A, B, C и P, Q, R имају исто тежиште.

Решење. По дефиницији барицентра важи $P = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B + \frac{\beta}{\alpha+\beta}C$, $Q = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}C + \frac{\beta}{\alpha+\beta}A$, $R = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}B$. Нека је T_1 тежиште тачака A, B, C и нека је T_2 тежиште тачака P, Q, R . Тада важи $T_1 = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ и $T_2 = \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R$. Заменом познатих релација у израз за тачку T_2 добијамо

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}B + \frac{\beta}{\alpha+\beta}C \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}C + \frac{\beta}{\alpha+\beta}A \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}B \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right) A + \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right) B + \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right) C \\ &= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C \\ &= T_1. \end{aligned}$$

Дакле, добили смо да је $T_1 \equiv T_2$ па тачке A, B, C и P, Q, R заиста имају исто тежиште.

Задатак 17. Нека је T тежиште четвороугла $ABCD$ (који не мора бити раван) и P, Q, R и S тежишта троуглова ABD, BCA, CDB и DAC , редом. Ако је G тежиште четвороугла $PQRS$, проверити да ли је $T \equiv G$.

Решење. Како је T тежиште четвороугла $ABCD$, важи $T = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D$. За тежишта P, Q, R и S троуглова ABD, BCA, CDB и DAC , редом, важи $P = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}D$, $Q = \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}A$, $R = \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}D + \frac{1}{3}B$, $S = \frac{1}{3}D + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}C$. За тежиште G четвороугла $PQRS$ важи $G = \frac{1}{4}P + \frac{1}{4}Q + \frac{1}{4}R + \frac{1}{4}S$. Заменом израза за тачке P, Q, R и S у израз за тачку G добијамо:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{4}(P + Q + R + S) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}D + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}D + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}D + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}C \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(3 \cdot \frac{1}{3}A + 3 \cdot \frac{1}{3}B + 3 \cdot \frac{1}{3}C + 3 \cdot \frac{1}{3}D \right) \\ &= \frac{1}{4}(A + B + C + D) \\ &= \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D. \end{aligned}$$

Одавде одмах добијамо $G = T$ јер је тежиште јединствено.

Задатак 18. На страницама BC , CA и AB троугла ABC уочене су тачке A_1 , B_1 и C_1 редом. Нека је T тежиште троугла ABC , а T_1 тежиште троугла $A_1B_1C_1$. Доказати да је $T \equiv T_1$ ако и само ако је

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A.$$

Решење. Пошто тачке A_1 , B_1 и C_1 припадају редом страницама BC , CA и AB троугла ABC , важи да је $A_1 = \alpha B + (1 - \alpha)C$, $B_1 = \beta C + (1 - \beta)A$, $C_1 = \gamma A + (1 - \gamma)B$, при чему је $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$. Тада добијамо

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1 - \alpha}{\alpha}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1 - \beta}{\beta}, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1 - \gamma}{\gamma}.$$

Пошто је T_1 тежиште троугла $A_1B_1C_1$, важи $T_1 = \frac{A_1+B_1+C_1}{3}$. Убацавањем израза за A_1 , B_1 , C_1 добијамо

$$\begin{aligned} 3T_1 &= \alpha B + (1 - \alpha)C + \beta C + (1 - \beta)A + \gamma A + (1 - \gamma)B \\ &= (1 - \beta + \gamma)A + (\alpha + 1 - \gamma)B + (1 - \alpha + \beta)C. \end{aligned}$$

С друге стране, пошто је T тежиште троугла ABC , важи $T = \frac{A+B+C}{3}$, односно $3T = A + B + C$.

Покажимо прво да из $T \equiv T_1$ следи једнакост датих размера. Дакле, претпоставимо да је $T \equiv T_1$. Одатле следи

$$A + B + C = (1 - \beta + \gamma)A + (\alpha + 1 - \gamma)B + (1 - \alpha + \beta)C.$$

Пошто су тачке A , B , C афино независне, одговарајући коефицијенти морају бити једнаки. Дакле, важи $1 - \beta + \gamma = 1$, $\alpha + 1 - \gamma = 1$, $1 - \alpha + \beta = 1$. Одатле следи $\gamma = \beta$, $\alpha = \gamma$, $\beta = \alpha$, па је $\alpha = \beta = \gamma$. Због тога је и $\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1-\beta}{\beta} = \frac{1-\gamma}{\gamma}$, односно

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A.$$

Покажимо сада да из једнакости датих размера следи $T \equiv T_1$. Претпоставимо да важи

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A.$$

Према претходно добијеним формулама важи $\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1-\beta}{\beta} = \frac{1-\gamma}{\gamma}$. Из $\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1-\beta}{\beta}$ следи $\alpha = \beta$. Аналогно добијамо и $\beta = \gamma$. Дакле, важи $\alpha = \beta = \gamma$. Заменом добијеног у израз за $3T_1$ добијамо

$$\begin{aligned} 3T_1 &= (1 - \alpha + \alpha)A + (\alpha + 1 - \alpha)B + (1 - \alpha + \alpha)C \\ &= A + B + C. \end{aligned}$$

Пошто је $3T = A + B + C$, следи $3T_1 = 3T$, односно $T_1 \equiv T$.

Према томе,

$$T \equiv T_1 \iff AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A.$$

Задатак 19. Доказати да за сваки паралелограм $ABCD$ важи релација $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$ (тзв. правило паралелограма).

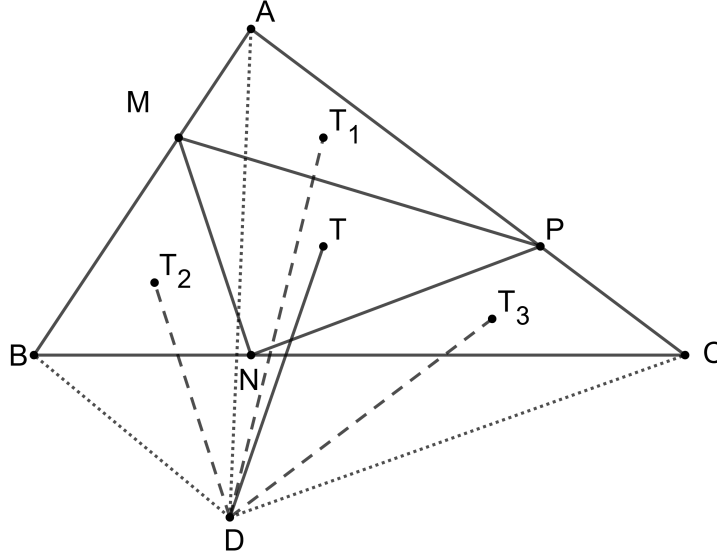
Решење. Дијагонале паралелограма AC и BD се полове. Означимо са M њихово средиште. Тада је M тежиште тачака A, C односно B, D . Тада је $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 0$ и $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 0$. Важи $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$. Одатле добијамо $AB^2 = |\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}|^2 = BM^2 + MA^2 + 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MA}$, $BC^2 = |\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}|^2 = BM^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MC}$. Сада је

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= 2BM^2 + MA^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{BM} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{BD}{2}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 \\ &= \frac{BD^2}{2} + \frac{AC^2}{2}. \end{aligned}$$

Одавде одмах добијамо $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$.

Задатак 20. Дат је троугао ABC . Нека је T његово тежиште и тачке M, N и P , редом на страницама AB, BC и CA такве да је $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$. Означимо са T_1, T_2, T_3 тежишта троуглова AMP, BMN, CNP , редом. Доказати да за сваку тачку D у равни троугла ABC важе неједнакости

$$3DT < DT_1 + DT_2 + DT_3 < DA + DB + DC.$$



Слика 3.2: Слика уз задатак

Решење. Нека је $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = \lambda$, $\lambda > 0$. Тада су барицентричне координате тачака M , N и P у односу на троугао ABC дате са $M = (\frac{1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}, 0)$, $N = (0, \frac{1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1})$, $P = (\frac{\lambda}{\lambda+1}, 0, \frac{1}{\lambda+1})$.

Пошто је T_1 тежиште троугла AMP , његове барицентричне координате у односу на троугао ABC су

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}M + \frac{1}{3}P \\ &= \frac{1}{3} \left((1, 0, 0) + \left(\frac{1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}, 0 \right) + \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}, 0, \frac{1}{\lambda+1} \right) \right) \\ &= \left(\frac{2}{3}, \frac{\lambda}{3(\lambda+1)}, \frac{1}{3(\lambda+1)} \right). \end{aligned}$$

На исти начин добијамо и $T_2 = \left(\frac{1}{3(\lambda+1)}, \frac{2}{3}, \frac{\lambda}{3(\lambda+1)} \right)$ и $T_3 = \left(\frac{\lambda}{3(\lambda+1)}, \frac{1}{3(\lambda+1)}, \frac{2}{3} \right)$.

Сабирањем барицентричних координата тачака T_1, T_2, T_3 по координатама добијамо $\frac{2}{3} + \frac{1}{3(\lambda+1)} + \frac{\lambda}{3(\lambda+1)} = 1$, $\frac{\lambda}{3(\lambda+1)} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3(\lambda+1)} = 1$, $\frac{1}{3(\lambda+1)} + \frac{\lambda}{3(\lambda+1)} + \frac{2}{3} = 1$. Према томе, тежиште троугла $T_1T_2T_3$ има барицентричне координате $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, а то су управо координате тежишта T троугла ABC . Дакле, T је тежиште троугла $T_1T_2T_3$.

Пошто је T тежиште троугла $T_1T_2T_3$, применом неједноакости троугла добијамо $3DT \leq DT_1 + DT_2 + DT_3$. Једнакост би била могућа само када би тачке T_1, T_2, T_3 биле колинеарне, што није могуће јер су T_1, T_2, T_3 темена троугла. Зато важи $3DT < DT_1 + DT_2 + DT_3$.

Како је T_1 тежиште троугла AMP , из његових барицентричних координата имамо $T_1 = \frac{2}{3}A + \frac{\lambda}{3(\lambda+1)}B + \frac{1}{3(\lambda+1)}C$. Зато применом неједнакости троугла на одговарајуће дужи добијамо $DT_1 < \frac{2}{3}DA + \frac{\lambda}{3(\lambda+1)}DB + \frac{1}{3(\lambda+1)}DC$. Слично добијамо и $DT_2 < \frac{1}{3(\lambda+1)}DA + \frac{2}{3}DB + \frac{\lambda}{3(\lambda+1)}DC$ и $DT_3 < \frac{\lambda}{3(\lambda+1)}DA + \frac{1}{3(\lambda+1)}DB + \frac{2}{3}DC$. Сабирањем претходних неједнакости и сређивањем добијамо $DT_1 + DT_2 + DT_3 < DA + DB + DC$.

Дакле, важи $3DT < DT_1 + DT_2 + DT_3 < DA + DB + DC$.

Задатак 21. Дата су два конвексна многоугла еуклидског простора $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ таква да важи $\overrightarrow{A_1B_1} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n} = \vec{0}$. Тада

- а) многоуглови $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ имају заједничких тачака;
- б) постоји изометријска трансформација која многоугао $A_1A_2 \dots A_n$ преводи у $A'_1A'_2 \dots A'_n$ такав да је $\overrightarrow{A'_1B_1} + \dots + \overrightarrow{A'_nB_n} = \vec{0}$ и $A'_1A'_2 \perp B_1B_2$.

Решење. а) Дати услов можемо записати и као $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_iB_i} = \vec{0}$. Нека је G_A тежиште система тачака $(A_1, 1), \dots, (A_n, 1)$ и нека је G_B тежиште система тачака $(B_1, 1), \dots, (B_n, 1)$. На основу тврђења 12 важи $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_iB_i} = n\overrightarrow{G_AG_B}$. Пошто је нама дато да је $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_iB_i} = \vec{0}$, следи да је $n\overrightarrow{G_AG_B} = \vec{0}$. Одатле одмах добијамо $\overrightarrow{G_AG_B} = \vec{0}$, што значи да је $G_A = G_B =: G$. Дакле, оба многоугла имају исто тежиште G . Пошто тежиште конвексног многоугла припада самом том многоуглу, следи да оба многоугла садрже тачку G . Према томе, они имају заједничку тачку.

- б) Нека је G заједничко тежиште многоуглова из дела а). Посматрајмо произвољну ротацију R око тачке G и означимо $A'_i = R(A_i)$, $i = 1, \dots, n$. Како је ротација изометрија, многоугао $A_1A_2 \dots A_n$ прелази у њему подударан многоугао $A'_1A'_2 \dots A'_n$. Пошто је $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$, а линеарни део ротације $\bar{R}$ је линеарно пресликавање на векторима, добијамо $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{GA'_i} = \bar{R}(\sum_{i=1}^n \overrightarrow{GA_i}) = \vec{0}$. Дакле и $A'_1, \dots, A'_n$ имају тежиште у тачки G . За свако i важи $\overrightarrow{A'_iB_i} = \overrightarrow{A'_iG} + \overrightarrow{GB_i}$. Сабирањем по свим индексима добијамо $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{A'_iB_i} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{A'_iG} + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{GB_i}$. Како је $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{GA'_i} = \vec{0}$ следи $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{A'_iG} = \vec{0}$. Такође важи и $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{GB_i} = \vec{0}$ па добијамо да важи тражено $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{A'_iB_i} = \vec{0}$. Како ротација око тачке G може праву A_1A_2 пресликати у праву произвољног смера, може се изабрати тако да слика праве A_1A_2 буде нормална на праву B_1B_2 . За тај избор ротације

важи $A'_1 A'_2 \perp B_1 B_2$. Према томе, постоји изометријска трансформација која задовољава оба тражена услова.

Задатак 22. Нека су A и B фиксне тачке и Π потпростор афиног простора $\mathcal{A}$, димензије n , над пољем $\mathbb{K}$. Ако је T_P тежиште тачака A, B, P , тада је и скуп $\Gamma = \{T_P : P \in \Pi\}$ један потпростор од $\mathcal{A}$, паралелан са Π .

Решење. Нека су $T_P, T_Q \in \Gamma$. По дефиницији скупа Γ , постоје тачке $P, Q \in \Pi$ такве да је $T_P = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}P$ и $T_Q = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}Q$. Покажимо да права $T_P T_Q$ припада скупу Γ . Нека је X произвољна тачка те праве. Тада постоји $\alpha \in \mathbb{K}$ такво да $X =_P (1 - \alpha)T_Q$. Одатле је

$$\begin{aligned} X &= \alpha\left(\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}P\right) + (1 - \alpha)\left(\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}Q\right) \\ &= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}(\alpha P + (1 - \alpha)Q). \end{aligned}$$

Пошто је Π афини потпростор, из $P, Q \in \Pi$ следи $R = \alpha P + (1 - \alpha)Q \in \Pi$. Према томе, $X = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}R = T_R$, па по дефиницији скупа Γ , важи $X \in \Gamma$. Дакле $T_P T_Q \subseteq \Gamma$. Како су T_P, T_Q биле произвољне тачке скупа Γ , следи да Γ садржи праву која пролази кроз било које две његове тачке. Стога је Γ афини потпростор простора $\mathcal{A}$.

Остаје да покажемо да је Γ паралелан са Π . За произвољне $P, Q \in \Pi$ имамо $\overrightarrow{T_P T_Q} = T_Q - T_P = \frac{1}{3}(Q - P) = \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$. Дакле, правац потпростора Γ једнак је правцу потпростора Π , па је $\Gamma // \Pi$.

Задатак 23. Нека је T_{PQ} тежиште система тачака A, P, Q при чему је A фиксирана тачка афиног простора $\mathcal{A}$, димензије n , над пољем $\mathbb{K}$, а P и Q припадају редом датим афиним потпросторима Π и Γ . Тада је скуп $\Sigma = \{T_{PQ} : P \in \Pi, Q \in \Gamma\}$ један афини потпростор од $\mathcal{A}$ паралелан са Π и Γ .

Решење. Нека су $T_{P_1 Q_1}, T_{P_2 Q_2} \in \Sigma$, где су $P_1, P_2 \in \Pi$, $Q_1, Q_2 \in \Gamma$. По дефиницији тежишта три тачке је $T_{P_1 Q_1} = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}Q_1$ и $T_{P_2 Q_2} = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}Q_2$. Покажимо да права која садржи тачке $T_{P_1 Q_1}$ и $T_{P_2 Q_2}$ припада скупу Σ . Нека је X произвољна тачка те праве. Тада постоји $\alpha \in \mathbb{K}$ такво да је $X = \alpha T_{P_1 Q_1} + (1 - \alpha)T_{P_2 Q_2}$. Заменом израза за тежишта добијамо

$$\begin{aligned} X &= \alpha\left(\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}Q_1\right) + (1 - \alpha)\left(\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}Q_2\right) \\ &= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}(\alpha P_1 + (1 - \alpha)P_2) + \frac{1}{3}(\alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2). \end{aligned}$$

Нека је сада $P = \alpha P_1 + (1 - \alpha)P_2$ и $Q = \alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2$. Будући да су $P_1, P_2 \in \Pi$, а Π је афини потпростор, следи $P \in \Pi$. Аналогно, пошто су $Q_1, Q_2 \in \Gamma$, следи $Q \in \Gamma$. Према томе, $X = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q = T_{PQ}$, па је, по дефиницији скупа Σ , $X \in \Sigma$. Дакле права која садржи било које две тачке скупа Σ садржана је у Σ . Стога је Σ афини потпростор простора $\mathcal{A}$.

Остаје још да докажемо да је Σ паралелан са Π и Γ . Нека су $P_1, P_2 \in \Pi$ произвољне тачке и $Q \in \Gamma$ фиксна тачка. Тада је

$$\overrightarrow{T_{P_1Q}T_{P_2Q}} = T_{P_2Q} - T_{P_1Q} = \frac{1}{3}(P_2 - P_1) = \frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2}.$$

Дакле, правац који се добија мењањем P , уз фиксирано Q , исти је као правац потпростора Π . Слично, за фиксно $P \in \Pi$ и $Q_1, Q_2 \in \Gamma$,

$$\overrightarrow{T_{PQ_1}T_{PQ_2}} = T_{PQ_2} - T_{PQ_1} = \frac{1}{3}(Q_2 - Q_1) = \frac{1}{3}\overrightarrow{Q_1Q_2}$$

Дакле, правац добијен мењањем Q , уз фиксно P , исти је као правац потпростора Γ . Према томе, Σ је паралелан са оба потпростора, то јест важи $\Sigma // \Pi$ и $\Sigma // \Gamma$.

3.5 Афина пресликавања

Задатак 24. Нека су $(1, 1), (0, 1), (3, 2)$ и $(-1, 2), (8, 6), (x, y)$ координате тачака A, B, C и P, Q, M у односу на дати репер Oe_1e_2 афине равни $\mathcal{A}$. Прво одредити барицентричне координате од M у односу на афину базу (A, B, C) те равни, а затим и афино пресликавање $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ за које је $\pi(A, B, C) = (P, A, Q)$.

Решење. Дате су координате $A = (1, 1), B = (0, 1), C = (3, 2), M = (x, y)$. Тражимо скаларе α, β, γ такве да је $M = \alpha A + \beta B + \gamma C$ и $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Заменом добијамо $(x, y) = \alpha(1, 1) + \beta(0, 1) + \gamma(3, 2)$ односно $(x, y) = (\alpha + 3\gamma, \alpha + \beta + 2\gamma)$. Из веза које важе за координате добијамо систем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha + 3\gamma &= x, \\ \alpha + \beta + 2\gamma &= y, \\ \alpha + \beta + \gamma &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Решавањем добијеног система по α, β, γ добијамо $\alpha = x - 3y + 3, \beta = -x + 2y - 1, \gamma = y - 1$. Коначно, тражене барицентричне координате тачке M у односу на афину базу (A, B, C) су $M = (x - 3y + 3, -x + 2y - 1, y - 1)_{(A, B, C)}$.

Одредимо сада тражено афино пресликавање π . Оно је одређено са $A \mapsto P$, $B \mapsto A$, $C \mapsto Q$. Пошто знамо да афина пресликавања чувају афине базе, знамо да ће и (P, A, Q) бити једна афина база афине равни $\mathcal{A}$. Додатно, знамо да афина пресликавања чувају барицентричне координате. Због тога за посматрану тачку M важи $\pi(M) = \alpha P + \beta A + \gamma Q$. Убацивањем претходно одређених барицентричних координата тачке M добијамо $\pi(M) = (x - 3y + 3)P + (-x + 2y - 1)A + (y - 1)Q$. Заменом датих координата тачака добијамо $\pi(x, y) = (x - 3y + 3)(-1, 2) + (-x + 2y - 1)(1, 1) + (y - 1)(8, 6)$. После сређивања коначно добијамо $\pi(x, y) = (-2x + 13y - 12, x - 1)$. Добијено можемо записати и на следећи начин

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 13 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Задатак 25. Нека су A , B и C било које три тачке афиног простора $\mathcal{A}$ и $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ пресликавање одређено са $\overrightarrow{P\sigma P} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}$. Доказати да је то пресликавање $\sigma : P \mapsto \sigma P$ и једна хомотетија простора $\mathcal{A}$, чији је центар S управо барицентар тих тачака A , B и C са масама 1, 1 и 2.

Решење. Означимо $\sigma P = P'$. Тада је по услову задатка $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}$. Нека је S барицентар тачака A , B и C са масама 1, 1 и 2. По дефиницији барицентра важи $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} = 0$. Распишимо векторе $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ на следећи начин: $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SC}$. Заменом у израз за $\overrightarrow{PP'}$ добијамо:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PP'} &= (\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA}) + (\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SB}) + 2(\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SC}) \\ &= 4\overrightarrow{PS} + (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC}) \\ &= 4\overrightarrow{PS}. \end{aligned}$$

Овде смо искористили да је $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} = 0$. Запишимо сада вектор $\overrightarrow{SP'}$ на следећи начин $\overrightarrow{SP'} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PP'}$. Заменом добијене релације за вектор $\overrightarrow{PP'}$ и сређивањем добијамо $\overrightarrow{SP'} = \overrightarrow{SP} + 4\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{SP} - 4\overrightarrow{SP} = -3\overrightarrow{SP}$. Дакле, добили смо да важи $\overrightarrow{S\sigma P} = -3\overrightarrow{SP}$. Ово је управо дефиниција хомотетије са центром S и коефицијентом -3 . Према томе, σ јесте хомотетија простора $\mathcal{A}$ чији је центар S управо барицентар тачака A , B и C са масама 1, 1 и 2.

Задатак 26. Ако су A и B две разне тачке простора $\mathcal{A}$ и α, β фиксирани скалари, тада је пресликавање $M \mapsto \alpha A + \beta B + (1 - \alpha - \beta)M$ или транслација или хомотетија.

Решење. Означимо $M' = \alpha A + \beta B + (1 - \alpha - \beta)M$. Ако означимо $\lambda = 1 - \alpha - \beta$, добијамо $M' = \alpha A + \beta B + \lambda M$. Разликујемо два случаја.

Прво, ако је $\lambda = 1$, добијамо $\alpha + \beta = 0$, односно $\beta = -\alpha$. Дакле, важи $M' = M + \alpha(A - B)$, односно $M' = M + \alpha \overrightarrow{BA}$. Ако означимо $v = \alpha \overrightarrow{BA}$, добијамо $M' = M + v$. Одавде одмах следи да је $M' - M = v$, односно $\overrightarrow{MM'} = v$. Како су тачке A и B , као и скалар α , фиксирани, вектор $v = \alpha \overrightarrow{BA}$ не зависи од тачке M . Према томе, свакој тачки M се придружује тачка M' тако да је $\overrightarrow{MM'} = v$, што је управо транслација за вектор v .

Посматрајмо сада случај када је $\lambda \neq 1$, односно $\alpha + \beta \neq 0$. Нека је C барицентар тежинских тачака (A, α) и (B, β) . Према дефиницији барицентра важи $C = \frac{\alpha A + \beta B}{\alpha + \beta}$. Како је $\alpha + \beta = 1 - \lambda$ следи $\alpha A + \beta B = (1 - \lambda)C$. Према томе, дато пресликавање $M' = \alpha A + \beta B + \lambda M$ можемо записати у облику $M' = (1 - \lambda)C + \lambda M$. Одатле добијамо $M' = C + \lambda(M - C)$. Добијени израз представља хомотетију са центром C и коефицијентом λ . Дакле, за $\lambda \neq 1$ дато пресликавање је хомотетија са центром $C = \frac{\alpha A + \beta B}{\alpha + \beta}$ и коефицијентом $\lambda = 1 - \alpha - \beta$.

Задатак 27. Нека је ABC тротеменик у афиним простору $\mathcal{A}$ и $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ пресликавање којим се свакој тачки M из $\mathcal{A}$ придружује тачка $\pi(M) = M'$ одређена са $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$. Доказати да је то пресликавање бијективно и афино, да има тачно једну фиксну тачку S , као и да, за сваку тачку $M \neq S$, права $\langle M, M' \rangle$ садржи тачку S .

Решење. Из $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ расписивањем вектора добијамо $M' - M = A - M - 2(B - M) + 3(C - M)$. После мало сређивања добијамо $M' = A - 2B + 3C - M$, што значи да је пресликавање π дефинисано са $\pi(M) = A - 2B + 3C - M$. У афиним простору $\mathcal{A}$ са придруженим векторским простором $\mathbb{V}$, пресликавање $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ је афино ако постоји линеарно пресликавање $L : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ такво да за сваку тачку $A \in \mathcal{A}$ и сваки вектор $u \in \mathbb{V}$ важи $\sigma(A + u) = \sigma(A) + L(u)$. Да бисмо показали да је дато пресликавање π афино, узмемо произвољну тачку M и вектор u . Тада је $\pi(M + u) = A - 2B + 3C - (M + u)$. Сређивањем добијамо $\pi(M + u) = \pi(M) - u$, па је придружено линеарно пресликавање $G(u) = -u$. Лако се може показати да је оно заиста линеарно. Пошто важи $\pi(\pi(M)) = A - 2B + 3C - (A - 2B + 3C - M)$, односно $\pi(\pi(M)) = M$, закључујемо да је пресликавање π инволуција па је и бијекција.

Сада тражимо тачку S за коју важи $\pi(S) = S$. Заменом добијамо $A - 2B + 3C - S = S$, односно $2S = A - 2B + 3C$. Дакле, добијамо да је $S = \frac{1}{2}A - B + \frac{3}{2}C$. Како је $\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 1$, то је S тачка у афиним простору чија је афина база (A, B, C) , па је добро дефинисана. Јединственост следи јер једначина $2S = A - 2B + 3C$ има само једно решење. Коначно, тражена фиксна тачка је $S = \frac{1}{2}A - B + \frac{3}{2}C$.

Треба још показати да тачка S припада правој коју одређују тачке M и M' . Из $M' = A - 2B + 3C - M$ и $2S = A - 2B + 3C$ добијамо да важи $M' = 2S - M$. Посматрајмо сада векторе $\overrightarrow{SM} = M - S$ и $\overrightarrow{SM'} = M' - S$. Заменом добијамо $\overrightarrow{SM'} = M' - S = 2S - M - S = S - M = -\overrightarrow{SM}$ то јест $\overrightarrow{SM'} = -\overrightarrow{SM}$. Ово значи да су вектори $\overrightarrow{SM}$ и $\overrightarrow{SM'}$ линеарно зависни, па тачке S, M, M' припадају истој правој. Штавише, из $\overrightarrow{SM'} = -\overrightarrow{SM}$ се види да је тачка S средиште дужи чији су крајеви тачке M и M' .

Задатак 28. Доказати да је пресликавање $\sigma : P \mapsto P'$ произвољног афиног простора дато са $\overrightarrow{PP'} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC}$ афино и одредити тип и компоненте пресликавања у зависности од реалних параметара α, β, γ .

Решење. Трансформацијом датог израза $\overrightarrow{PP'} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC}$ добијамо

$$\begin{aligned} P' - P &= \alpha(A - P) + \beta(B - P) + \gamma(C - P) \\ P' &= P + \alpha A - \alpha P + \beta B - \beta P + \gamma C - \gamma P \\ P' &= \alpha A + \beta B + \gamma C + (1 - \alpha - \beta - \gamma)P. \end{aligned}$$

Дакле, пресликавање σ тачки P придружује тачку $P' = (1 - \alpha - \beta - \gamma)P + \alpha A + \beta B + \gamma C$. Означимо $\lambda = 1 - \alpha - \beta - \gamma$ и $M = \alpha A + \beta B + \gamma C$. Добивамо $P' = \lambda P + M$. Пошто λ и M не зависе од тачке P , пресликавање $P \mapsto \lambda P + M$ је линеарно, а M је транслациони део пресликавања, закључујемо да је пресликавање σ збир линеарног и транслационог дела, па је афино пресликавање.

Посматрајмо сада $\lambda = 1 - \alpha - \beta - \gamma$. Разликујемо два случаја.

Прво, ако је $\lambda = 1$, добијамо $\alpha + \beta + \gamma = 0$, односно $\gamma = -(\alpha + \beta)$. Заменом добијене релације у израз за тачку P' добијамо

$$\begin{aligned} P' &= P + \alpha A + \beta B - (\alpha + \beta)C \\ &= P + \alpha(A - C) + \beta(B - C). \end{aligned}$$

Одавде одмах следи $P' = P + \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$. Ако означимо $\vec{v} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$, добијамо $P' = P + \vec{v}$. Одавде одмах следи да је $P' - P = \vec{v}$, односно

$\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$. Како су тачке A, B и C , као и скалари α и β фиксирани, вектор $\vec{v} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ не зависи од тачке P . Дакле, свакој тачки P се придружује тачка P' тако да је $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$, што је управо трансформација за вектор $\vec{v}$.

Посматрајмо сада случај када је $\lambda \neq 1$, односно $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Нека је S барицентар тежинских тачака (A, α) , (B, β) и (C, γ) . Према дефиницији барицентра важи $S = \frac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{\alpha + \beta + \gamma}$. Како је $\alpha + \beta + \gamma = 1 - \lambda$ следи $\alpha A + \beta B + \gamma C = (1 - \lambda)S$. Према томе дато пресликавање $P' = \alpha A + \beta B + \gamma C + \lambda P$ можемо записати у облику $P' = (1 - \lambda)S + \lambda P$. Одатле добијамо $P' = S + \lambda(P - S)$. Добијени израз представља хомотетију са центром S и коефицијентом λ . Дакле, за $\lambda \neq 1$ пресликавање је хомотетија са центром $S = \frac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{\alpha + \beta + \gamma}$ и коефицијентом $\lambda = 1 - \alpha - \beta - \gamma$.

Задатак 29. Нека су A, B, C три фиксиране неколинеарне тачке афиног простора димензије n и α, β, γ реални бројеви такви да $\alpha + \beta + \gamma \neq -1$. Означимо са M' барицентар система тачака $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (M, 1)$.

- а) Доказати да је пресликавање $\sigma_{\alpha\beta\gamma} : M \mapsto M'$ трансформација или хомотетија.
- б) Представити $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ у координатама за $n = 2$. Ако су $A(0,0)$, $B(4,1)$, $C(2,2)$ координате тачка у односу на дати репер афине равни, представити у координатама пресликавање σ_{111} .

Решење. а) Како је M' барицентар система тачака $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (M, 1)$ по дефиницији барицентра важи $M' = \frac{\alpha A + \beta B + \gamma C + M}{\alpha + \beta + \gamma + 1}$. Означимо $\lambda = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma + 1}$. Тада је $M' = \lambda M + \lambda(\alpha A + \beta B + \gamma C)$. Сада разликујемо два случаја.

Прво, ако је $\lambda = 1$, добијамо $\frac{1}{\alpha + \beta + \gamma + 1} = 1$, па је $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Добијамо $M' = M + \alpha A + \beta B + \gamma C$. Из $\alpha + \beta + \gamma = 0$ следи $\gamma = -(\alpha + \beta)$, па заменом у претходни израз добијамо $M' = M + \alpha(A - C) + \beta(B - C)$. Одавде одмах следи $M' = M + \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$. Дакле, $\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$, што је константан вектор, независан од M . Према томе, $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ је трансформација.

Посматрајмо сада случај када је $\lambda \neq 1$, односно $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Нека је S барицентар тачака (A, α) , (B, β) и (C, γ) . Према дефиницији барицентра важи $S = \frac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{\alpha + \beta + \gamma}$. Одавде добијамо $\alpha A + \beta B + \gamma C = (\alpha + \beta + \gamma)S$. Пошто смо раније означили $\lambda = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma + 1}$, израз за M' постаје $M' = \lambda M + \lambda(\alpha A + \beta B + \gamma C)$. Заменом израза који смо добили за барицентар

S добијамо $M' = \lambda M + \lambda(\alpha + \beta + \gamma)S$. Како је $\lambda = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma + 1}$ имамо $\lambda(\alpha + \beta + \gamma) = 1 - \lambda$. Због тога је $M' = \lambda M + (1 - \lambda)S$, односно $M' = S + \lambda(M - S)$. Ово је управо хомотетија са центром $S = \frac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{\alpha + \beta + \gamma}$ и коефицијентом $\lambda = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma + 1}$.

б) За $n = 2$, нека су

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

. Пошто је M' барицентар система тачака $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (M, 1)$, по дефиницији барицентра важи $M' = \frac{\alpha A + \beta B + \gamma C + M}{\alpha + \beta + \gamma + 1}$. Дакле,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma + 1} \left[\alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right].$$

Сређивањем добијамо

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1}{\alpha + \beta + \gamma + 1} \\ \frac{\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2}{\alpha + \beta + \gamma + 1} \end{bmatrix}.$$

Посматрајмо сада σ_{111} . Дато је $A = (0, 0)$, $B = (4, 1)$, $C = (2, 2)$ и $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Заменом у претходно добијену општу формулу и сређивањем добијамо

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Дакле, важи $\sigma_{111} = (\frac{x}{4} + \frac{3}{2}, \frac{y}{4} + \frac{3}{4})$. На основу резултата добијених у општем случају, закључујемо да је σ_{111} хомотетија са центром $S = \frac{A+B+C}{3}$, што је управо тежиште троугла ABC , то јест, $T = (2, 1)$ и коефицијентом $\lambda = \frac{1}{4}$.

Задатак 30. Нека је σ афино пресликавање афиног простора $\mathcal{A}$ такво да је за сваку тачку $M \in \mathcal{A}$, тачка $\sigma^2(M)$ средиште дужи $M\sigma(M)$.

- Доказати да је, за сваку тачку $M \in \mathcal{A}$, барицентар тачака $(M, 1), (\sigma(M), 2)$ фиксна тачка при пресликавању σ .
- Одредити σ у случају када има тачно једну фиксну тачку.

Решење. Означимо $M' = \sigma(M)$ и $M'' = \sigma^2(M)$. По услову задатка M'' је средиште дужи MM' , па важи $M'' = \frac{M+M'}{2}$.

- а) Нека је S барицентар тачака $(M, 1)$ и $(M', 2)$. По дефиницији барицентра је $S = \frac{M+2M'}{3}$. Пошто је σ афино пресликавање, оно чува барицентре, па важи $\sigma(S) = \frac{\sigma(M)+2\sigma(M')}{3}$. Додатно, важи $\sigma(M) = M'$ и $\sigma(M') = M''$, па добијамо $\sigma(S) = \frac{M'+2M''}{3}$. По услову задатка је $M'' = \frac{M+M'}{2}$, па заменом у претходни израз добијамо $\sigma(S) = \frac{M'+2\frac{M+M'}{2}}{3} = \frac{M'+M+M'}{3} = \frac{M+2M'}{3} = S$. Дакле, $\sigma(S) = S$. Према томе, S је фиксна тачка пресликавања σ .
- б) Нека је та јединствена фиксна тачка S . Из дела а) знамо да је за сваку тачку M тачка $\frac{M+2\sigma(M)}{3}$ фиксна. Како је фиксна тачка јединствена мора бити $\frac{M+2\sigma(M)}{3} = S$. Одавде након сређивања добијамо $\sigma(M) = \frac{3S-M}{2}$, односно $\sigma(M) = S - \frac{1}{2}(M - S)$. Ово је управо хомотетија са центром S и коефицијентом $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Задатак 31. Дат је скуп тачака $A_1, \dots, A_m$ еуклидног простора димензије n и пресликавање f које свакој тачки P простора придружује тачку Q такву да је $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA_1} + \dots + \overrightarrow{PA_m}$.

- а) Доказати да је f хомотетија, одредити њен центар и коефицијент.
- б) Ако је $m = 3$ и тачке A_1, A_2, A_3 су неколинеарне, одредити криву коју описује тачка Q док се тачка P креће по описаном кругу троугла $A_1A_2A_3$.

Решење. а) Како је $\overrightarrow{PA_i} = A_i - P$, следи $\overrightarrow{PQ} = (A_1 - P) + \dots + (A_m - P)$, односно $Q - P = A_1 + \dots + A_m - mP$. Дакле, добијамо $Q = A_1 + \dots + A_m - (m - 1)P$.

Нека је тачка S барицентар тачака $(A_1, 1), \dots, (A_m, 1)$. Приметимо да је тачка S заправо тежиште система тачака $(A_1, 1), \dots, (A_m, 1)$ јер су свим тачкама придружене једнаке тежине. По дефиницији барицентра тада важи $S = \frac{A_1 + \dots + A_m}{m}$. Одатле је $A_1 + \dots + A_m = mS$, па добијамо $Q = mS - (m - 1)P$, односно $Q = S - (m - 1)(P - S)$. Ово је управо хомотетија са центром $S = \frac{A_1 + \dots + A_m}{m}$ и коефицијентом $\lambda = -(m - 1) = 1 - m$.

- б) Сада имамо три неколинеарне тачке A_1, A_2, A_3 па је центар хомотетије $T = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3}$ управо тежиште троугла $A_1A_2A_3$. Коефицијент је $\lambda = 1 - 3 = -2$. Дакле, добијамо $\overrightarrow{TQ} = -2\overrightarrow{TP}$. Пошто се тачка P креће по

описаном кругу троугла $A_1A_2A_3$, а хомотетија са центром T пресликава круг у круг, тачка Q ће такође описивати круг. Пошто је коефицијент $\lambda = -2$, полупречник новог круга је $R' = 2R$, где је R полупречник круга описаног око троугла $A_1A_2A_3$. Ако означимо центар описаног круга троугла $A_1A_2A_3$ са O , онда је центар новог круга тачка $O' = f(O)$, за коју важи $\overrightarrow{TO'} = -2\overrightarrow{TO}$. Дакле, тачка Q описује круг са центром O' и полупречником $2R$. Добијени круг k' је описани круг троугла $A'_1A'_2A'_3$, при чему су тачке A'_1, A'_2, A'_3 слике тачака A_1, A_2, A_3 , редом, при посматраној хомотетији f . Такође, описани круг k троугла $A_1A_2A_3$ је Ојлеров круг троугла $A'_1A'_2A'_3$.

3.6 Такмичарски задаци

Задатак 32. Дат је троугао ABC чије су странице дужина $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Одредити тачку P у унутрашњости тог троугла за коју је вредност израза

а) $x^2 + y^2 + z^2$;

б) $ax^2 + by^2 + cz^2$

минимална, где су x, y, z растојања тачке P редом од правих BC, CA, AB .

Решење. Нека је P произвољна тачка у унутрашњости троугла ABC и нека су (α, β, γ) њене барицентричне координате у односу на троугао ABC , где је $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Такође, важи и $\alpha, \beta, \gamma > 0$ јер тачка P припада унутрашњости троугла ABC .

Нека су h_a, h_b, h_c висине троугла ABC спуштене редом на странице BC, CA, AB . Пошто је α однос површина троуглова PBC и ABC , а ова два троугла имају заједничку основу BC , следи $\alpha = \frac{x}{h_a}$, где је x растојање тачке P од праве BC . Аналогно добијамо и $\beta = \frac{y}{h_b}$, $\gamma = \frac{z}{h_c}$. Одатле из $\alpha + \beta + \gamma = 1$ добијамо $\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$ (1). Како је $h_a = \frac{2P_{ABC}}{a}$, $h_b = \frac{2P_{ABC}}{b}$, $h_c = \frac{2P_{ABC}}{c}$, где је P_{ABC} површина троугла ABC , из (1) након сређивања добијамо $ax + by + cz = 2P_{ABC}$ (2). Дакле, величина $ax + by + cz$ је константна за све тачке P у унутрашњости троугла ABC .

- а) Посматрајмо израз $x^2 + y^2 + z^2$. Применом Коши-Шварцове неједнакости добијамо

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2.$$

На основу (2) следи

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq 4P_{ABC}^2,$$

па је

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{4P_{ABC}^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Једнакост у Коши-Шварцовој неједнакости постиже се ако и само ако је $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Дакле, тражена тачка P је јединствена тачка у унутрашњости троугла чије су удаљености од страница пропорционалне дужинама тих страница. За њу се достиже наведена доња граница, па је минимална вредност израза $\frac{4P_{ABC}^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Геометријско место тачака за које је $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ је полуправа са почетком у темену C . Аналогно, услови $\frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ и $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$ одређују полуправе са почетком у теменима A и B . Њихов заједнички пресек је јединствена тачка P у унутрашњости троугла.

Из $\alpha = \frac{x}{h_a}$, $\beta = \frac{y}{h_b}$ и $\gamma = \frac{z}{h_c}$ следи $\alpha : \beta : \gamma = \frac{x}{h_a} : \frac{y}{h_b} : \frac{z}{h_c}$. Како важи и $h_a = \frac{2P_{ABC}}{a}$, $h_b = \frac{2P_{ABC}}{b}$, $h_c = \frac{2P_{ABC}}{c}$, добијамо

$\alpha : \beta : \gamma = a^2 : b^2 : c^2$. Одавде следи да су барицентричне координате тачке $P = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right)$.

- б) Посматрајмо израз $ax^2 + by^2 + cz^2$. Пошто су a, b, c позитивни бројеви, применом Коши-Шварцове неједнакости у облику

$$(a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

на основу (2) добијамо

$$(a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2) \geq 4P_{ABC}^2.$$

Одатле следи

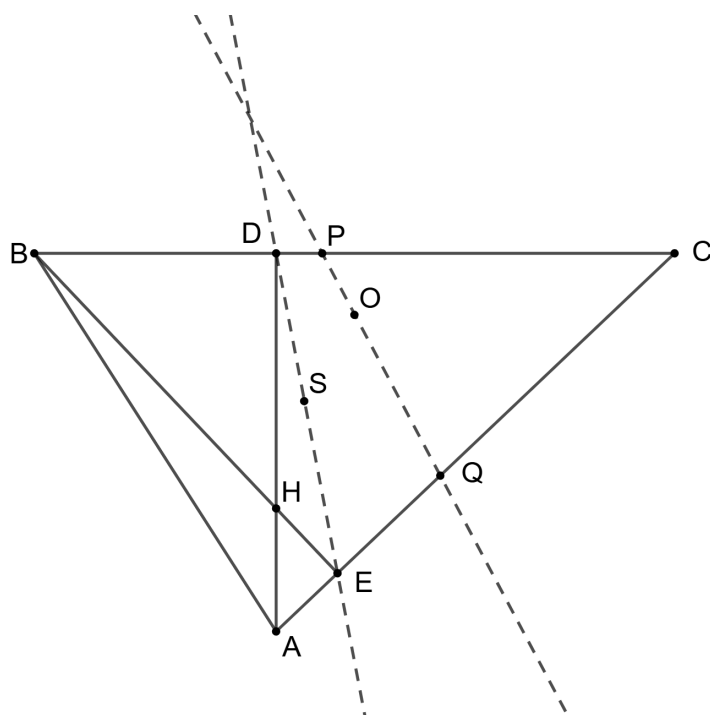
$$ax^2 + by^2 + cz^2 \geq \frac{4P_{ABC}^2}{a + b + c}.$$

Једнакост се достиже ако и само ако је $x = y = z$. То значи да је тачка P једнако удаљена од све три странице троугла ABC . Јединствена тачка

са тим својством је центар уписане кружнице троугла ABC . Дакле, минимална вредност израза $ax^2 + by^2 + cz^2$ је $\frac{4P_{ABC}^2}{a+b+c}$, а достиже се у центру уписане кружнице троугла ABC .

Важи $\alpha : \beta : \gamma = \frac{x}{h_a} : \frac{y}{h_b} : \frac{z}{h_c}$, па заменом $x = y = z$ добијамо $\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = a : b : c$. Дакле, барицентричне координате тачке P су $P = (\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c})$. На основу теоријског дела рада знамо да су ово заиста барицентричне координате центра уписане кружнице троугла ABC .

Задатак 33. Дат је оштроугли троугао ABC . Нека су AD и BE висине. Нека је P тачка пресека симетрале унутрашњег угла код темена A и странице BC , а Q тачка пресека симетрале унутрашњег угла код темена B и странице AC . Означимо са S и O центар уписане и описане кружнице троугла. Доказати да су тачке D, E, S колинеарне ако и само ако су тачке P, Q, O колинеарне.



Слика 3.3: Слика уз задатак

Решење. При решавању задатка користићемо познате барицентричне координате значајних тачака троугла у хомогеном облику. Координате центра уписане кружнице су $S = (a : b : c)$, где је $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$,

координате центра описане кружнице су $O = (\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)$, где су α, β, γ унутрашњи углови троугла ABC . Како су координате ортоцентра $H = (\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \gamma)$, тачка D која је поножје висине из темена A има координате $D = (0 : \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \gamma)$, а тачка E која је подножје висине из темена B има координате $E = (\operatorname{tg} \alpha : 0 : \operatorname{tg} \gamma)$.

На основу особина симетрале угла за тачку P важи $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$. Одатле добијамо да су барицентричне координате тачке P у хомогеном облику $P = (0 : AB : AC)$. На основу синусне теореме важи $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$, па добијамо $P = (0 : \sin \beta : \sin \gamma)$. Аналогно добијамо и $Q = (\sin \alpha : 0 : \sin \gamma)$.

Три тачке $X = (x_1 : x_2 : x_3)$, $Y = (y_1 : y_2 : y_3)$, $Z = (z_1 : z_2 : z_3)$ су колинеарне ако и само ако

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = 0.$$

За тачке D, E, S израчунавањем детерминанте добијамо услов $\cos \alpha + \cos \beta = \cos \gamma$, док за тачке P, Q, O израчунавањем детерминанте такође добијамо услов $\cos \alpha + \cos \beta = \cos \gamma$.

Дакле, тачке D, E, S су колинеарне ако и само ако су тачке P, Q, O колинеарне, јер се оба услова свде на идентитет $\cos \alpha + \cos \beta = \cos \gamma$.

Задатак 34. Под тежиштем система од n тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ подразумевамо тачку T која задовољава услов $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{TA_i} = \vec{0}$. Одредити највећи природан број n такав да у равни постоји n различитих тачака са целобројним координатама, при чему тежиште произвољне четворке тих тачака нема све координате целобројне.

Решење. Најпре ћемо показати да је могуће изабрати 12 тачака са траженим својством. Нека су $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, 12$, целобројне тачке такве да важи

$$\begin{aligned} x_i &\equiv 0 \pmod{4}, & i &= 1, \dots, 6, \\ x_i &\equiv 1 \pmod{4}, & i &= 7, \dots, 12, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} y_i &\equiv 0 \pmod{4}, & i &= 1, 2, 3, 10, 11, 12, \\ y_i &\equiv 1 \pmod{4}, & i &= 4, \dots, 9. \end{aligned}$$

За тежиште четири тачке A_i, A_j, A_k, A_l важи $T = \frac{1}{4}(A_i + A_j + A_k + A_l)$.

Према томе, обе координате тежишта су целобројне ако и само ако $x_i + x_j + x_k + x_l \equiv 0 \pmod{4}$ и $y_i + y_j + y_k + y_l \equiv 0 \pmod{4}$.

Пошто су све x -координате конгруентне са 0 или 1 по модулу 4, збир четири x -координате може бити дељив са 4 само ако су све четири конгруентне са 0 или су све четири конгруентне са 1 по модулу 4.

У првих шест тачака по три имају y -координату конгруентну са 0, а по три конгруентну са 1 по модулу 4. Исто важи и за других шест тачака. Према томе, међу било које четири тачке за које је збир x -координата дељив са 4, збир y -координата није дељив са 4.

Дакле, тежиште произвољне четворке од ових 12 тачака нема обе координате целобројне.

Остаје да докажемо да више од 12 тачака није могуће.

Нека је дато 13 произвољних различитих тачака са целобројним координатама. Посматрајмо било којих 5 тачака. Према Дирихлеовом принципу, међу њима постоје две тачке чије су x -координате исте парности и чије су y -координате исте парности. Ако су те тачке A и B , онда је њихово тежиште $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ тачка са целобројним координатама.

На овај начин, од 13 датих тачака можемо издвојити пет дисјунктних парова чија су тежишта целобројне тачке. Означимо та тежишта са M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 .

Поново применимо исту чињеницу на ових пет целобројних тачака. Постоје две, рецимо M_r и M_s , које имају координате исте парности. Њихово тежиште $C = \frac{1}{2}M_r + \frac{1}{2}M_s$ зато има целобројне координате.

Нека су M_r и M_s тежишта парова

$$A_i, A_j \quad \text{и} \quad A_k, A_l,$$

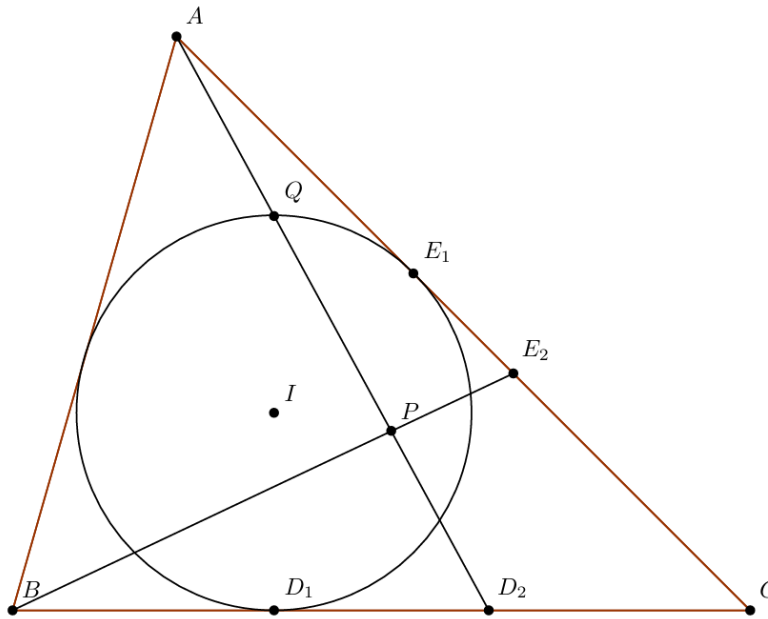
редом. Тада је $M_r = \frac{1}{2}A_i + \frac{1}{2}A_j$, $M_s = \frac{1}{2}A_k + \frac{1}{2}A_l$. Према томе,

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}M_r + \frac{1}{2}M_s \\ &= \frac{1}{4}A_i + \frac{1}{4}A_j + \frac{1}{4}A_k + \frac{1}{4}A_l \\ &= \frac{1}{4}(A_i + A_j + A_k + A_l). \end{aligned}$$

Дакле, C је тежиште четири од почетних 13 тачака и има обе координате целобројне.

Према томе, за 13 тачака тражено својство није могуће, док је за 12 тачака могуће. Стога је највећи такав природан број $n = 12$.

Задатак 35. (USAMO 2001/2 — Математичка олимпијада Сједињених Америчких Држава, 2001, задатак 2) Дат је троугао ABC и његова уписана кружница ω . Тачке D_1 и E_1 су додирне тачке ω са страницама BC и AC . Тачке D_2 и E_2 су на страницама BC и AC тако да је $CD_2 = BD_1$ и $CE_2 = AE_1$. Тачка P је пресечна тачка дужи AD_2 и BE_2 . Кружница ω сече AD_2 у две тачке, а Q је она ближа тачки A . Доказати да је $AQ = D_2P$.



Слика 3.4: Слика уз задатак 7

Решење. Погледајмо скицу (Слика 3.4). Тачка D_1 је додирна тачка уписане кружнице ω троугла ABC са страницом BC . Познато је да је $BD_1 = s - b$ и $CD_1 = s - c$, где је s полуобим датог троугла ABC . Пошто је тачка D_1 на страници BC , њена прва барицентрична координата (у односу на афину базу (A, B, C)) је нула, па она има барицентричне координате облика $(0 : y : z)$. Однос $y : z$ одређује положај посматране тачке на страници BC . Важи $D_1 = (0 : CD_1 : BD_1)$, односно $D_1 = (0 : s - c : s - b)$. Ово су ненормализоване координате.

Тачка D_2 такође припада страници BC , па је њена прва барицентрична координата нула. По услову задатка важи $CD_2 = BD_1 = s - b$. Пошто је $BC = a$, добијамо $BD_2 = a - (s - b)$, али $a + b + c = 2s$, па је $a - (s - b) = a - s + b = s - c$. Дакле, $BD_2 = s - c$. Барицентричне координате тачке

D_2 су $D_2 = (0 : CD_2 : BD_2)$, односно $D_2 = (0 : s - c : s - b)$. Желимо да нормализујемо ове координате. Важи $(s - b) + (s - c) = 2s - b - c$, а пошто знамо да је $2s = a + b + c$, добијамо $2s - b - c = a$. Коначно, нормализоване барицентричне координате тачке D_2 су $D_2 = (0, \frac{s-b}{a}, \frac{s-c}{a})$.

По услову задатка је $CE_2 = AE_1$. За додирну тачку E_1 , кружнице ω и странице AC важи да је $AE_1 = s - a$. Одатле следи да је $CE_2 = s - a$. Пошто је $AC = b$, добијамо да је $AE_2 = b - (s - a) = s - c$. Барицентричне координате тачке E_2 су $E_2 = (s - a : 0 : s - c)$. Након нормализације добијамо $E_2 = (\frac{s-a}{b}, 0, \frac{s-c}{b})$.

Сада желимо да одредимо једначину праве AD_2 . Имамо да је $A = (1 : 0 : 0)$ и $D_2 = (0, \frac{s-b}{a}, \frac{s-c}{a})$. За праву кроз тачке $(1 : 0 : 0)$ и $(0 : u : v)$ важи једначина $vy = uz$. У нашем случају је $u = \frac{s-b}{a}$ и $v = \frac{s-c}{a}$. Дакле, једначина праве AD_2 је (1) $(s - c)y = (s - b)z$.

Потребно је да одредимо и једначину праве BE_2 . Имамо да је $B = (0 : 1 : 0)$ и $E_2 = (\frac{s-a}{b}, 0, \frac{s-c}{b})$. Једначина праве BE_2 биће (2) $(s - c)x = (s - b)z$.

Тачка P је пресек правих AD_2 и BE_2 . Из једначина (1) и (2) добијамо да је $x = \frac{s-a}{s-c}z$ и $y = \frac{s-b}{s-c}z$. Пошто за нормализоване координате важи $x + y + z = 1$, добијамо $\frac{s-a+s-b+s-c}{s-c} = 1$, односно, после сређивања $\frac{s}{s-c}z = 1$. Одавде следи да је $z = \frac{s-c}{s}$, $x = \frac{s-a}{s}$ и $y = \frac{s-b}{s}$. Коначно, барицентричне координате тачке P су $P = (\frac{s-a}{a}, \frac{s-b}{s}, \frac{s-c}{s})$.

Нека је Q' тачка таква да је $AQ' = PD_2$. Одавде следи да је четвороугао AD_PQ паралелограм. За паралелограм важи $Q' + P = A + D_2$ по координатама. Пошто знамо координате тачака A, P, D_2 , можемо израчунати координате тачке Q' . Важи $Q'_y = D_{2y} - P_y$ и $Q'_z = D_{2z} - P_z$. Заменом познатих вредности добијамо $Q'_y = \frac{(s-a)(s-b)}{sa}$ и $Q'_z = \frac{(s-a)(s-c)}{sa}$. Пошто координате морају да дају збир 1, биће $Q'_x = 1 - Q'_y - Q'_z = \frac{a}{s}$. Дакле, $Q' = (\frac{a}{s}, \frac{(s-a)(s-b)}{sa}, \frac{(s-a)(s-c)}{sa})$.

На слици је са I означен центар уписане кружнице датог троугла ABC . Барицентричне координате тачке I су $I = (a : b : c)$. Нормализацијом добијамо $I = (\frac{a}{2s}, \frac{b}{2s}, \frac{c}{2s})$. Тврдимо да је I средиште дужи $Q'D_1$. Уверимо се да то заиста важи.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{(s-a)(s-b)}{sa} + \frac{s-c}{a}\right) &= \frac{(s-a)(s-b) + s(s-c)}{2sa} = \frac{b}{2s} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{(s-a)(s-c)}{sa} + \frac{s-b}{a}\right) &= \frac{c}{2s} \end{aligned}$$

Како је тачка I центар уписане кружнице ω и средиште дужи $Q'D_1$, онда је $Q'D_1$ пречник те кружнице. Пошто је D_1 на кружници, следи да је и Q' на кружници. Тада је Q' управо једна од две пресечне тачке и то она ближа тачки A , па је $Q' = Q$.

Библиографија

- [1] Zachary Abel. Barycentric coordinates, August 2007. Онлајн рукопис, 17. август 2007.
- [2] Michèle Audin. *Geometry*. Springer, 2003.
- [3] Jean Gallier. Basics of affine geometry. In *Geometric Methods and Applications*, pages 7–40. Springer, 2011.
- [4] Christina Koblbauer. Barycentric coordinates, 2012. Семинарски рад.
- [5] V. V. Prasolov and V. M. Tikhomirov. *Geometry*. American Mathematical Society, 2001.
- [6] M. Schindler and E. Chen. Barycentric coordinates in olympiad geometry, 2012. Онлајн материјал.
- [7] Г. Калајџић и М. Ђорић. *Афина и еуклидска геометрија, материјал за стиуденте*. Математички факултет, Београд, 2013.
- [8] Владица Андрејић. *Низа геометрија: Аналитичка геометрија, Пројективна геометрија, Афина геометрија*. Математички факултет Универзитета у Београду, Београд, 2026.
- [9] Т. Шукиловић и С. Вукмировић. *Геометрија за информатичаре*. Математички факултет, Београд, 2023.
- [10] Г. Калајџић. *Линеарна алгебра и аналитичка геометрија*. Математичка гимназија, Београд, 2011. Уџбеник за трећи разред Математичке гимназије.
- [11] А. Липковски. *Линеарна алгебра и аналитичка геометрија*. Математички факултет, Београд, 2007.

- [12] Драгомир Лопандић. *Геометрија*. Математички факултет, Универзитет у Београду.
- [13] М. Ђорић и О. Миленковић. *Збирка задатака из аналитичке геометрије*. Математички факултет, Београд, 2018.
- [14] Милан Митровић, Михаило Вељковић, Срђан Огњановић, Љубинка Петковић, and Ненад Лазаревић. *Геометрија за први разред Математичке гимназије*. Круг, Београд, 2022.

Биографија аутора

Емина Мишић рођена је дана 9. јануара 2003. године у Пожаревцу. Основну школу завршила је у Раброву, а средњу школу Гимназију „Пожаревачка гимназија“ у Пожаревцу.

Основне академске студије уписала је 2021. године на Математичком факултету Универзитета у Београду, студијски програм Математика, модул Професор математике и рачунарства, које је завршила 2025. године.

Мастер академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, студијски програм Математика, модул Професор математике и рачунарства, уписала је 2025. године.

Области њеног интересовања обухватају геометрију и методiku наставе математике. По завршетку мастер студија планира да настави професионални развој у области образовања и математике.