

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Јана Милосављевић

АНАЛИТИЧКИ И ГРАФИЧКИ ПРИСТУП
РЕШАВАЊУ ЈЕДНАЧИНА И
НЕЈЕДНАЧИНА

мастер рад

Београд, 2026.

Ментор:

проф. др Јована НИКОЛИЋ, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Јелена КАТИЋ, редован професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Александра МАРИНКОВИЋ, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: _____

Онима који су веровали и када ја нисам.

Наслов мастер рада: Аналитички и графички приступ решавању једначина и неједначина

Резиме: У овом раду разматра се однос аналитичког и графичког метода при решавању једначина и неједначина, са циљем да се покаже да графички метод представља равноправан, а у одређеним класама проблема и супериорнији инструмент у односу на аналитички поступак. Систематизују се теоријске основе о функцијама и особинама елементарних функција, а затим се детаљно анализирају геометријске трансформације графика (транслација, рефлексација, дилатација и трансформација апсолутном вредношћу) и њихов утицај на број и природу решења једначина и неједначина.

Изложена теорија примењује се на низ конкретних задатака, разврстаних према методолошкој погодности: задатке код којих графички метод битно олакшава решавање, задатке са параметрима, задатке код којих аналитичко решење није изводљиво у затвореном облику, као и одабране задатке са пријемних испита Математичког факултета у Београду.

На основу стечених запажања формулишу се критеријуми за избор између аналитичке и графичке методе решавања: да ли се график уопште може поуздано скицирати, да ли се са слике може прецизно прочитати тражена вредност и како параметар у задатку утиче на број решења. Тиме се, поред практичног упутства за избор методе, показују и границе саме графичке методе.

Кључне речи: график функције, геометријске трансформације графика, аналитички метод, графички метод, транслација, дилатација, рефлексација, задаци са параметром, трансцендентне функције

Садржај

1	Увод	1
2	Функције - теоријске основе	3
2.1	Појам функције	3
2.2	Основне особине функција	6
2.3	Елементарне функције	13
3	Геометријске трансформације графика функција	38
3.1	Транслација	38
3.2	Рефлексија	42
3.3	Дилатација	46
3.4	Трансформација са апсолутном вредношћу	51
3.5	Комбиновање трансформација	55
3.6	Утицај параметара на број и природу решења једначина и не- једначина	57
4	Примена аналитичке и графичке методе	63
4.1	Задаци код којих графичка метода битно олакшава решавање у односу на аналитичку методу	64
4.2	Задаци са параметрима	71
4.3	Задаци код којих аналитичко решење није могуће	78
4.4	Анализа задатака са пријемних испита	85
5	Критеријуми за избор методе и границе графичког приступа	93
5.1	Критеријуми за цртање графика	93
5.2	Критеријуми очитљивости	95
5.3	Критеријуми за задатке са параметром	96
5.4	Збирни преглед	97

САДРЖАЈ

6 Закључак	99
Библиографија	101

Глава 1

Увод

Појам функције један је од најопштијих појмова математике, а истовремено и један од оних који најнепосредније описују свет око нас. Кад год једна величина зависи од друге, реч је о функционалној вези. Прва функција са којом се ученик среће јесте линеарна, а њена најпознатија примена, кретање сталном брзином, показује оно што линеарну функцију и одређује: једнакој промени аргумента одговара једнака промена вредности. Распад радиоактивног материјала понаша се другачије. У једнаким временским размацама не нестаје иста количина материјала, већ пропорционални део онога што је преостало. Зато материјала бива све мање, али и губитак постаје све мањи. Тај облик промене ниједна линеарна функција не може да опише. Такав облик промене описује експоненцијална функција. Осцилације клатна не спадају ни у једну од те две врсте, јер се положај клатна не мења трајно, већ се враћа на исто. Такво понављање у правилним размацама јесте периодичност, својство тригонометријских функција. Разлика међу овим појавама није у формулама којима се записују, већ у особинама које их одређују.

Ако су особине оно што функцију одређује, поставља се питање како до њих долазимо. Функција се може задати на више начина. За ову тему најзначајнији су аналитички и графички, а сваки од њих те особине открива на свој начин. Из формуле се оне изводе рачуном, тачно али посредно; са графика се читају непосредно, али не увек поуздано. Предмет овог рада јесте однос између та два начина представљања, у контексту решавања једначина и неједначина, а питање које пред собом постављамо гласи: шта се са графика сме поуздано закључити, а шта остаје формули?

У наставној пракси то питање се ретко поставља, јер се графички метод

најчешће своди на техничко цртање графика, на нешто што долази тек након што је задатак решен, као илустрација резултата. Овај рад полази од другачије претпоставке: да је график самосталан алат за решавање. Циљ је да се покаже у којим проблемима је графички метод равноправан аналитичком, у којима је погоднији од њега, а у којима остаје недовољан. Тежиште је при томе на трансцендентним функцијама и функцијама са параметрима, јер се код њих предности графичког приступа најјасније испољавају.

Излагање прати тај редослед. У глави 2 систематизују се теоријска знања о функцијама неопходна за даље излагање — појам функције и инверзне функције, основне особине и преглед елементарних функција. Глава 3 посвећена је геометријским трансформацијама графика и утицају параметара на број и природу решења једначина које желимо да решимо применом графичког метода. У глави 4 ти резултати примењују се на конкретне задатке, разврстане према методолошкој погодности, а глава се завршава анализом одабраних задатака са пријемних испита. У глави 5 запажања стечена кроз решене задатке формулишу се као критеријуми за избор методе и указује се на границе графичког приступа, док се у глави 6 сумирају основни закључци.

Глава 2

Функције - теоријске основе

У овој глави систематизоваћемо теоријска знања о функцијама неопходна за разумевање аналитичке и графичке методе које су предмет проучавања у наредним поглављима рада. Најпре ћемо увести појам функције и појам њене инверзне функције, након чега ће бити изложене основне особине функција које представљају неопходан теоријски апарат за анализу конкретних класа функција. Потом ћемо навести елементарне функције, а посебна пажња биће посвећена трансцендентним функцијама, које представљају главни предмет разматрања овог рада.

2.1 Појам функције

Изложене дефиниције и особине функција могу се наћи у [1].

Нека су X и Y непразни скупови. Правило f које сваком елементу скупа X додељује јединствени елемент скупа Y назива се **функција** из скупа X у скуп Y . У алгебри уобичајено је да се појам функције уводи помоћу појма релација, тако да појам функције можемо прецизирати на следећи начин:

Дефиниција 2.1. Нека су X и Y скупови и f релација из X у Y (тј. $f \subset X \times Y$). За релацију f кажемо да је **функција** из X у Y и пишемо $f : X \rightarrow Y$ ако

1. $(\forall x \in X) (\exists y \in Y) (x, y) \in f$;
2. $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2$.

Условом (1) дате дефиниције захтевамо да је функција f дефинисана на целом скупу X , а услов (2) говори да је f једнозначна, тј. да једном елементу $x \in X$ може одговорати само један елемент $y \in Y$.

Ако је $(x, y) \in f$, пишемо $y = f(x)$. Елемент $x \in X$ се зове *оригинал*, док се за елемент $y = f(x)$ користи термин *слика елемента x* или *вредности функције у тачки x* . У случају када x представља произвољан елемент из X кажемо да је x *аргумент* или *независна променљива*, а $y = f(x)$ *зависна променљива*.

Скуп X који пресликавамо зове се **домен** или **област дефинисаности**, а скуп Y се зове **кодомен** функције f . Скуп слика $f(X)$ назива се *скуп вредности* функције f . Скуп слика свих елемената $x \in X$ обележавамо са $f(X)$. Очигледно је да је $f(X) \subseteq Y$.

Промена домена или кодомена функције може знатно променити њене особине. За две функције $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ и $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$, ако је $X_1 \subset X_2$, $Y_1 \subseteq Y_2$ и $f_1(x) = f_2(x)$ за свако $x \in X_1$, кажемо да је f_1 *суужење* или *рестрикција* функције f_2 , а да је f_2 *продужење* или *екстензија* функције f_1 . Специјалан случај $Y_1 = Y_2$, означавамо краће са $f_1 = f_2|_{X_1}$.

Дефиниција 2.2. За функцију $f : X \rightarrow Y$ кажемо да је

1. **инјективна** („1-1“) ако важи $x_1, x_2 \in X \wedge f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$;
2. **сурјективна** („на“) ако важи $(\forall y \in Y) (\exists x \in X) y = f(x)$;
3. **бијективна** ако је инјективна и сурјективна.

Ако је функција $f : X \rightarrow Y$ бијекција, можемо дефинисати нову функцију коју ћемо означавати са f^{-1} и звати **инверзном функцијом** функције f . Инверзна функција сваком елементу $y \in Y$ придружује онај елемент скупа X који се у то y пресликава функцијом f .

Пример 2.1. Квадратна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ није ни инјективна (нпр. $f(-1) = f(1) = 1$) ни сурјективна (не постоји $x \in \mathbb{R}$ такво да је $f(x) = -1$), па самим тим ни бијективна, те не постоји њена инверзна функција. Међутим, рестрикција $f|_{[0, +\infty)} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ јесте бијекција, па инверзна функција $(f|_{[0, +\infty)})^{-1}(x) = \sqrt{x}$ постоји и назива се *кореном функцијом*.

Дефиниција 2.3. Нека су X, Y и Z скупови и $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$. Функција $h : X \rightarrow Z$, дефинисана са $h(x) = g(f(x))$, назива се **сложеном функцијом** или **композицијом** функција f и g и означава се са $h = g \circ f$.

Функција $f : X \rightarrow Y$ може бити описана на више начина, међу којима су најзначајнија три: **таблично**, **аналитички** и **графички**.

Таблични начин: Функцију задајемо коначним скупом уређених парова $(x, f(x))$ приказаних у облику табеле:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$y = f(x)$	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Предност овако описане функције јесте што је то у неким случајевима једини начин задавања функције, док је мана немогућност одређивања вредности функције изван података датих табелом.

Аналитички начин: Функција се задаје формулом, тј. аналитичким изразом који одређује на који начин се сваком $x \in X$ придружује вредност $f(x)$. Разликујемо три основна облика аналитичког задавања:

1. експлицитни облик: $y = f(x)$;
2. имплицитни облик: $f(x, y) = 0$;
3. параметарски облик: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Предност експлицитног и параметарског облика функција је могућност тачног израчунавања вредности функције за било коју вредност аргумента, као и примена формалних математичких метода које омогућавају анализу особина функције. Мана аналитичког задавања лежи у његовој апстрактности, због које се из саме формуле тешко може стећи интуитиван увид у особине функције.

Графички начин: Функција се представља скупом тачака у координатном систему.

Дефиниција 2.4. ([2]) Нека је $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ функција, $X \subseteq \mathbb{R}$. Скуп

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

назива се **график функције** f .

Предност графичког приказа јесте непосредан, визуелни увид у понашање функције, док је мана могућа нетачност приликом читавања вредности са графика.

Ова три начина задавања нису међусобно независна. Прелазак из једног облика у други је могућ, али понекад отежан. Управо однос између аналитичког и графичког начина представљања функције и међусобно допуњавање прецизности првог и очигледности другог представља централну тему овог рада, посебно у контексту решавања једначина и неједначина.

Дефиниција функције дата је за произвољне непразне скупове X и Y . У овом раду ограничавамо се на **реалне функције реалне променљиве**, односно на функције облика $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, где је $X \subseteq \mathbb{R}$. У даљем тексту, осим ако другачије није наведено, под појмом функција подразумеваћемо реалну функцију реалне променљиве.

2.2 Основне особине функција

У овом поглављу детаљније ћемо обрадити неке од основних особина функција које ће нам користити у даљем раду.

Домен функције

Област дефинисаности једне реалне функције $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ може бити било који непразан подскуп $X \subseteq \mathbb{R}$: интервал (a, b) , сегмент $[a, b]$, полусегмент $(a, b]$ и $[a, b)$ или уније било којих од ових скупова, укључујући и изоловане тачке.

У случају када је функција задата аналитичким изразом $f(x)$ под доменом реалне функције f реалне променљиве подразумева се подскуп скупа $\mathbb{R}$ који тај израз допушта, тј. $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ је дефинисано}\}$.

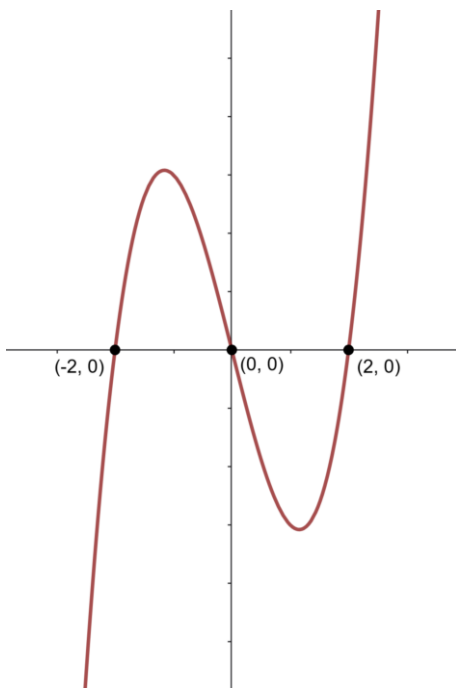
Област дефинисаности функције f обележаваћемо са D_f .

Пример 2.2. Нека су дате функције $f_1(x) = \frac{3x-2}{x^2-9}$, $f_2(x) = \sqrt{8-2x}$ и $f_3(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$. Може се приметити да су домени датих функција $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, $D_{f_2} = (-\infty, 4]$ и $D_{f_3} = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

Нуле функције

Дефиниција 2.5. ([3]) Нека је $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ функција. За реалан број $x_0 \in X$ кажемо да је **нула функције** f ако важи $f(x_0) = 0$.

Одређивање нула функције своди се на решавање једначине $f(x) = 0$. Геометријски, нуле функције представљају апсцисе тачака у којима график функције сече x -осу.



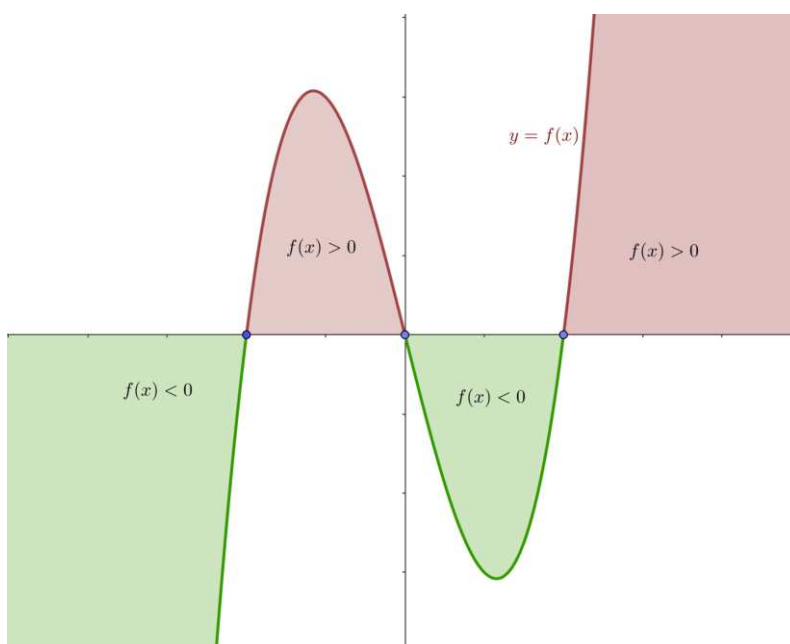
Нуле функције $y = x^3 - 4x$

Знак функције

Дефиниција 2.6. Нека је $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ функција и нека је $x_0 \in X$. Кажемо да је функција f у тачки x_0 :

- **позитивна** ако је $f(x_0) > 0$;
- **негативна** ако је $f(x_0) < 0$;
- **ненегативна** ако је $f(x_0) \geq 0$;
- **непозитивна** ако је $f(x_0) \leq 0$.

Одређивање знака функције своди се на одређивање подскупова домена X на којима је $f(x) > 0$, односно $f(x) < 0$. Геометријски гледано, на интервалима на којима је $f(x) > 0$ график функције налази се изнад x -осе, док се на интервалима на којима је $f(x) < 0$ график налази испод x -осе.



Знак функције $y = x^3 - 4x$

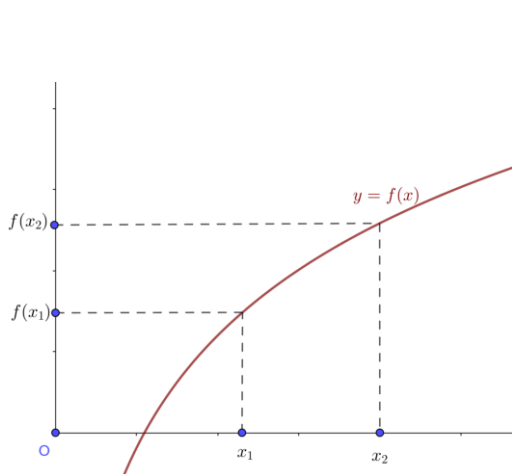
Монотоност

Монотоност функције означава њено својство да јој се са порастом вредности аргумената вредности функције или увек повећавају или увек смањују. Геометријски представљено, ово даје линију која изгледа као узлазна или силазна линија. Функције са овим својством називамо монотоним функцијама.

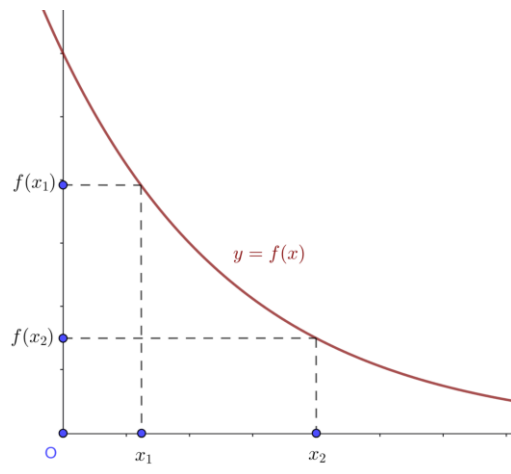
Дефиниција 2.7. ([1]) Нека је $B \subset A \subset \mathbb{R}$. Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ је:

1. **растућа** на B ако $(\forall x_1, x_2 \in B)(x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2))$
2. **строго растућа** на B ако $(\forall x_1, x_2 \in B)(x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$
3. **опадајућа** на B ако $(\forall x_1, x_2 \in B)(x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2))$
4. **строго опадајућа** на B ако $(\forall x_1, x_2 \in B)(x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2))$

За функцију f која задовољава било који од услова (1)-(4) кажемо да је **монотона**, а за функцију која задовољава услов (2) или услов (4) да је **строго монотона**.



Монотono растућа функција



Монотono опадајућа функција

У наставку наводимо тврђења о монотоности функција ослањајући се на [2].

Теорема 2.1. Ако је функција $x \mapsto f(x)$ растућа, строго растућа, опадајућа, строго опадајућа на B , тада је и функција $x \mapsto -f(x)$ редом, опадајућа, строго опадајућа, растућа, строго растућа на B .

Теорема 2.2. Ако су функције $x \mapsto f(x)$ и $x \mapsto g(x)$ растуће на B , тада је и функција $x \mapsto f(x) + g(x)$ растућа на B .

Теорема 2.3. Ако је функција $x \mapsto f(x)$ растућа на B и ако је $\alpha > 0$, тада је и функција $x \mapsto \alpha f(x)$ растућа на B .

Теорема 2.4. Ако су функције $x \mapsto f(x)$ и $x \mapsto g(x)$ ненегативне строго опадајуће на B , тада је и функција $x \mapsto f(x)g(x)$ ненегативна строго опадајућа на B .

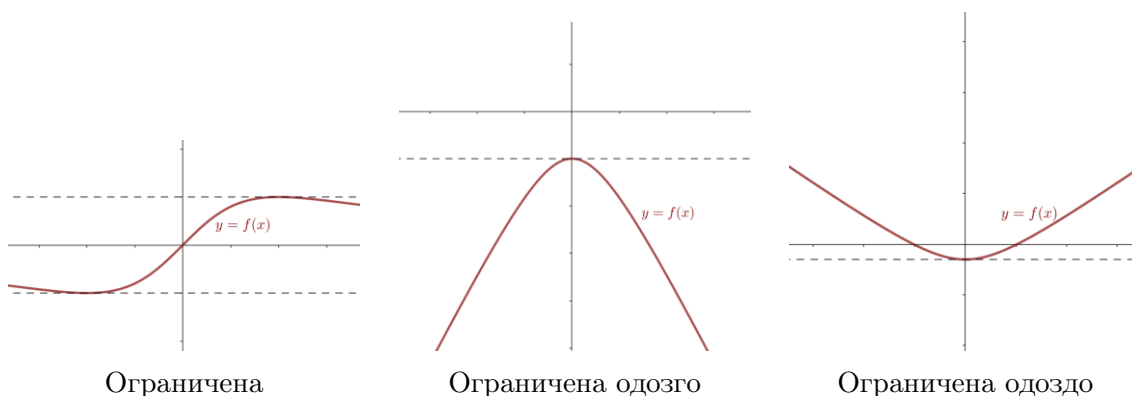
Теорема 2.5. Ако је функција $x \mapsto f(x)$ позитивна и растућа на B , тада је функција $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ опадајућа на B .

Претходна тврђења важе и у одговарајућем дуалном облику, нпр. „растућа” са „опадајућа” и обрнуто.

Теорема 2.6. Нека је $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ строго монотона функција на X . Тада f има инверзну функцију f^{-1} , дефинисану на $Y = f(X)$, која је строго монотона на Y .

Ограниченост

Дефиниција 2.8. ([1]) За функцију $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ кажемо да је ограничена одозго (односно ограничена одоздо, ограничена) на X ако је такав скуп њених вредности $\{f(x) \mid x \in X\}$, тј. ако постоји $M \in \mathbb{R}$, такво да је за све $x \in X$ испуњено $f(x) < M$ (односно $f(x) > M$, $|f(x)| < M$).

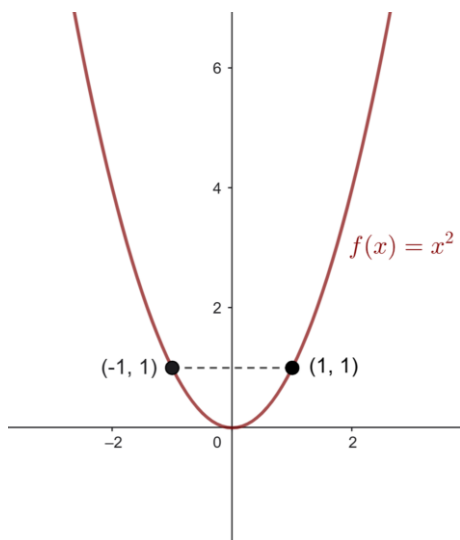


Парност и непарност

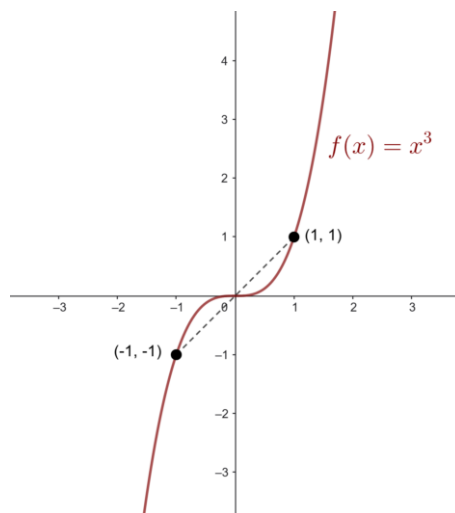
Дефиниција 2.9. ([1]) За скуп $X \subset \mathbb{R}$ кажемо да је симетричан ако за свако $x \in X$ важи $-x \in X$. Функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана на симетричном скупу X је **парна** ако за свако $x \in X$ важи $f(-x) = f(x)$, а **непарна** ако је за свако $x \in X$ испуњено $f(-x) = -f(x)$.

Својство парности, односно непарности функције може се искористити приликом скицања графика. Наиме, како су тачке $A(x, f(x))$ и $B(-x, f(x))$ симетричне у односу на y – осу, закључујемо да је график парне функције симетричан у односу на y – осу координатног система. Исто тако, график непарне функције је симетричан у односу на координатни почетак $O(0, 0)$ јер су тачке $A(x, f(x))$ и $B(-x, -f(x))$ симетричне у односу на тачку $O(0, 0)$.

Пример 2.3. Функције $x^2, \cos x, |x|$ су парне, док су функције $x^3, \sin x, \frac{1}{x}$ непарне. Међутим, највећи број функција нису ни парне ни непарне, као што су $x^2 - x, e^x$.



Парна функција



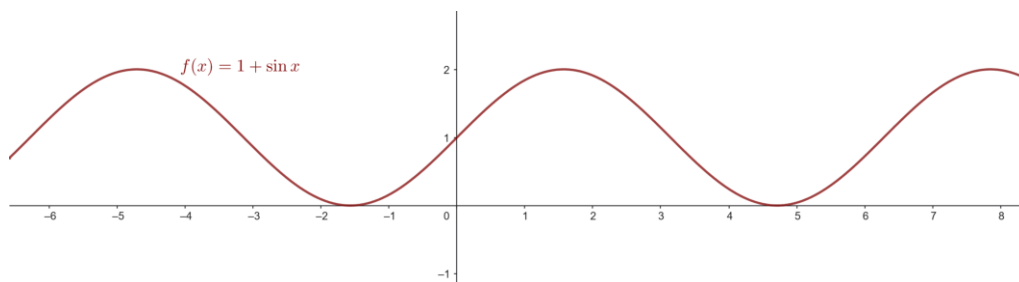
Непарна функција

Периодичност

Дефиниција 2.10. ([2]) Посматрајмо функцију $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Ако постоји позитиван број τ такав да за свако $x \in X$ важи $x + \tau \in X$ и $f(x + \tau) = f(x)$, кажемо да је функција f **периодична** функција, а да је τ њен **период**. Ако је T најмањи од свих таквих бројева τ , кажемо да је T **основни период** периодичне функције f .

Сазнање да је f периодична функција може користити код скицирања њеног графика тако што је довољно скицирати је на сегменту дужине T .

Пример 2.4. Функција $f(x) = 1 + \sin x$ је периодична функција са основним периодом $T = 2\pi$, иакође је и функција $f(x) = \cos 3x$ периодична са основним периодом $T = \frac{2\pi}{3}$. Функције $f(x) = x^2 + 4$ и $f(x) = \ln(3x)$ нису периодичне.



Периодична функција $f(x) = 1 + \sin x$, са периодом $T = 2\pi$

Из дефиниције 2.10 непосредно следе следећа тврђења, преузета из [2]:

Теорема 2.7. *Ако је T период периодичне функције $x \mapsto f(x)$ и $k \in \mathbb{N}$, тада је и kT период функције f .*

Теорема 2.8. *Ако је $\lambda \neq 0$ и $x \mapsto f(x)$ периодична функција са основним периодом T , тада је и функција $x \mapsto f(\lambda x)$ периодична са основним периодом $\frac{T}{|\lambda|}$.*

Асимптоте

Постоје три врсте асимптота функција: вертикалне, хоризонталне и косе.

Вертикалне асимптоте јављају се када имамо прекид у домену, што је неопходан услов, али не и довољан. Права $x = a$ је **вертикална асимптота** ако бар један од лимеса $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ постоји и бесконачан је.

Хоризонталне асимптоте се јављају када се вредност функције приближава некој коначној вредности неограниченим растом или опадањем аргумента, за разлику од вертикалних асимптота. Ако је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ где је b неки коначан број, тада је права $y = b$ лева хоризонтална асимптота. Десна хоризонтална асимптота добија се аналогно, посматрањем понашања функције када $x \rightarrow +\infty$. Ако је $y = b$ и лева и десна хоризонтална асимптота, онда кажемо да је то обострана хоризонтална асимптота.

Уколико функција нема хоризонталну асимптоту у неком смеру, тј. њена вредност неограничено расте или опада, ипак је могуће да се њен график приближава некој правој која није хоризонтална. Таква права назива се **коса асимптота**. Дакле, уколико је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ бесконачан, тада тражимо леву косу асимптоту. Она постоји ако су оба следећа лимеса коначна:

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax),$$

при чему мора бити $a \neq 0$, јер за $a = 0$ добијамо хоризонталну асимптоту. Тада је права $y = ax + b$ лева коса асимптота. Десна коса асимптота добија се аналогно, посматрањем понашања функције када $x \rightarrow +\infty$. Ако се лева и десна коса асимптота поклапају, тј. ако је иста права, кажемо да функција има обострану косу асимптоту.

Пример 2.5. 1. Функција $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ дефинисана је за свако $x \in \mathbb{R}$, па нема вертикалних асимптота. Одредимо асимп-

иоће $y = ax + b$ функције $y = f(x)$. Према наведеним формулама је

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}) = \pm 1,$$

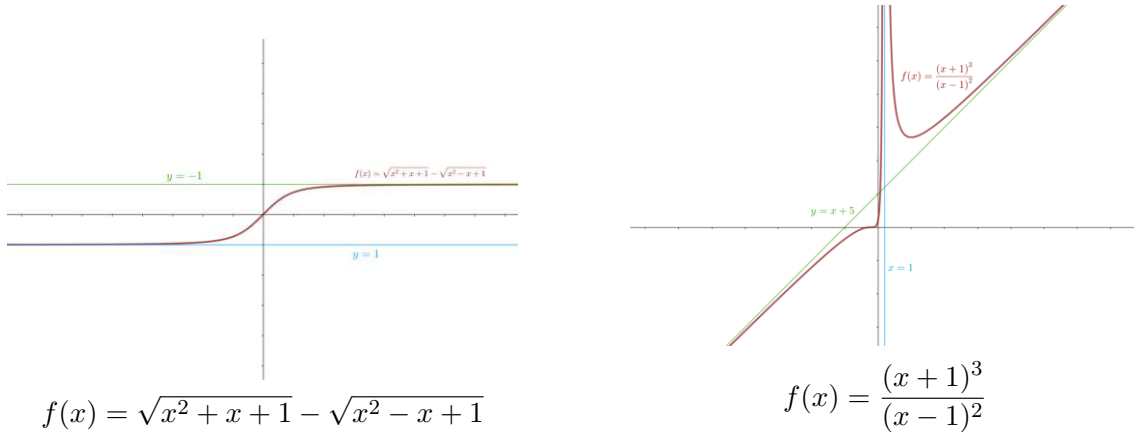
и су хоризонталне асимптоте даје криве $y = 1 (x \rightarrow +\infty)$ и $y = -1 (x \rightarrow -\infty)$.

2. Посматрајмо функцију $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$. Како је $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = +\infty$, права $x = 1$ је вертикална асимптота криве. За косу асимптоту $y = ax + b$ криве $y = f(x)$ имамо

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x \right) = 5.$$

Дакле права $y = x + 5$ је коса асимптота за $x \rightarrow \pm\infty$.



2.3 Елементарне функције

Дефиниција 2.11. ([2]) Под основним елементарним функцијама подразумевају се следеће функције:

1. Константна функција $f(x) = \text{const}$;
2. Степена функција $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

3. Експоненцијална функција $f(x) = a^x$, $a > 0$;
4. Логаритамска функција $f(x) = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$;
5. Тригонометријске функције $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$, $f(x) = \cot x$;
6. Инверзне тригонометријске функције $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \arctan x$, $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$.

Дефиниција 2.12. ([2]) Функције које се добијају коначном применом аритметичких операција и композицијама основних елементарних функција називамо **елементарним функцијама**.

Елементарне функције могу се поделити на алгебарске и трансцендентне. Функција је **алгебарска** ако се може изразити коначном применом основних алгебарских операција над x , односно ако постоји полином $P(x, y)$ такав да важи $P(x, f(x)) = 0$. У ову класу спадају линеарна, квадратна, степена и рационална функција. Функција је **трансцендентна** ако не постоји такав полином, тј. ако се не може представити коначним алгебарским изразом. У ову класу спадају експоненцијална, логаритамска, тригонометријске и инверзне тригонометријске функције. На пример, број $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ добија се граничним процесом, на коме почивају експоненцијална и логаритамска функција, док се функције $\sin x$ и $\cos x$ уводе преко јединичне кружнице. У даљем раду ћемо се бавити елементарним функцијама и њиховим особинама.

Алгебарске функције

Линеарна функција

Линеарна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ је функција облика $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Реалан број a је *коэффициент правца* функције f , док је вредност $|b|$ једнака дужини одсечка на y -оси.

Линеарна функција f :

- има домен $D_f = \mathbb{R}$;
- има нулу функције за $x = -\frac{b}{a}$;
- знак функције зависи од знака a :

- ако је $a > 0$, функција је негативна на $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$, а позитивна на $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$;
- ако је $a < 0$, функција је позитивна на $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$, а негативна на $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$;
- монотоност зависи од знака a : строго је растућа ако је $a > 0$, а строго опадајућа ако је $a < 0$;
- није ограничена;
- није ни парна ни непарна;
- није периодична;
- нема вертикалних ни хоризонталних асимптота, коса асимптота постоји и поклапа се са самом функцијом.

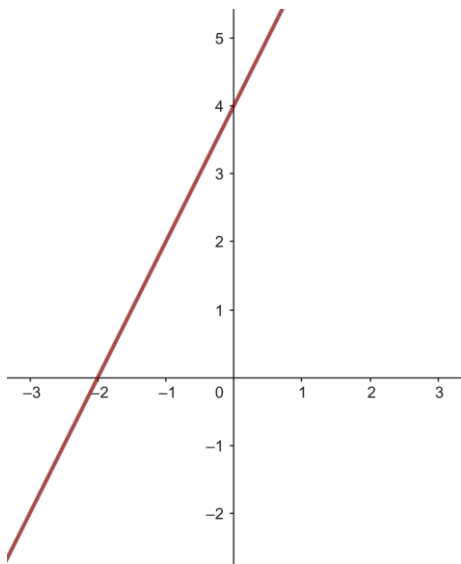


График функције $f(x) = 2x + 4$

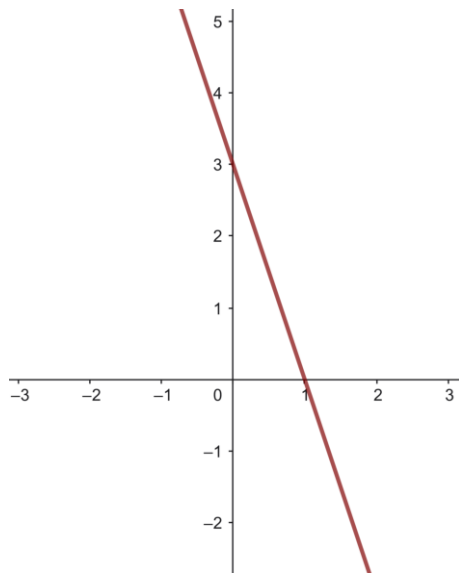


График функције $f(x) = -3x + 3$

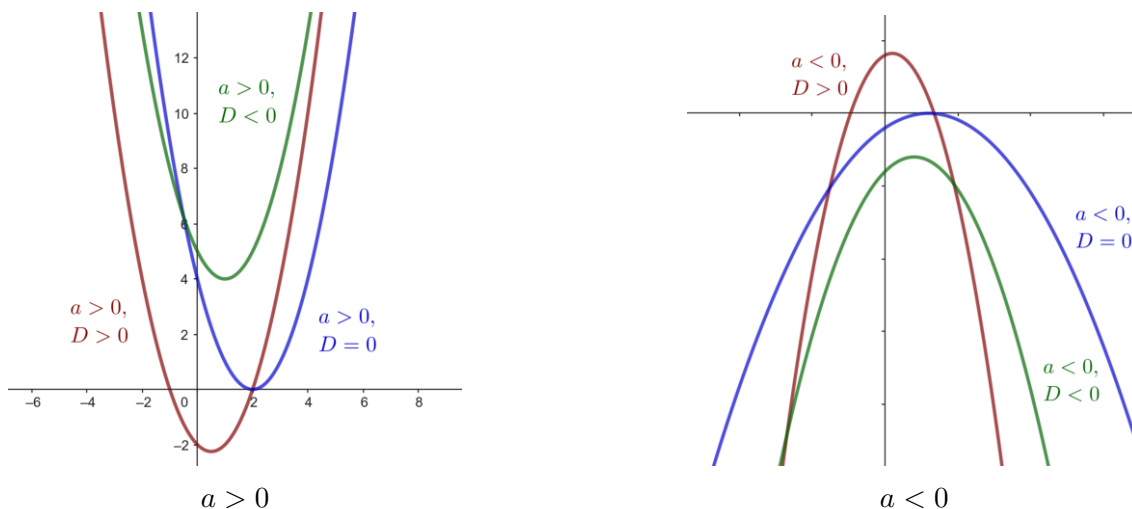
Квадратна функција

Квадратна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ је функција облика $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Крива која представља график квадратне функције назива

се *парабола*. Теме параболе је тачка $T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$, где је $D = b^2 - 4ac$ *дискриминанта*.

Ова функција f :

- има домен $D_f = \mathbb{R}$;
- нуле функције зависе од знака дискриминанте $D = b^2 - 4ac$:
 - $D > 0$: две реалне нуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;
 - $D = 0$: једна (двострука) нула $x = -\frac{b}{2a}$;
 - $D < 0$: нема реалних нула;
- знак функције зависи и од a и од D :
 - ако је $a > 0$ и $D < 0$: функција је позитивна на целом $\mathbb{R}$;
 - ако је $a > 0$ и $D = 0$: функција је ненегативна на целом $\mathbb{R}$;
 - ако је $a > 0$ и $D > 0$: функција је позитивна за $x < x_1$ или $x > x_2$, а негативна за $x_1 < x < x_2$;
 - аналогно, са супротним знацима, за $a < 0$;
- монотоност зависи од знака a :
 - $a > 0$: строго опада на $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, строго расте на $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$;
 - $a < 0$: строго расте на $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, строго опада на $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$;
- ограниченост зависи од знака a :
 - $a > 0$: ограничена одоздо, $f(x) \geq -\frac{D}{4a}$;
 - $a < 0$: ограничена одозго, $f(x) \leq -\frac{D}{4a}$;
- парна је ако и само ако је $b = 0$; у супротном није ни парна ни непарна;
- није периодична;
- нема асимптота.



Степена функција

Степена функција је функција облика $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Понашање ове функције зависи од степена n , па ћемо раздвојити четири случаја.

Случај $n = 2k$ парно и позитивно: Функција $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ облика $f(x) = x^{2k}$:

- има домен $D_f = \mathbb{R}$;
- има нулу функције за $x = 0$;
- је ненегативна на целом домену;
- је строго опадајућа на $(-\infty, 0)$, а строго растућа на $(0, +\infty)$;
- је ограничена одоздо, $f(x) \geq 0$;
- је парна, јер важи $f(-x) = (-x)^{2k} = x^{2k} = f(x)$;
- није периодична;
- нема асимптота.

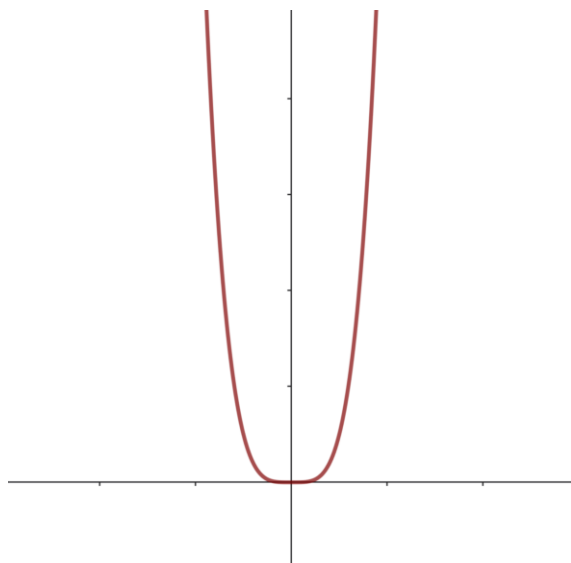


График функције $f(x) = x^4$

Случај $n = 2k + 1$ непарно и позитивно: Функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ облика $f(x) = x^{2k+1}$:

- има домен $D_f = \mathbb{R}$;
- има нулу функције за $x = 0$;
- је позитивна на $(0, +\infty)$, а негативна на $(-\infty, 0)$;
- је строго растућа на целом свом домену;
- није ограничена;
- је непарна, јер важи $f(-x) = (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1} = -f(x)$;
- није периодична;
- нема асимптота.

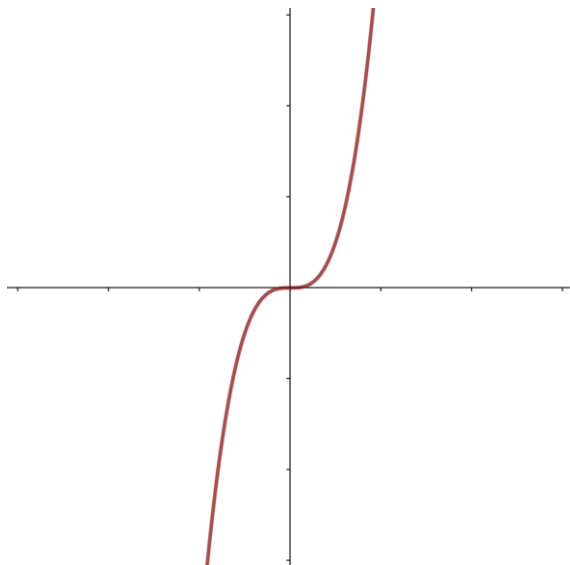


График функције $f(x) = x^3$

Случај $n = -2|k|$ парно и негативно: Функција $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow (0, +\infty)$ облика $f(x) = x^{-2|k|} = \frac{1}{x^{2|k|}}$:

- има домен $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- нема нулу функције;
- је позитивна на целом свом домену;
- је строго растућа на $(-\infty, 0)$, а строго опадајућа на $(0, +\infty)$;
- је ограничена одоздо, $f(x) > 0$;
- је парна, јер важи $f(-x) = (-x)^{-2|k|} = x^{-2|k|} = f(x)$;
- није периодична;
- права $x = 0$ је њена вертикална асимптота, а права $y = 0$ хоризонтална асимптота.

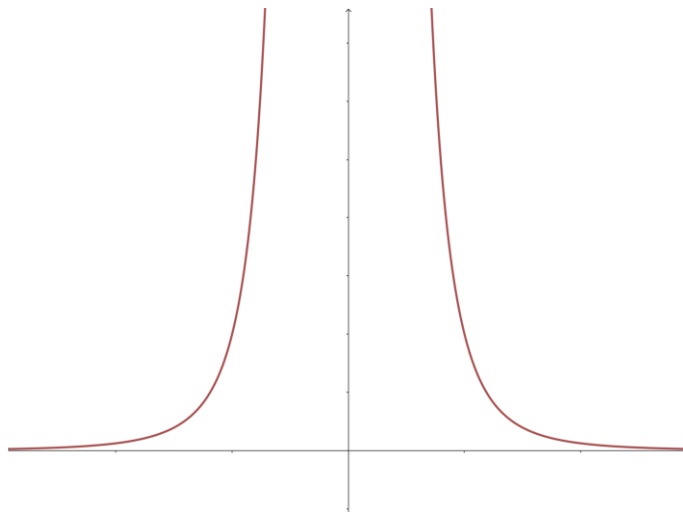


График функције $f(x) = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$

Случај $n = -|2k + 1|$ непарно и негативно: Функција $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ облика $f(x) = x^{-|2k+1|} = \frac{1}{x^{|2k+1|}}$:

- има домен $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- нема нулу функције;
- је позитивна на $(0, +\infty)$, а негативна на $(-\infty, 0)$;
- је строго опадајућа на сваком од интервала $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$;
- није ограничена;
- је непарна, јер важи $f(-x) = (-x)^{-|2k+1|} = -x^{-|2k+1|} = -f(x)$;
- није периодична;
- права $x = 0$ је њена вертикална асимптота, а права $y = 0$ хоризонтална асимптота.

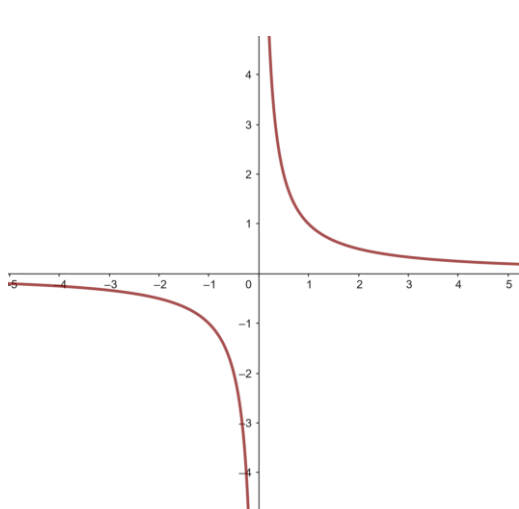


График функције $f(x) = \frac{1}{x}$

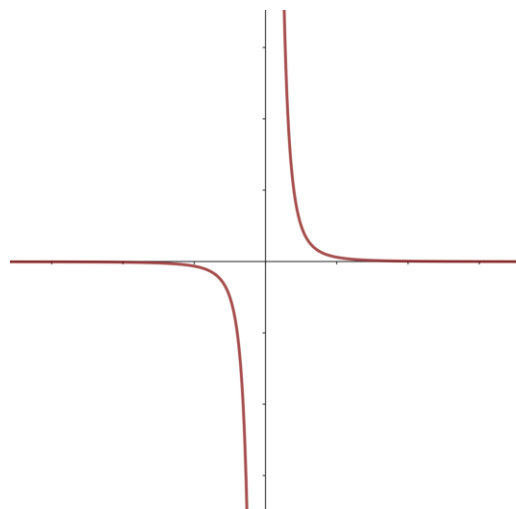


График функције $f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

Корена функција

Корена функција, која се дефинише као инверз степене функције, f је функција облика $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq 2$.

Понашање ове функције зависи од вредности n , па ћемо раздвојити четири случаја.

Случај $n = 2k$ парно и позитивно: Функција $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt[2k]{x}$:

- има домен $D_f = [0, +\infty)$;
- има нулу функције за $x = 0$;
- је ненегативна на целом домену;
- је монотono растућа на целом свом домену;
- је ограничена одоздо, $f(x) \geq 0$;
- није ни парна ни непарна;
- није периодична;
- нема асимптота.

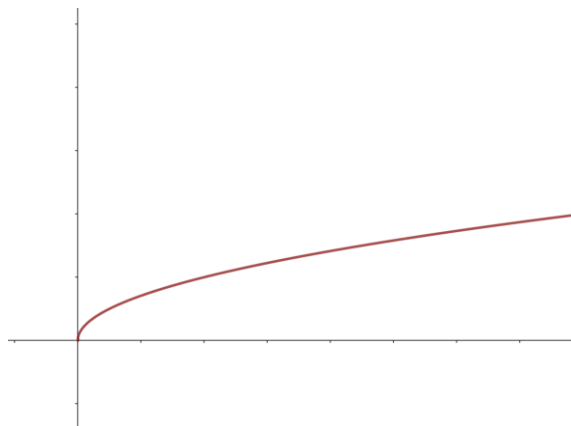


График функције $f(x) = \sqrt{x}$

Случај $n = 2k + 1$ непарно и позитивно: Функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$:

- има домен $D_f = \mathbb{R}$;
- има нулу функције за $x = 0$;
- је позитивна на $(0, +\infty)$, а негативна на $(-\infty, 0)$;
- је монотono растућа на целом свом домену;
- није ограничена;
- је непарна;
- није периодична;
- нема асимптота.

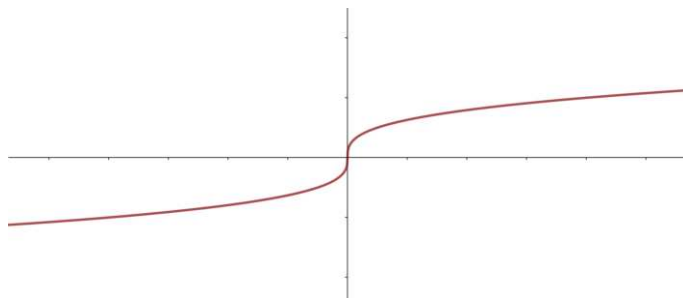


График функције $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Случај $n = -2|k|$ парно и негативно: Функција $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$,
 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[2|k|]{x}}$:

- има домен $D_f = (0, +\infty)$;
- нема нулу функције;
- је позитивна на целом свом домену;
- је строго опадајућа на целом свом домену;
- је ограничена одоздо, $f(x) > 0$;
- није ни парна ни непарна;
- није периодична;
- права $x = 0$ је њена вертикална асимптота, а права $y = 0$ хоризонтална асимптота.

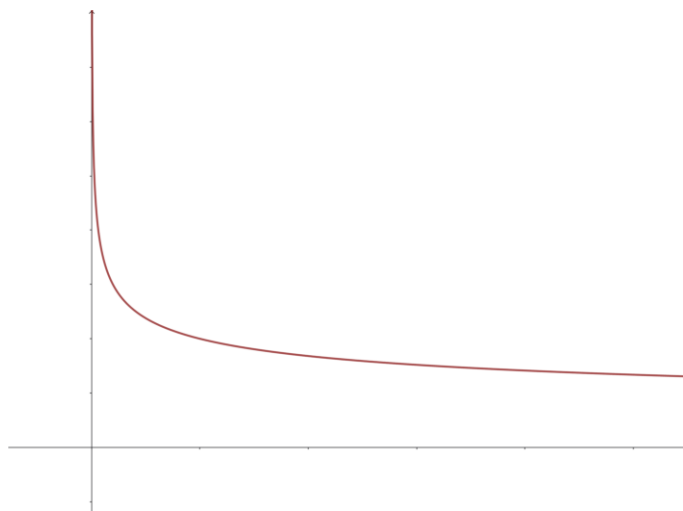


График функције $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

Случај $n = -|2k + 1|$ непарно и негативно: Функција $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $f(x) = \frac{1}{|2k+1|\sqrt{x}}$:

- има домен $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- нема нулу функције;
- је позитивна на $(0, +\infty)$, а негативна на $(-\infty, 0)$;
- је строго опадајућа на сваком од интервала $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$;

- није ограничена;
- је непарна, јер важи $f(-x) = \frac{1}{\sqrt[|2k+1]{-x}} = \frac{1}{-\sqrt[|2k+1]{x}} = -f(x)$;
- није периодична;
- права $x = 0$ је њена вертикална асимптота, а права $y = 0$ хоризонтална асимптота.

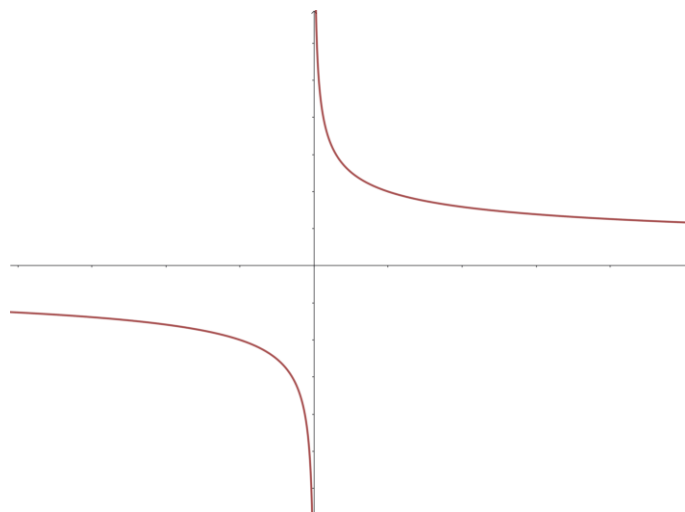


График функције $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Корена функција $f(x) = \sqrt[n]{x}$ представља инверзну функцију степене функције $g(x) = x^n$. Ако је n парно, функција g није бијекција на свом домену, па инверзну функцију можемо дефинисати тек након рестрикције њеног домена на $[0, +\infty)$. Ако је n непарно, функција g је бијекција на целом свом домену $\mathbb{R}$, па њена инверзна функција постоји без икаквог ограничења. Можемо приметити, независно од парности n , да су графици функција f и g међусобно симетрични у односу на праву $y = x$.

Функција апсолутне вредности

Функција апсолутне вредности $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ је функција облика

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ова функција f :

- има домен $D_f = \mathbb{R}$;
- има нулу функције за $x = 0$;
- је ненегативна на целом домену;
- је монотono опадајућа на $(-\infty, 0)$, а монотono растућа на $(0, +\infty)$;
- је ограничена одоздо, $f(x) \geq 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$;
- је парна, јер важи $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$;
- није периодична;
- нема вертикалних ни хоризонталних асимптота, али има косу асимптоту $y = x$ за $x \rightarrow +\infty$ и косу асимптоту $y = -x$ за $x \rightarrow -\infty$.

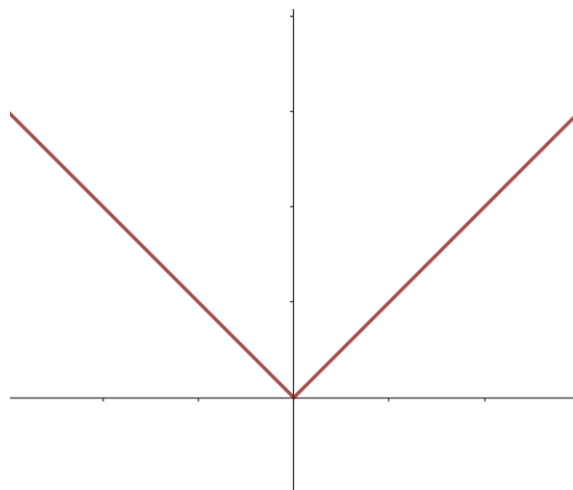


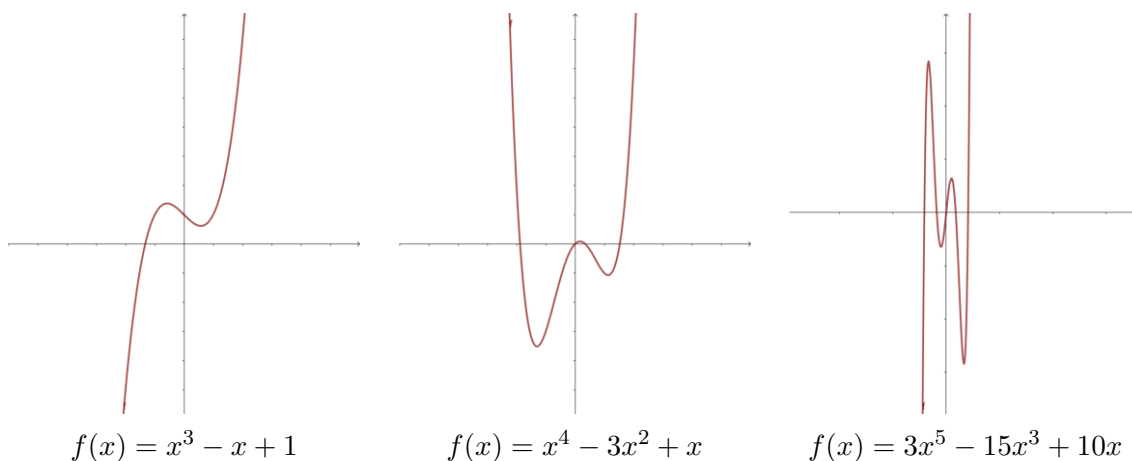
График функције $f(x) = |x|$

Полиномска и рационална функција

Полиномска функција је функција облика $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, где су $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ *коэффицијенти*, а $n \in \mathbb{N}_0$ *степен полинома* (према [3]). Функција f чији је домен $D_f = \mathbb{R}$ представља уопштење линеарне ($n = 1$) и квадратне ($n = 2$) функције које су раније детаљно приказане.

За разлику од линеарне и квадратне функције, општи полином вишег степена може имати више нула, више промена знака и више интервала монотоности у зависности од n и вредности коэффицијената, што захтева детаљну

анализу више случајева. Полиномска функција је парна ако и само ако садржи искључиво парне степене од x , непарна ако и само ако садржи само непарне степене од x , а ако се у полиному налазе и парни и непарни степени од x тада функција није ни парна ни непарна. Оно што важи за све полиномске функције је да нису периодичне за $n \geq 1$, а за полиноме степена $n \geq 2$ и да немају асимптоте.



Рационална функција је функција облика $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где су $P(x)$ и $Q(x)$ полином и $Q(x)$ није нула-полином. Домен рационалне функције је $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}$, тј. скуп свих реалних бројева за које именилац није једнак нули (према [4]).

Рационалне функције представљају уопштење степених функција $f(x) = x^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$), а њихов график може имати и хоризонталну или косу и вертикалну асимптоту истовремено, што смо видели на примеру функције $f(x) = \frac{1}{x}$ (хоризонтална и вертикална) и $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ (коса и вертикална).

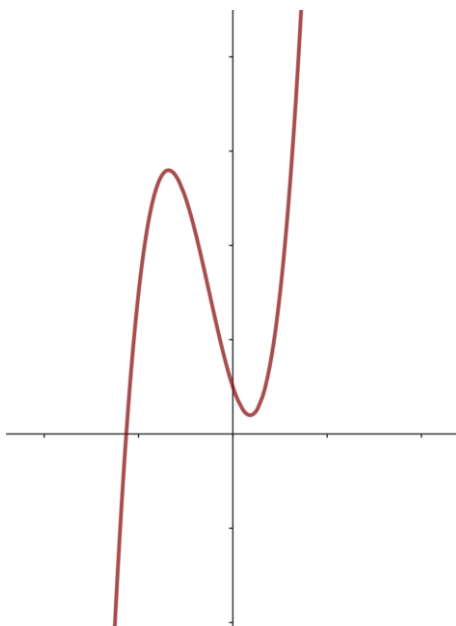


График функције $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$

Трансцендентне функције

Експоненцијална функција

Експоненцијална функција са основом a , $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, је функција облика $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Ова функција f :

- има домен $D_f = \mathbb{R}$;
- нема нуле функције;
- график функције сече y -осу у тачки $(0, 1)$, јер $f(0) = a^0 = 1$;
- је позитивна на $\mathbb{R}$;
- монотоност зависи од основе a :
 - $a > 1$: је строго растућа на $\mathbb{R}$;
 - $0 < a < 1$: је строго опадајућа на $\mathbb{R}$;
- је ограничена одоздо, $f(x) > 0$;
- ни парна ни непарна;

- није периодична;
- нема вертикалне асимптоте јер је дефинисана на целом $\mathbb{R}$ и нема тачке прекида. Приликом испитивања хоризонталних асимптота имамо следеће случајеве:

- $a > 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, па је права $y = 0$ хоризонтална асимптота када $x \rightarrow -\infty$, док при $x \rightarrow +\infty$ функција нема хоризонталну асимптоту;
- $0 < a < 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$, па је права $y = 0$ хоризонтална асимптота када $x \rightarrow +\infty$, док при $x \rightarrow -\infty$ функција нема хоризонталну асимптоту.

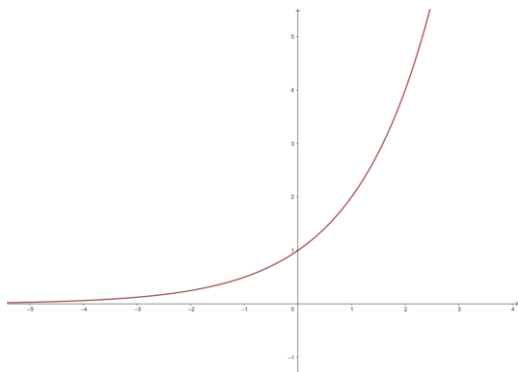


График функције $f(x) = a^x$, $a > 1$

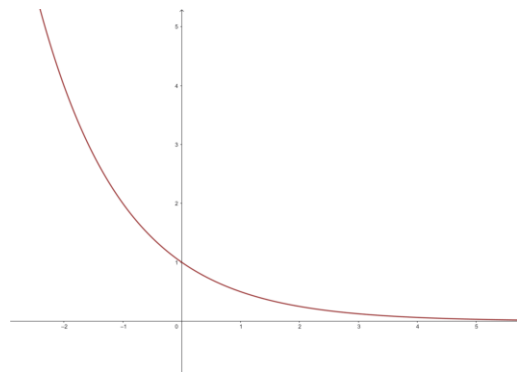


График функције $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$

Како је функција $f(x) = a^x$ строго монотона на целом домену $\mathbb{R}$, према теорему 2.6 она има инверзну функцију дефинисану на $Y = f(X) = (0, +\infty)$, коју називамо *логаритамском функцијом* са основом a и означавамо са $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Специјални случај експоненцијалне функције је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ дефинисана са $f(x) = e^x$, коју називамо **природна експоненцијална** функција. Константа e , позната као Ојлеров број или Неперова константа, је основа природног логаритма и један је од најзначајнијих бројева у савременој математици, чија је приближна вредност $2,71828183\dots$. Свака експоненцијална функција се може записати преко природне експоненцијалне функције уз помоћ израза $a^x = e^{x \ln(a)}$.

Све особине које смо навели за експоненцијалну функцију $f(x) = a^x$ за $a > 1$ важе и за функцију $f(x) = e^x$, јер је $e > 1$, па је реч о специјалном случају већ разматраног.

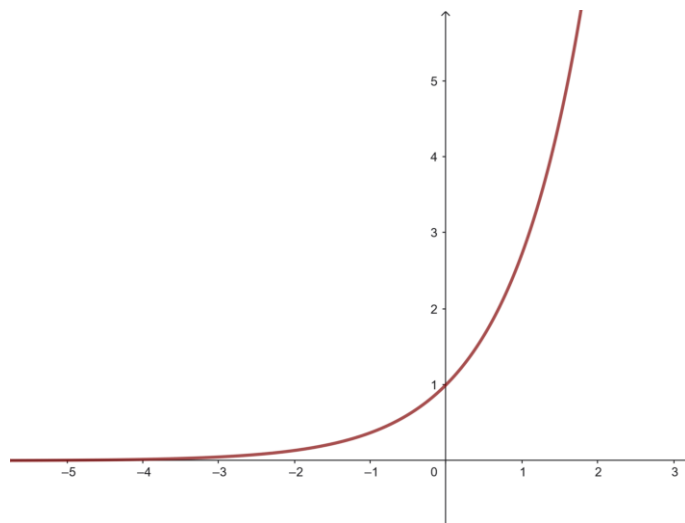


График функције $f(x) = e^x$

Логаритамска функција

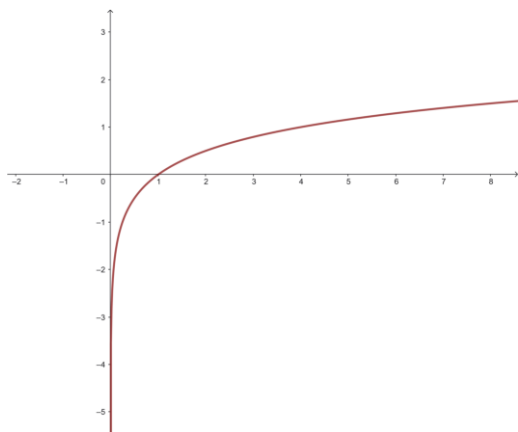
Логаритамска функција са основом a $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ је функција облика $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Ова функција f :

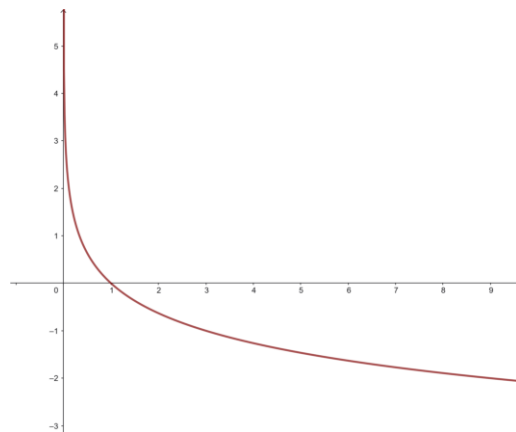
- има домен $D_f = (0, +\infty)$;
- има нулу функције за $x = 1$;
- знак функције зависи од основе a :
 - $a > 1$: позитивна на $(1, +\infty)$, а негативна на $(0, 1)$;
 - $0 < a < 1$: позитивна на $(0, 1)$, а негативна на $(1, +\infty)$;
- – $a > 1$: је строго растућа на свом домену;
- – $0 < a < 1$: је строго опадајућа на свом домену;
- није ограничена;
- ни парна ни непарна;
- није периодична;
- нема хоризонталне асимптоте. Приликом испитивања вертикалних асимптота узимамо случај када $x \rightarrow 0+$, тако да имамо следеће случајеве:

- $a > 1$: $\lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = -\infty$;
- $0 < a < 1$: $\lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = +\infty$;

У оба случаја, права $x = 0$ је вертикална асимптота.



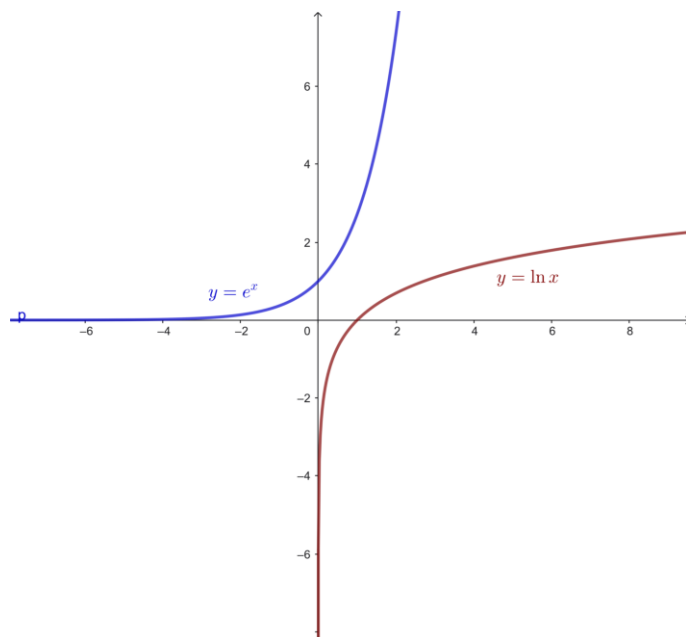
$a > 1$



$0 < a < 1$

График функције $f(x) = \log_a x$

Специјални случај логаритамске функције са основом a је функција природног логаритма, тј. логаритамска функција чија је основа e . **Функција природног логаритма** је $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x) = \log_e x = \ln x$. Ова функција има исте особине као логаритамска функција када је $a > 1$.



Графици функција e^x и $\ln x$

Тригонометријске функције

Синусна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ је функција облика $f(x) = \sin x$.

Ова функција f :

- има домен $D_f = \mathbb{R}$;
- има бесконачно много нула на $\mathbb{R}$, $\sin x = 0$ за свако $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- је позитивна на сваком интервалу облика $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, а негативна на сваком интервалу облика $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- је монотонно растућа на сваком интервалу облика $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, монотонно опадајућа на сваком интервалу облика $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$;
- је ограничена, јер важи $|\sin x| \leq 1$;
- је непарна, $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$;
- је периодична функција са основним периодом $T = 2\pi$;
- нема асимптоте.

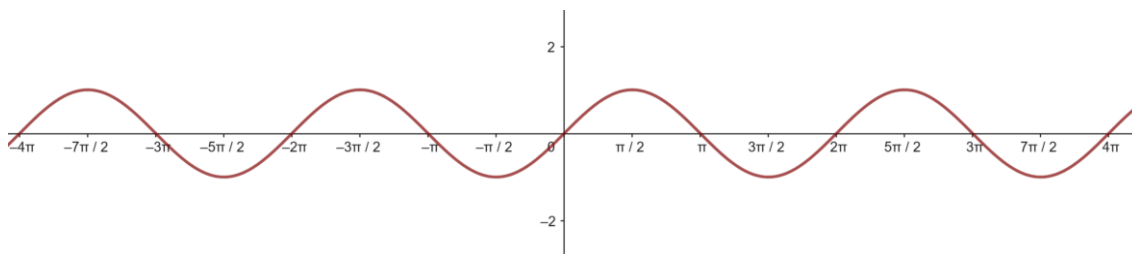


График функције $f(x) = \sin x$

Косинусна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ је функција облика $f(x) = \cos x$.

Ова функција f :

- има домен $D_f = \mathbb{R}$;
- има бесконачно много нула на $\mathbb{R}$, $\cos x = 0$ за свако $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- је позитивна на сваком интервалу облика $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, а негативна на сваком интервалу облика $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

- је монотono растућа на сваком интервалу облика $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, монотono опадајућа на сваком интервалу облика $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$;
- је ограничена, јер важи $|\cos x| \leq 1$;
- је парна, $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$;
- је периодична функција са основним периодом $T = 2\pi$;
- нема асимптоте.

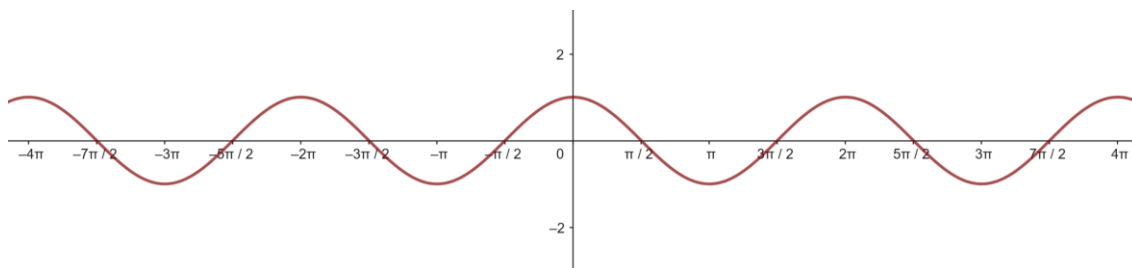


График функције $f(x) = \cos x$

Тангенсна функција $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ је функција облика

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

Ова функција f :

- има домен $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
- има бесконачно много нула на свом домену, $\tan x = 0$ за свако $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- је позитивна на сваком интервалу облика $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, а негативна на сваком интервалу облика $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- је монотono растућа на сваком интервалу облика $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- није ограничена;
- је непарна функција;
- је периодична функција са основним периодом $T = \pi$;

- има бесконачно много вертикалних асимптота, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, јер важи $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^-} \tan x = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^+} \tan x = -\infty$. Нема хоризонталних асимптота.

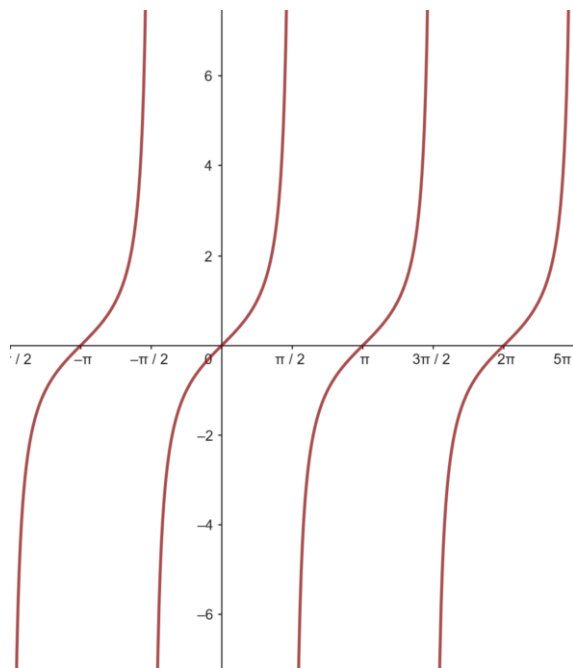


График функције $f(x) = \tan x$

Котангенсна функција $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ је функција облика $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$. Ова функција f :

- има домен $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
- има бесконачно много нула на свом домену, $\cot x = 0$ за свако $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- је позитивна на сваком интервалу облика $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$, а негативна на сваком интервалу облика $(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$;
- је монотono опадајућа на сваком интервалу облика $(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$;
- није ограничена;
- је непарна функција;

- је периодична функција са основним периодом $T = \pi$;
- има бесконачно много вертикалних асимптота, $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, јер важи $\lim_{x \rightarrow (k\pi)^-} \cot x = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow (k\pi)^+} \cot x = +\infty$. Нема хоризонталних асимптота.

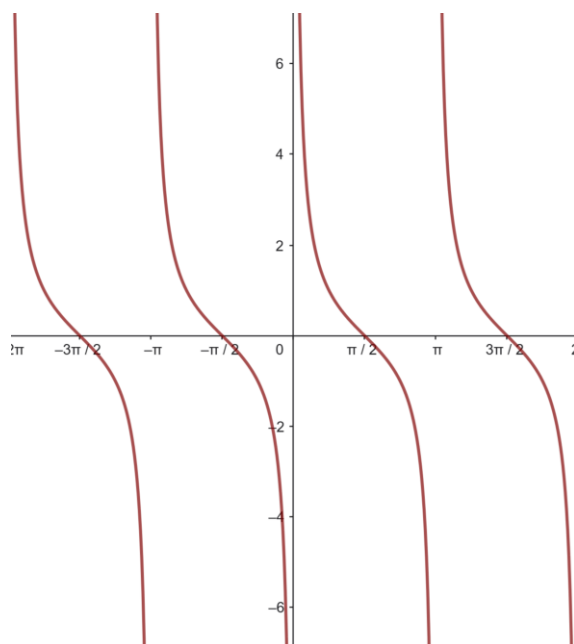


График функције $f(x) = \cot x$

Инверзне тригонометријске функције

У дефиницији 2.2 увели смо појам бијективне функције, а затим смо рекли да, уколико је функција бијекција, можемо дефинисати њену инверзну функцију. Тригонометријске функције нису бијекције, па самим тим не можемо дефинисати њихове инверзне функције. Међутим, ако посматрамо одговарајуће рестрикције домена тригонометријских функција, оне јесу бијекције, па можемо дефинисати њихове инверзне функције.

Аркус синус функција $f : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ је функција облика $f(x) = \arcsin x$.

Ова функција f :

- има домен $D_f = [-1, 1]$;
- има нулу за $x = 0$;
- је позитивна на $(0, 1]$, а негативна на $[-1, 0)$;

- је строго растућа на свом домену;
- је ограничена, јер важи $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$;
- је непарна функција, $f(-x) = \arcsin(-x) = -\arcsin x = -f(x)$;
- није периодична функција;
- нема асимптоте.

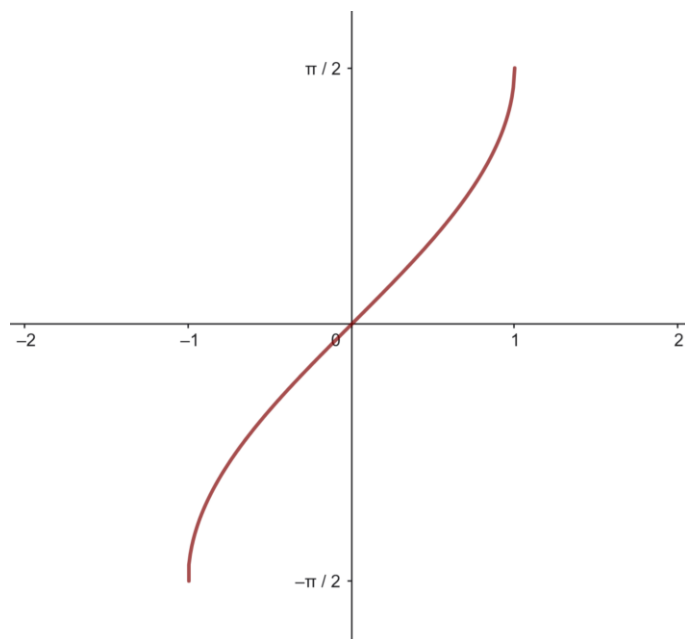


График функције $f(x) = \arcsin x$

Аркус косинус функција $f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ је функција облика $f(x) = \arccos x$.

Ова функција f :

- има домен $D_f = [-1, 1]$;
- има нулу за $x = 1$;
- је ненегативна на D_f ;
- је строго опадајућа на свом домену;
- је ограничена, јер важи $0 \leq \arccos x \leq \pi$;
- ни парна, ни непарна функција;

- није периодична функција;
- нема асимптоте.

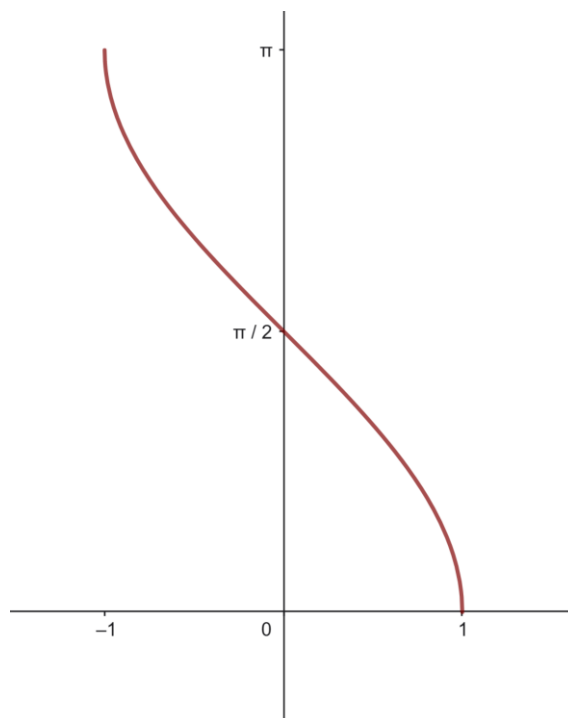


График функције $f(x) = \arccos x$

Аркус тангенс функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ је функција облика $f(x) = \arctan x$.

Ова функција f :

- има домен $D_f = \mathbb{R}$;
- има нулу за $x = 0$;
- је позитивна на $(0, +\infty)$, а негативна на $(-\infty, 0)$;
- је строго растућа на свом домену;
- је ограничена, јер важи $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$;
- је непарна функција;
- није периодична функција;

- нема вертикалне асимптоте, али има две хоризонталне асимптоте $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$.

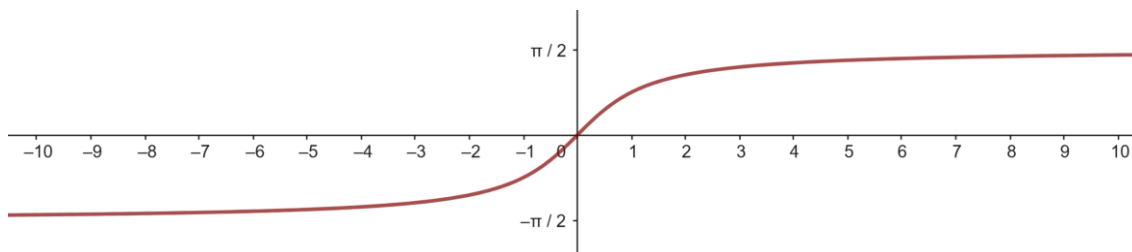


График функције $f(x) = \arctan x$

Аркус котангенс функција $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ је функција облика $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$.

Ова функција f :

- има домен $D_f = \mathbb{R}$;
- нема нуле на свом домену;
- је позитивна на $\mathbb{R}$;
- је монотono опадајућа на свом домену;
- је ограничена, јер важи $0 < \operatorname{arccot}(x) < \pi$;
- није ни парна ни непарна, јер $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot}(x)$;
- није периодична функција;
- нема вертикалне асимптоте, али има две хоризонталне асимптоте $y = 0$ и $y = \pi$.

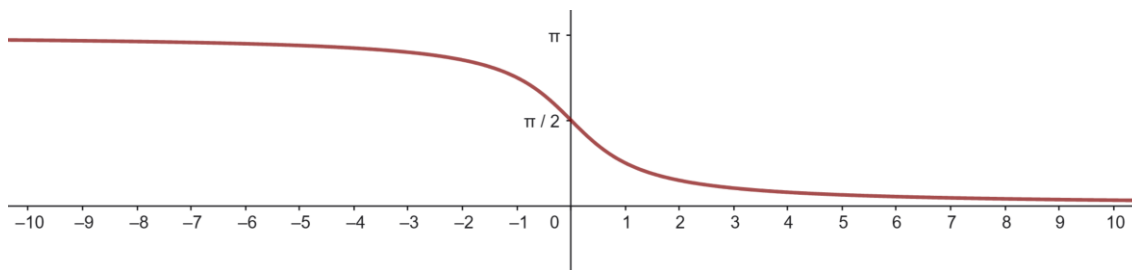


График функције $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$

Глава 3

Геометријске трансформације графика функција

Како смо у претходној глави усвојили основна знања о функцијама и њиховим особинама, навели елементарне функције и описали њихова својства, у овој глави ћемо приказати како параметри у трансформацијама графика утичу на промену графика елементарних функција, као и на особине функција. Под параметром овде подразумевамо вредност коју сабирамо са функцијом или њеним аргументом, односно којом множимо функцију или њен аргумент. Конкретно, размотрићемо транслацију, дилатацију, рефлексiju и трансформацију графика функције применом апсолутне вредности, а на крају главе ћемо показати како ове трансформације утичу на број и природу решења једначина и неједначина.

3.1 Транслација

Транслација је трансформација која помера график функције дуж одређеног правца, не мењајући његов облик. У зависности од тога да ли се померање врши дуж y -осе или дуж x -осе, разликујемо два случаја.

Теорема 3.1. Нека је даџа функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је даџа констанџа $a \in \mathbb{R}$. Тада се график функције $g(x) = f(x) + a$ добија транслацијом графика функције $f(x)$ дуж y -осе за дужину a .

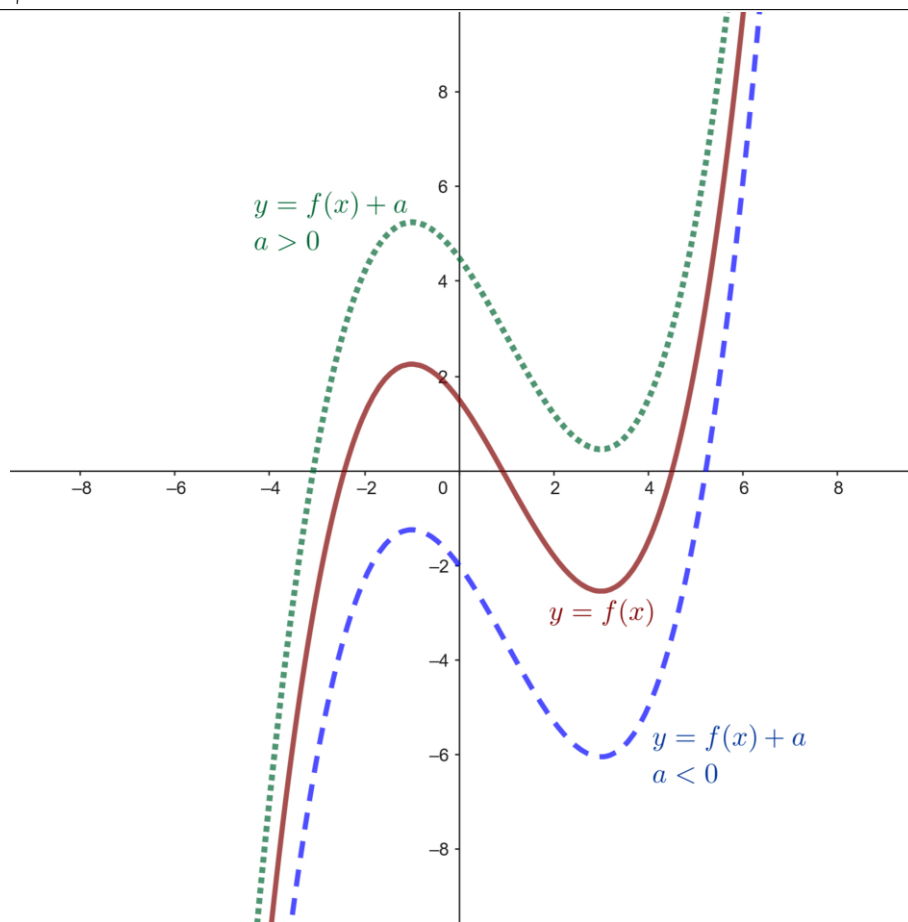
Доказ. Нека је $(x_0, f(x_0))$ произвољна тачка графика функције f . Како је $g(x_0) = f(x_0) + a$ тада важи $(x_0, g(x_0)) = (x_0, f(x_0) + a)$. Дакле, свакој тачки

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

$(x_0, f(x_0))$ графика f одговара тачка $(x_0, f(x_0) + a)$ графика g , добијена померањем тачке дуж y -осе за вредност a . Како ово важи за свако $x_0 \in X$, цео график функције g се добија транслацијом целог графика f дуж y -осе за вредност a . $\square$

Напоменимо да ако је $a > 0$ тада се график помера *навише* дуж y -осе, а ако је $a < 0$ тада се график транслира *наниже*. Сада ћемо испитати како се мењају особине функције $f(x)$ приликом транслације дуж y -осе за вредност a , тј. особине функције $g(x) = f(x) + a$.

- домен функције: остаје непромењен $D_f = D_g$;
- нуле функције: мењају се, нуле функције $g(x)$ добијају се решавањем једначине $f(x) + a = 0$;
- знак функције: како се график функције помера горе или доле дуж y -осе тако се мења и знак функције;
- монотоност: функција $g(x) = f(x) + a$ представља збир растуће/оппадајуће и константне функције, применом теореме 2.2 можемо закључити да се монотоност функције не мења;
- ограниченост: ограниченост функције се чува, док се граница мења. Ако је $f(x) \geq M$ тада важи $g(x) = f(x) + a \geq M + a$. Аналогно у случају ограничености одозго;
- парност: Ако је функција $f(x)$ парна тада је и функција $g(x) = f(x) + a$ парна, јер $g(-x) = f(-x) + a = f(x) + a = g(x)$. Међутим, ако је функција $f(x)$ непарна, то за функцију $g(x) = f(x) + a$ не важи, јер $g(-x) = f(-x) + a = -f(x) + a \neq -g(x) = -f(x) - a$;
- периодичност: остаје иста, са истим периодом T ;
- асимптоте: Вертикалне асимптоте остају непромењене, док се хоризонталне асимптоте транслирају за a , тј. ако је $y = b$ хоризонтална асимптота функције f тада је $y = b + a$ хоризонтална асимптота функције g . Аналогно, ако је $y = mx + b$ коса асимптота функције f , тада је $y = mx + (b + a)$ коса асимптота функције g .



Понашање функције $f(x)$ приликом translације дуж y -осе

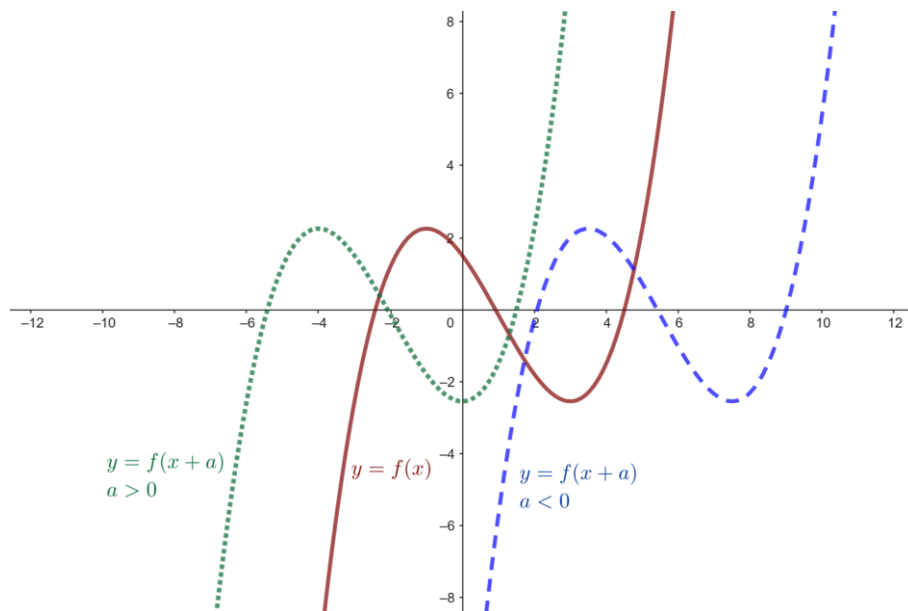
Теорема 3.2. Нека је даџа функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је даџа констанџа $a \in \mathbb{R}$. Тада се график функције $h(x) = f(x + a)$ добија транслацијом графика функције $f(x)$ дуж x -осе за дужину $-a$.

Доказ. Нека је $(x_0, f(x_0))$ произвољна тачка графика функције f . Тражимо тачку графика функције h која има исту ординату $f(x_0)$. Из $h(x) = f(x)$ следи $f(x + a) = f(x_0)$, тј. $x + a = x_0$, одакле је $x = x_0 - a$. Дакле, тачки $(x_0, f(x_0))$ графика f одговара тачка $(x_0 - a, f(x_0))$ графика h , што представља транслацију за $-a$ дуж x -осе. $\square$

Напоменимо да ако је $a > 0$ тада се график помера *улево* дуж x -осе, а ако је $a < 0$ тада се график транслира *удесно*. Испитајмо како се мењају особине функције $f(x)$ приликом translације дуж x -осе за вредност a , тј. особине функције $h(x) = f(x + a)$.

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

- домен функције: помера се за $-a$, ако је $D_f = (c, d)$ онда важи $D_h = (c - a, d - a)$;
- нуле функције: померају се за $-a$, ако је x_0 нула функције f , онда је $x_0 - a$ нула функције h ;
- знак функције: остаје исти по типу, али се интервали померају за $-a$;
- монотоност: остаје иста по типу, али се интервал помера за $-a$;
- ограниченост: остаје непромењена;
- парност: генерално се губи — нпр. функција $f(x) = x^2$ је парна, док за функцију $h(x) = f(x + 1) = (x + 1)^2$ вредности $h(-1) = 0$ и $h(1) = 4$ показују да важи $h(-x) \neq h(x)$, тј. функција h није парна;
- периодичност: остаје иста, са истим периодом T ;
- асимптоте: Вертикалне асимптоте се померају за $-a$ дуж x -осе, док хоризонталне асимптоте остају непромењене. Ако је $y = mx + b$ коса асимптота функције f , тада је $y = mx + (ma + b)$ коса асимптота функције h .



Понашање функције $f(x)$ приликом транслације дуж x -осе

3.2 Рефлексација

Рефлексација је трансформација која график „огледа“ преко неке осе не мењајући облик графика, већ се мења само његов положај у односу на посматрану осу. Размотрићемо четири случаја рефлексације, када се график функције пресликава у односу на y -осу, x -осу, координатни почетак и праву $y = x$.

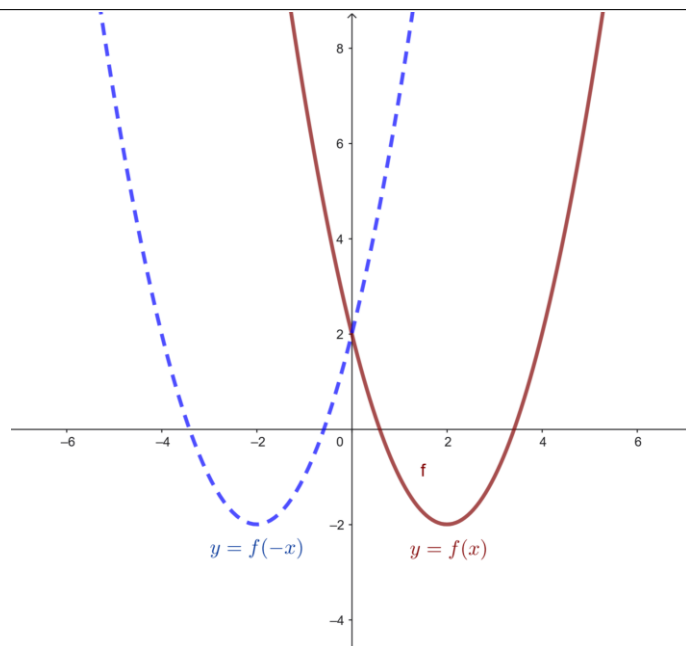
Теорема 3.3. Нека је дајна функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Тада се график функције $g : -X \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(-x)$, добија рефлексацијом графика функције f у односу на y -осу. Скупу $-X$ је дефинисан са $-X := \{-x \mid x \in X\}$.

Доказ. Нека је $(x_0, f(x_0))$ тачка графика функције f . Тражимо тачку графика функције g која има исту ординату $f(x_0)$. Из $g(x) = f(x_0)$ следи $f(-x) = f(x_0)$, тј. $-x = x_0$, одакле је $x = -x_0$. Дакле, тачки $(x_0, f(x_0))$ графика f одговара тачка $(-x_0, f(x_0))$ графика g . Графици f и g су симетрични у односу на y -осу. $\square$

Испитајмо промене особина функције f при рефлексацији, тј. особине функције $g(x) = f(-x)$:

- домен: огледа се око нуле, тј. ако је $D_f = (c, d)$, онда је $D_g = (-d, -c)$;
- нуле: ако је x_0 нула функције f , онда је $-x_0$ нула функције g ;
- знак: директно се наслеђује од функције f . Знак се не мења непосредно, већ се мења само положај интервала на којима се он јавља;
- монотоност: мења се, нпр. ако функција f расте на неком скупу $B \subseteq D_f$, онда функција g опада на скупу $-B$;
- ограниченост: не мења се;
- парност: не мења се;
- периодичност: не мења се;
- асимптоте: ако је $x = a$ вертикална асимптота функције f , тада је $x = -a$ вертикална асимптота функције g . Ако је $y = b$ хоризонтална асимптота функције f када $x \rightarrow +\infty$, тада је $y = b$ хоризонтална асимптота функције g када $x \rightarrow -\infty$ и обротно. Ако је $y = ax + b$ коса асимптота функције f када $x \rightarrow +\infty$, тада је $y = -ax + b$ коса асимптота функције g када $x \rightarrow -\infty$ и обротно.

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА



Понашање функције $f(x)$ приликом рефлексije у односу на y -осу

Теорема 3.4. Нека је даџа функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Тада се график функције $h(x) = -f(x)$ добија рефлексijом графика функције f у односу на x -осу.

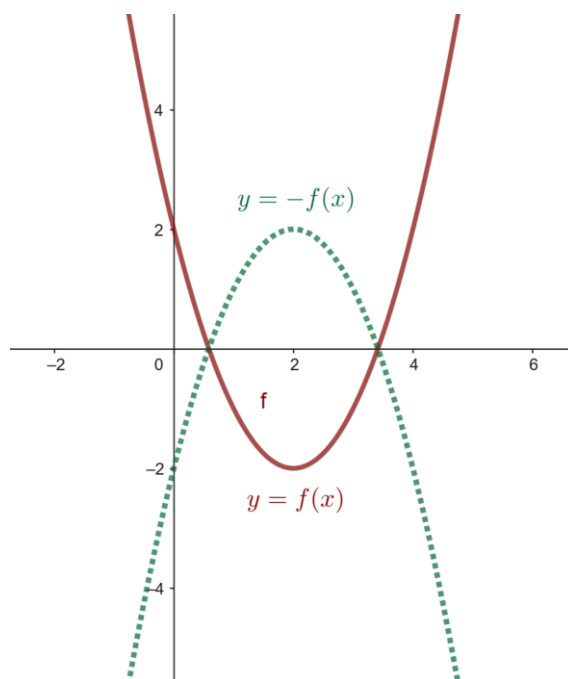
Доказ. Нека је $(x_0, f(x_0))$ произвољна тачка графика функције f . Како је $h(x_0) = -f(x_0)$, тачка $(x_0, h(x_0)) = (x_0, -f(x_0))$ припада графику функције h . Тачке $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0, -f(x_0))$ су симетричне у односу на x -осу. Како ово важи за свако $x_0 \in X$, цео график функције h добија се рефлексijом целог графика функције f у односу на x -осу. $\square$

Испитајмо промене особина функције f при рефлексiji, тј. особине функције $h(x) = -f(x)$:

- домен: остаје непромењен, $D_h = D_f$;
- нуле: остају исте, јер $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow -f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$;
- знак: мења се, тј. где је f позитивна, h је негативна, и обротно;
- монотоност: мења се, ако функција f расте на неком скупу $B \subseteq D_f$, тада према теореме 2.1 функција h опада на скупу B и обрратно;
- ограниченост: границе се замењују међусобно са супротним знаком; ако је $m \leq f(x) \leq M$, онда је $-M \leq h(x) \leq -m$;

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

- парност: не мења се;
- периодичност: ако је функција f периодична, са периодом T , онда је и функција h периодична, са периодом T ;
- асимптоте: хоризонталне асимптоте мењају знак, док се вертикалне асимптоте не мењају. Ако је $y = mx + b$ коса асимптота функције f када $x \rightarrow +\infty$, тада је $y = -mx - b$ коса асимптота функције h када $x \rightarrow +\infty$ (аналогно за $x \rightarrow -\infty$).



Понашање функције $f(x)$ приликом рефлексije у односу на x -осу

Комбинацијом рефлексije у односу на x -осу (теорема 3.4) и рефлексije у односу на y -осу (теорема 3.3) добија се рефлексija кроз координатни почетак.

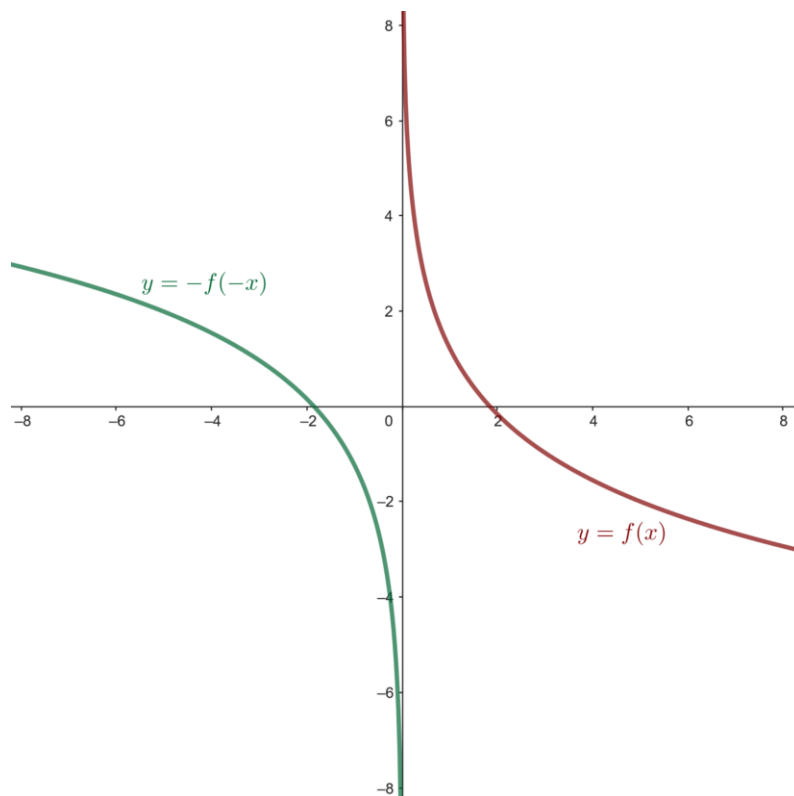
Теорема 3.5. Нека је даџа функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Тада се график функције $g(x) = -f(-x)$ добија централном симетријом графика функције f у односу на координатни почетак.

Доказ. Тврђење директно следи узастопном применом претходне две теореме. Применом рефлексije у односу на y -осу (теорема 3.3) на график функције f добија се график функције $x \mapsto f(-x)$. Затим применом рефлексije у односу

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

на x -осу (теорема 3.4) на тако добијени график добија се график функције $x \mapsto -f(-x)$, тј. управо график функције g .

Проверимо и директно преко произвољне тачке. Нека је $(x_0, f(x_0))$ произвољна тачка графика функције f . Како је $g(x_0) = -f(-x_0)$, тачка $(-x_0, g(-x_0)) = (-x_0, -f(x_0))$ припада графику функције g . Тачке $(x_0, f(x_0))$ и $(-x_0, -f(x_0))$ симетричне су у односу на координатни почетак $O(0, 0)$. Како ово важи за свако $x_0 \in X$, тврђење је доказано за цео график. $\square$



Понашање функције $f(x)$ приликом рефлексije у односу на координатни почетак

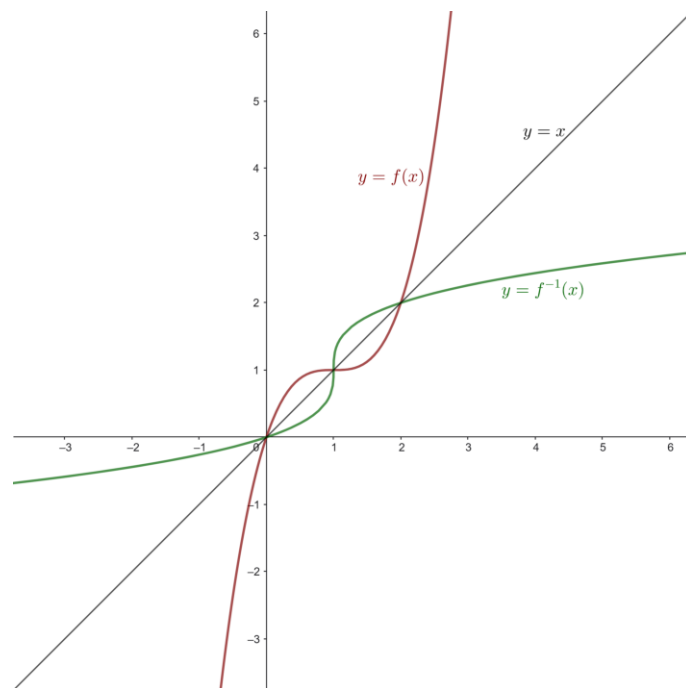
Напоменимо да ако је функција f непарна, тада је $g(x) = -f(-x) = -(-f(x)) = f(x)$ за свако $x \in X$, тј. рефлексija кроз координатни почетак не мења график непарне функције.

Осим рефлексije у односу на координатне осе, посебно важан случај представља рефлексija у односу на праву $y = x$, јер она директно повезује геометријску трансформацију графика са графиком инверзне функције.

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

Теорема 3.6. Нека је $f : X \rightarrow Y$ бијекција. Тада се график инверзне функције $f^{-1} : Y \rightarrow X$ добија рефлексijом графика функције f у односу на праву $y = x$.

Доказ. Нека је (a, b) произвољна тачка графика функције f , тј. $b = f(a)$. Пошто је f бијекција, постоји инверзна функција f^{-1} , за коју важи $f^{-1}(b) = a$. Дакле, тачка (b, a) припада графику функције f^{-1} . Тачке (a, b) и (b, a) су симетричне у односу на праву $y = x$. Како ово важи за сваку тачку (a, b) , график функције f^{-1} добија се рефлексijом графика функције f у односу на праву $y = x$. $\square$



Понашање функције $f(x)$ приликом рефлексije у односу на праву $y = x$

3.3 Дилатација

Поред транслагације и рефлексije график функције можемо трансформисати и дилатацијом.

Дефиниција 3.1. Дилатација дуж y -осе у размери $k : 1$ ($k > 0$) је трансформација која сваку тачку (x, y) равни преводи у тачку (x, ky) .

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

Дилатација је трансформација која мења „величину“ графика дуж једне од оса, растежући га или сажимајући у одређеној размери. За разлику од translације и рефлексije, које мењају положај графика, дилатација мења сам облик графика.

Теорема 3.7. Нека је даџа функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ фиксна констанџа. Тада се ѓрафик функције $g(x) = a \cdot f(x)$ добија из ѓрафика функције f на следећи начин:

- ако је $a > 0$ дилаџацијом дуж y -осе у размери $a : 1$ – исџезањем ако је $a > 1$, сажимањем ако је $0 < a < 1$;
- ако је $a < 0$ дилаџацијом дуж y -осе у размери $|a| : 1$, ѓраћеном рефлексијом у односу на x -осу.

Доказ. Нека је $(x_0, f(x_0))$ произвољна тачка графика функције f . Тада графику функције g одговара тачка $(x_0, a \cdot f(x_0))$.

Ако је $a > 0$, тачка $(x_0, f(x_0))$ преводи се у тачку $(x_0, a \cdot f(x_0))$, што је, по дефиниџи, управо дилатација дуж y -осе у размери $a : 1$.

Ако је $a < 0$, пишемо $a = -|a|$, па је $g(x_0) = -|a| \cdot f(x_0)$. Ово тврђење доказујемо као композиџију две већ доказане трансформације: прво применом дилатације дуж y -осе у размери $|a| : 1$, где се тачка $(x_0, f(x_0))$ преводи у тачку $(x_0, |a| \cdot f(x_0))$, а затим применом рефлексije у односу на x -осу (теорема 3.4), па добијамо тачку $(x_0, -|a| \cdot f(x_0)) = (x_0, a \cdot f(x_0))$.

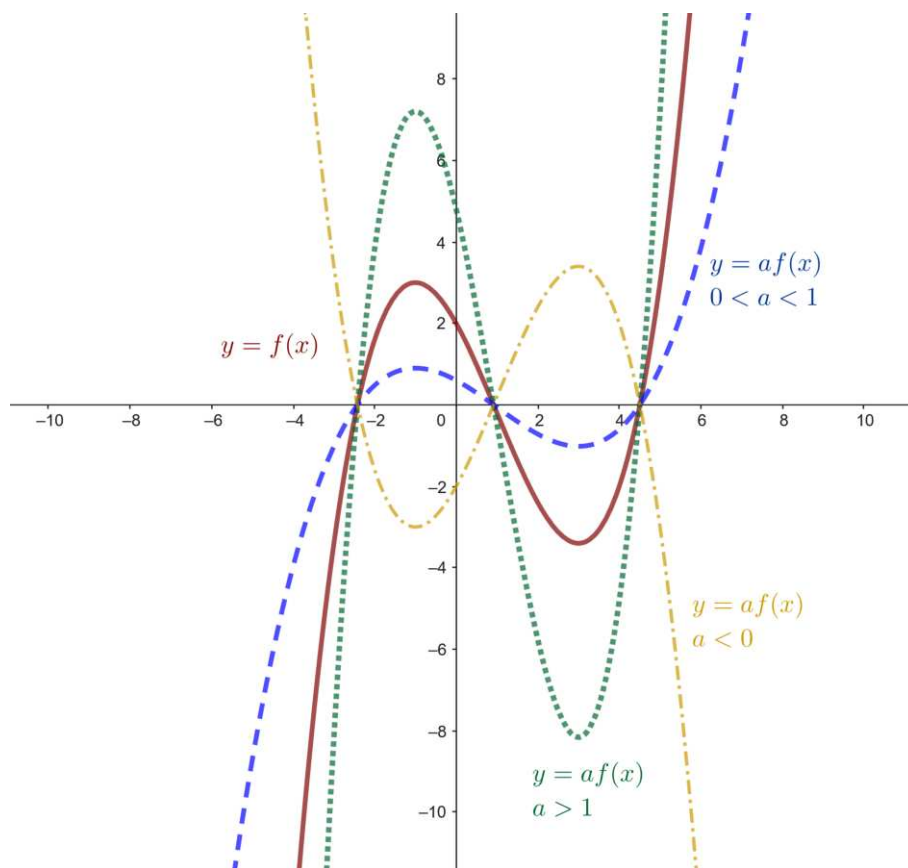
Како ово важи за свако $x_0 \in X$, тврђење је доказано за цео график. $\square$

Испитаћемо како ова трансформација утиче на особине графика:

- домен: остаје непромењен, $D_g = D_f$;
- нуле: остају исте, јер $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow a \cdot f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$;
- знак: остаје исти ако је $a > 0$, а ако је $a < 0$ мења се;
- монотоност: чува се ако је $a > 0$ (теорема 2.3), док се за $a < 0$ мења (теорема 2.3, теорема 3.4);
- ограниченост: чува се, а граница се множи са $|a|$, ако је $|f(x)| \leq M$, онда је $|g(x)| \leq |a|M$;

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

- парност: ако је f парна, тада је и g парна, јер $g(-x) = a \cdot f(-x) = a \cdot f(x) = g(x)$; ако је f непарна, тада је и g непарна, јер $g(-x) = a \cdot f(-x) = a \cdot (-f(x)) = -g(x)$;
- периодичност: чува се;
- асимптоте: вертикалне асимптоте остају непромењене. Хоризонталне и косе асимптоте се мењају на следећи начин:
 - ако је $y = b$ хоризонтална асимптота функције f , онда је $y = ab$ хоризонтална асимптота функције g ; специјално, за $a < 0$ асимптота мења и знак;
 - ако је $y = mx + b$ коса асимптота функције f када $x \rightarrow +\infty$, тада је $y = amx + ab$ коса асимптота функције g када $x \rightarrow +\infty$ (аналогно за $x \rightarrow -\infty$).



Понашање функције $f(x)$ приликом дилатације дуж y -осе

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

Дефиниција 3.2. Дилатација дуж x -осе у размери $1 : k$ ($k > 0$) је трансформација која сваку тачку (x, y) равни преводи у тачку $\left(\frac{x}{k}, y\right)$.

Теорема 3.8. Нека је даџа функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ фиксна константа. Тада се трафик функције $h(x) = f(ax)$ добија из трафика функције f на следећи начин:

- ако је $a > 0$, дилатацијом дуж x -осе у размери $1 : a$ – сажимањем ако је $a > 1$, истезањем ако је $0 < a < 1$;
- ако је $a < 0$, дилатацијом дуж x -осе у размери $1 : |a|$, праћеном рефлексијом у односу на y -осу.

Доказ. Нека је $(x_0, f(x_0))$ произвољна тачка графика функције f . Како је $h\left(\frac{x_0}{a}\right) = f\left(a \cdot \frac{x_0}{a}\right) = f(x_0)$, тачка $\left(\frac{x_0}{a}, f(x_0)\right)$ припада графику функције h .

Ако је $a > 0$, тачка $(x_0, f(x_0))$ графика f преводи се у тачку $\left(\frac{x_0}{a}, f(x_0)\right)$, што је, по дефиницији, управо дилатација дуж x -осе у размери $1 : a$.

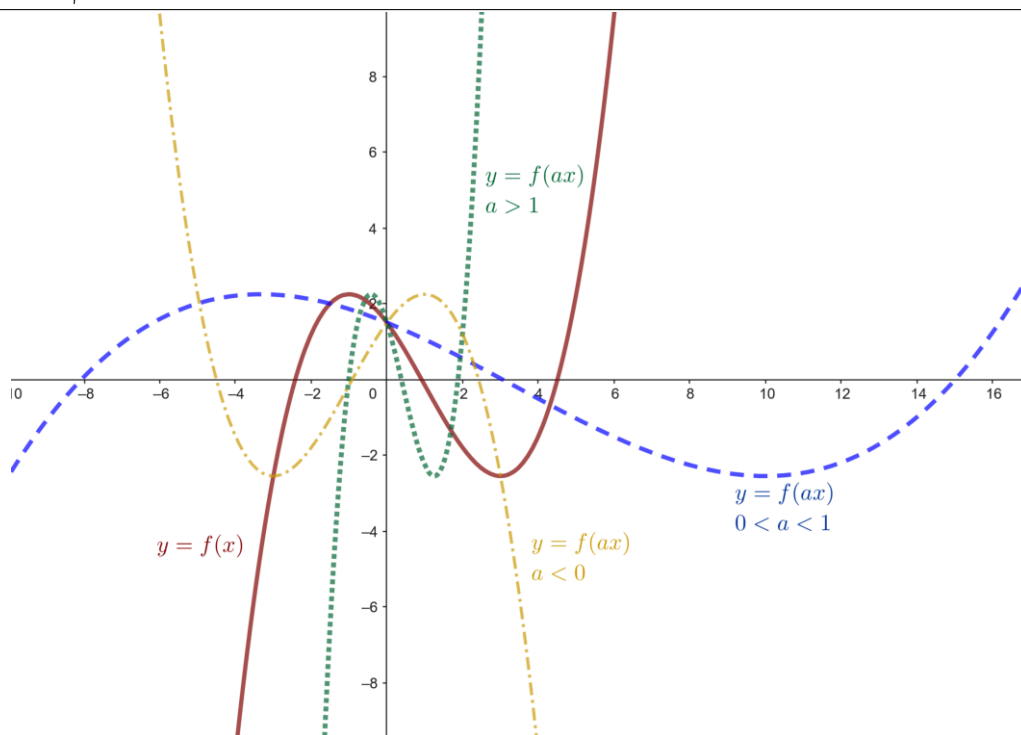
Ако је $a < 0$, пишемо $a = -|a|$, па је $\frac{x_0}{a} = -\frac{x_0}{|a|}$. Тврђење тада доказујемо као композицију две већ доказане трансформације: прво применом дилатације дуж x -осе у размери $1 : |a|$, где се x_0 преводи у $\frac{x_0}{|a|}$, а затим применом рефлексије у односу на y -осу (теорема 3.3), којом $\frac{x_0}{|a|}$ прелази у $-\frac{x_0}{|a|} = \frac{x_0}{a}$.

Како ово важи за свако $x_0 \in X$, тврђење је доказано за цео график. $\square$

Испитајмо како се мењају особине приликом дилатације дуж x -осе:

- домен: мења се, ако је $D_f = (c, d)$, онда је $D_h = \left(\frac{c}{a}, \frac{d}{a}\right)$ за $a > 0$, а интервал се додатно обрће за $a < 0$;
- нуле: ако је x_0 нула функције f , онда је $\frac{x_0}{a}$ нула функције h ;
- знак: остаје исти по типу, независно од знака a . Знак функције h у тачки x једнак је знаку функције f у тачки ax . Параметар a само помера или огледа положај интервала на којима се јавља позитивност, односно негативност, али не мења сам тип знака;
- монотоност: тип монотоности се чува ако је $a > 0$ (мења се дужина и положај интервала); мења се ако је $a < 0$;

- ограниченост: потпуно се чува, укључујући и саме вредности граница;
- парност: ако је f парна, тада је и h парна, јер $h(-x) = f(-ax) = f(ax) = h(x)$, а ако је f непарна, тада је и h непарна, јер $h(-x) = f(-ax) = -f(ax) = -h(x)$;
- периодичност: период се дели са $|a|$; ако је T основни период функције f , онда је $\frac{T}{|a|}$ основни период функције h (теорема 2.8);
- асимптоте: вертикалне асимптоте се деле са a — ако је $x = c$ вертикална асимптота функције f , онда је $x = \frac{c}{a}$ вертикална асимптота функције h .
За хоризонталне и косе асимптоте важи:
 - ако је $a > 0$, хоризонталне асимптоте се не мењају;
 - ако је $a < 0$ и $y = b$ хоризонтална асимптота функције f када $x \rightarrow -\infty$, тада је $y = b$ хоризонтална асимптота функције h када $x \rightarrow +\infty$ (аналогно, асимптота при $x \rightarrow +\infty$ функције f прелази у асимптоту функције h при $x \rightarrow -\infty$);
 - ако је $a > 0$ и $y = mx + b$ коса асимптота функције f када $x \rightarrow +\infty$, тада је $y = amx + b$ коса асимптота функције h када $x \rightarrow +\infty$ (аналогно за $x \rightarrow -\infty$);
 - ако је $a < 0$ и $y = mx + b$ коса асимптота функције f када $x \rightarrow -\infty$ (односно $x \rightarrow +\infty$), тада је $y = amx + b$ коса асимптота функције h када $x \rightarrow +\infty$ (односно $x \rightarrow -\infty$).



Понашање функције $f(x)$ приликом дилатације дуж x -осе

3.4 Трансформација са апсолутном вредношћу

Поред транслације, рефлексije и дилатације, график функције можемо трансформисати и применом **апсолутне вредности** на самој функцији или на њеном аргументу. За разлику од претходних трансформација, ове две трансформације делују различито на различитим деловима домена, па се график не добија једном, јединственом операцијом над целим графиком, већ комбинацијом операција које зависе од знака функције или аргумента.

Теорема 3.9. Нека је дајта функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Тада се график функције $g(x) = |f(x)|$ њоклаја са графиком функције f на скууу на коме је $f(x) \geq 0$, док се на скууу на коме је $f(x) < 0$ график функције g добија рефлексijом огђоварајућеј дела графика функције f у односу на x -осу.

Доказ. Нека је $x_0 \in X$ произвољно. Разликујемо два случаја:

1. Ако је $f(x_0) \geq 0$, тада је $|f(x_0)| = f(x_0)$, па је $g(x_0) = f(x_0)$.

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

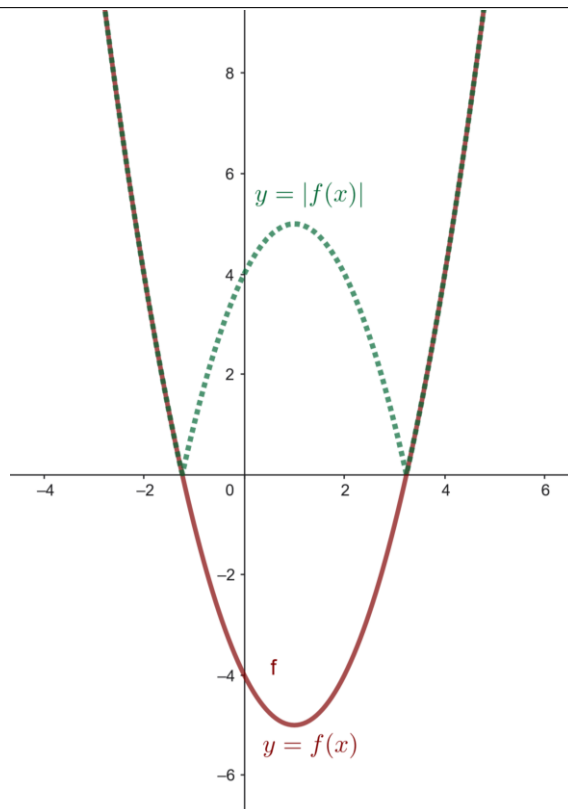
2. Ако је $f(x_0) < 0$, тада је $|f(x_0)| = -f(x_0)$, па је $g(x_0) = -f(x_0)$.

Како важи за свако $x_0 \in X$, график функције g поклапа се са графиком f тамо где је f ненегативна, а добија се рефлексijом у односу на x -осу тамо где је f негативна. $\square$

Из теореме непосредно следи да је $g(x) = |f(x)| \geq 0$ за свако $x \in X$, тј. график функције g се у целисти налази изнад или на x -оси.

Испитајмо промене особина функције при трансформацији апсолутне вредности:

- домен: остаје непромењен, $D_g = D_f$;
- нуле: остају непромењене, јер $|f(x_0)| = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$;
- знак: увек ненегативна;
- монотоност: не чува се у општем случају;
- ограниченост: функција g увек је ограничена одоздо, јер је $g(x) \geq 0$. Ако је f ограничена, тада је и g ограничена, при чему важи $|g(x)| \leq M$ кад год је $|f(x)| \leq M$;
- парност: чува се, важи $|f(-x)| = |f(x)|$ ако је f парна, а $|f(-x)| = |-f(x)| = |f(x)|$ ако је f непарна;
- периодичност: чува се, исти период T ;
- асимптоте: вертикалне асимптоте се не мењају. Хоризонталне асимптоте прелазе у своју апсолутну вредност, тј. ако је $y = b$ хоризонтална асимптота функције f (када $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow -\infty$), тада је $y = |b|$ хоризонтална асимптота функције g у истом смеру. За косе асимптоте важи:
 - за $x \rightarrow +\infty$: ако је $y = mx + b$ коса асимптота функције f када $x \rightarrow +\infty$, тада функција g има косу асимптоту $y = mx + b$ ако је $m > 0$, односно $y = -mx - b$ ако је $m < 0$;
 - за $x \rightarrow -\infty$: ако је $y = mx + b$ коса асимптота функције f када $x \rightarrow -\infty$, тада функција g има косу асимптоту $y = mx + b$ ако је $m < 0$, односно $y = -mx - b$ ако је $m > 0$.



Понашање функције $y = f(x)$ приликом трансформације апсолутном вредношћу

Теорема 3.10. Нека је дата функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, где је X симетричан скуп у односу на нулу. Тада се график функције $h(x) = f(|x|)$ на скупу $X \cap [0, +\infty)$ поклапа са графиком функције f , док се на скупу $X \cap (-\infty, 0)$ добија рефлексијом дела графика функције f за $x \geq 0$ у односу на y -осу.

Доказ. Нека је $x_0 \in X$ произвољно. Разликујемо два случаја:

1. Ако је $x_0 \geq 0$, тада је $|x_0| = x_0$, па је $h(x_0) = f(x_0)$ — тачка $(x_0, f(x_0))$ графика функције f остаје непромењена на графику функције h ;
2. Ако је $x_0 < 0$, тада је $|x_0| = -x_0$, па је $h(x_0) = f(-x_0)$ — тачка $(x_0, h(x_0)) = (x_0, f(-x_0))$ графика функције h има исту ординату као тачка $(-x_0, f(-x_0))$ графика функције f , при чему су x_0 и $-x_0$ симетрични у односу на y -осу.

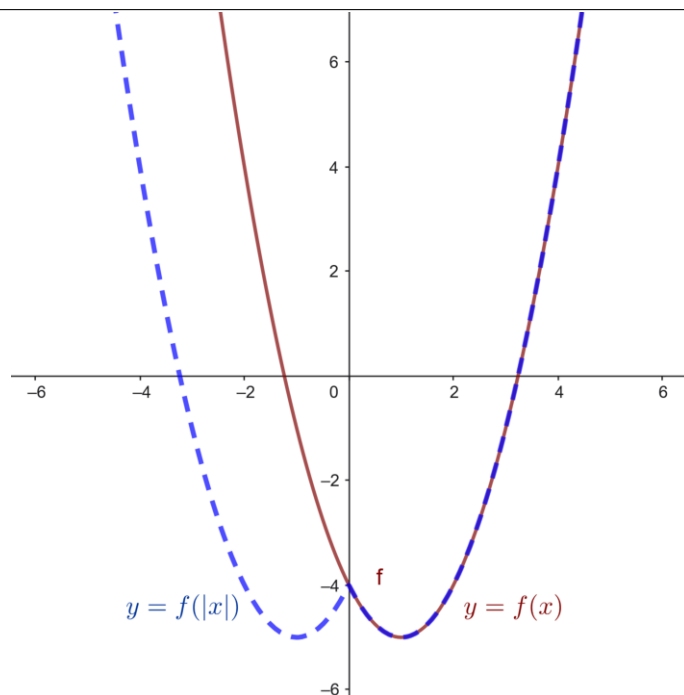
Како ово важи за свако $x_0 \in X$, тврђење је доказано за цео график. $\square$

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

Из теореме непосредно следи да је функција $h(x) = f(|x|)$ увек парна: $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$ за свако $x \in X$, без обзира на то да ли је полазна функција f била парна, непарна, или ни једно ни друго.

Испитајмо промене особина функције при трансформацији апсолутном вредношћу примењеном на аргумент функције:

- домен: увек постаје симетричан скуп, тј. $D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \in D_f\}$;
- нуле: функција h има нулу у тачки $x_0 \geq 0$ ако и само ако је x_0 нула функције f ; свакој таквој нули одговара и нула у тачки $-x_0$, услед симетрије графика;
- знак: знак функције h у тачки x једнак је знаку функције f у тачки $|x|$;
- монотоност: никада није монотона на целом домену – пошто је h увек парна, ако расте на неком делу позитивне полуосе, на симетричном делу негативне полуосе мора да опада;
- ограниченост: ако је f ограничена, тада је и h ограничена; при томе h може бити ограничена и када f није, јер узима само оне вредности које f има на $[0, +\infty)$;
- парност: увек је парна функција;
- периодичност: не чува се у општем случају;
- асимптоте: ако је $x = c > 0$ вертикална асимптота функције f , тада су $x = c$ и $x = -c$ вертикалне асимптоте функције h . Функција h никада не „види” понашање функције f за негативне аргументе, јер важи $h(x) = f(|x|)$, а $|x| \geq 0$ за свако x . Због тога, ако f има хоризонталну асимптоту $y = b$ када $x \rightarrow +\infty$, та асимптота преноси се на функцију h и када $x \rightarrow +\infty$ и када $x \rightarrow -\infty$; хоризонтална асимптота функције f када $x \rightarrow -\infty$, уколико постоји, не преноси се на функцију h . Ако функција f има косу асимптоту $y = tx + b$ када $x \rightarrow +\infty$, тада функција h има косу асимптоту $y = tx + b$ када $x \rightarrow +\infty$, а косу асимптоту $y = -tx + b$ када $x \rightarrow -\infty$; коса асимптота функције f када $x \rightarrow -\infty$, уколико постоји, не преноси се на функцију h .



Понашање функције $f(x)$ приликом трансформације апсолутном вредношћу примењеном на аргумент функције

3.5 Комбиновање трансформација

У претходним одељцима сваку трансформацију смо посматрали посебно. Међутим, у пракси се најчешће сусрећемо са функцијама код којих је график добијен узастопном применом више трансформација истовремено. Размотримо општи облик

$$g(x) = a \cdot f(bx + c) + d, \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad c, d \in \mathbb{R},$$

који обједињује сва четири претходно обрађена типа трансформације.

Теорема 3.11. *Нека је даћа функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и нека су $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c, d \in \mathbb{R}$ фиксне константе. Тада се график функције $g(x) = a \cdot f(bx + c) + d$ добија из графика функције f узастопном применом следећих трансформација, редом:*

1. *дилатација дуж x -осе у размери $1 : b$, праћена рефлексijом у односу на y -осу ако је $b < 0$;*
2. *транслација дуж x -осе за $-c/b$;*

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

3. дилатација дуж y -осе у размери $a : 1$, праћена рефлексијом у односу на x -осу ако је $a < 0$;

4. транслација дуж y -осе за d .

Доказ. Функцију g градимо у четири корака, узастопном применом познатих трансформација на функцију f .

Корак 1. Означимо $f_1(x) = f(bx)$. Према теорему 3.8, график функције f_1 добија се из графика функције f дилатацијом дуж x -осе у размери $1 : b$, праћеном рефлексијом у односу на y -осу ако је $b < 0$.

Корак 2. Означимо $f_2(x) = f_1\left(x + \frac{c}{b}\right)$. Како важи

$$f_2(x) = f_1\left(x + \frac{c}{b}\right) = f\left(b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right) = f(bx + c),$$

према теорему 3.2, график функције f_2 добија се из графика функције f_1 транслацијом дуж x -осе за $-c/b$.

Корак 3. Означимо $f_3(x) = a \cdot f_2(x) = a \cdot f(bx + c)$. Према теорему 3.7, график функције f_3 добија се из графика функције f_2 дилатацијом дуж y -осе у размери $a : 1$, праћеном рефлексијом у односу на x -осу ако је $a < 0$.

Корак 4. Означимо $f_4(x) = f_3(x) + d = a \cdot f(bx + c) + d = g(x)$. Према теорему 3.1, график функције f_4 добија се из графика функције f_3 транслацијом дуж y -осе за d .

Композицијом ова четири корака, график функције $g = f_4$ добија се узастопном применом наведених трансформација на график функције f , чиме је тврђење доказано. $\square$

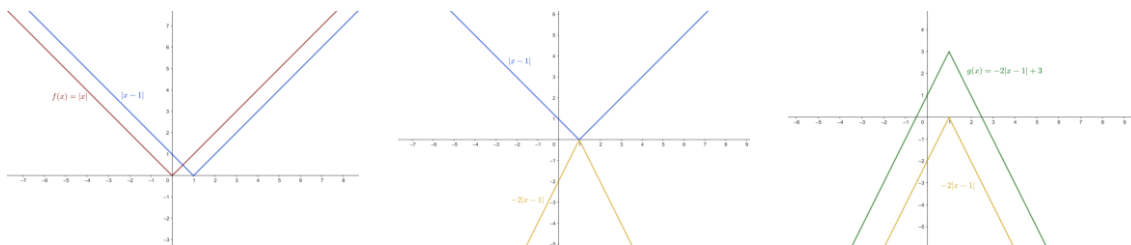
Редослед корака је битан: дилатација и транслација дуж исте осе **не комутирају**. Ако бисмо применили исти параметар транслације c у оба редоследа, добили бисмо различите резултате: редослед „прво дилатација дуж x -осе у размери $1 : b$, па транслација за c “ даје $f(x) \rightarrow f(bx) \rightarrow f(bx + bc)$, док редослед „прво транслација за c , па дилатација дуж x -осе у размери $1 : b$ “ даје $f(x) \rightarrow f(x + c) \rightarrow f(bx + c)$. Због тога, при скицирању графика, важно је водити рачуна о томе да параметар транслације мора бити прилагођен редоследу примене трансформација. Управо зато смо у доказу транслацију применили тек након дилатације, користећи параметар $-c/b$, а не $-c$.

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

Пример 3.1. Скицирајмо график функције $g(x) = -2|x - 1| + 3$ полазећи од графика функције $f(x) = |x|$. Пишемо $g(x) = a \cdot f(x + c) + d$ са $a = -2$, $c = -1$, $d = 3$. Кораци:

1. Транслирамо график $f(x) = |x|$ за 1 удесно: добијамо $f(x - 1) = |x - 1|$ (теорема 3.2);
2. Дилаћирамо дуж y -осе у размери $2 : 1$ уз рефлексiju у односу на x -осу јер је $a = -2 < 0$: добијамо $-2|x - 1|$ (теорема 3.7);
3. Транслирамо дуж y -осе за 3 навише: добијамо коначан график $g(x) = -2|x - 1| + 3$ (теорема 3.1).

Особине функције g директно се читају из ове конструкције: домен остаје $\mathbb{R}$ (транслација и дилаћација не мењају домен); теме графика са тачке $(0, 0)$ помера се у тачку $(1, 3)$; знак функције g мења се управо у нулама, које добијамо решавањем $-2|x - 1| + 3 = 0$, тј. $|x - 1| = 3/2$, одакле су нуле $x_{1,2} = 1 \pm 3/2$; моноћоност се мења у односу на моноћоност функције $|x|$ (јер је $a < 0$) и функција g је растућа на $(-\infty, 1)$, а опадајућа на $(1, +\infty)$.



Приказ корака из Примера 3.1.

3.6 Утицај параметара на број и природу решења једначина и неједначина

У претходном делу ове главе показали смо како геометријске трансформације утичу на облик и особине графика функције. У овом одељку синтетизоваћемо те резултате али из другог угла: уместо да се питамо како изгледа график, поставићемо питање колико решења има једначина и како се тај број мења када мењамо параметар трансформације.

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

Решавање једначине $f(x) = m$ геометријски значи тражење свих апсциса тачака у којима график функције f сече хоризонталну праву $y = m$. Број решења једначине једнак је броју пресечних тачака график функције f са том правом. Природа решења, тј. да ли су решења изоловане тачке или читави интервали, зависи од тога да ли се график и права секу или се делимично поклапају. Поклапање дела графика функције f са правом $y = m$ на неком интервалу може се десити једино ако је функција f константна на неком подинтервалу свог домена. Због тога ће се, код највећег броја примера које ћемо разматрати у глави 4, природа решења сводити на изоловане тачке пресека. Аналогно, решавање неједначине $f(x) > m$, односно $f(x) < m$, своди се на одређивање оних делова домена на којима се график функције f налази изнад, односно испод праве $y = m$.

Монотоност функције директно ограничава могући број решења једначине $f(x) = m$.

Теорема 3.12. *Нека је функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ строго монотона на сваком од коначно много интервала $X_1, X_2, \dots, X_k$, где је $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$. Тада једначина $f(x) = m$ има највише једно решење на сваком од интервала X_i , $i = 1, \dots, k$, па самим тим има највише k решења на целом домену X .*

Доказ. Нека је $i \in \{1, \dots, k\}$ произвољно, и нека су $x_1, x_2 \in X_i$ такве да је $x_1 \neq x_2$. Тада важи или $x_1 < x_2$ или $x_1 > x_2$. Како је f строго монотона на X_i (дефиниција 2.7), у оба случаја важи $f(x_1) \neq f(x_2)$: ако је функција строго растућа, из $x_1 < x_2$ следи $f(x_1) < f(x_2)$, а ако је строго опадајућа, из $x_1 < x_2$ следи $f(x_1) > f(x_2)$. Аналогно важи и за случај $x_1 > x_2$.

Дакле, различитим тачкама из X_i увек одговарају различите вредности функције f . Другим речима, рестрикција функције f на интервал X_i , у ознаци $f|_{X_i}$, јесте инјективна функција. Пошто је $f|_{X_i}$ инјективна, за дато m постоји највише једно $x \in X_i$ такво да је $f(x) = m$.

Ово важи за свако $i = 1, \dots, k$. Дакле, укупан број решења једначине $f(x) = m$ на целом домену X износи највише k . $\square$

Интервали монотоности функције f одређују горњу границу броја решења једначине $f(x) = m$. Тачан број решења за конкретно m зависи, међутим, и од вредности функције у граничним тачкама између интервала монотоности. Управо на овим местима параметри трансформација играју кључну улогу,

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

померајући те граничне вредности, чиме се мења број пресека графика са правом $y = m$.

Размотримо сада како свака трансформација обрађена у овој глави утиче на број решења једначине $g(x) = m$, где је g трансформисана верзија полазне функције f .

- **Транслација дуж y -осе** $g(x) = f(x) + a$ (теорема 3.1): важи $g(x) = m \iff f(x) = m - a$. Дакле, транслација дуж y -осе параметром a помера праву са којом тражимо пресек на полазној функцији f , тј. уместо пресека са правом $y = m$, тражимо пресек са правом $y = m - a$. Број решења зависи од тога да ли права $y = m - a$ прелази неку граничну вредност функције f , па се променом параметра a може повећати, смањити или очувати.
- **Транслација дуж x -осе** $g(x) = f(x + a)$ (теорема 3.2): транслација дуж x -осе само помера положај решења, не мења њихов број. Дакле, број решења једначине $g(x) = m$ исти је као број решења једначине $f(x) = m$, за свако a .
- **Дилатација дуж y -осе и рефлексација у односу на x -осу** (теореме 3.4, 3.7) $g(x) = a \cdot f(x)$: важи $g(x) = m \iff f(x) = \frac{m}{a}$. Принцип је аналоган транслацији дуж y -осе, уместо пресека са правом $y = m$, на функцији f тражимо пресек са правом $y = \frac{m}{a}$. Број решења зависи од тога да ли ова права прелази неку граничну вредност функције f , па се променом параметра a може повећати, смањити или очувати.

Специјалан случај $a = -1$ одговара рефлексацији у односу на x -осу: формула $f(x) = \frac{m}{a}$ тада постаје $f(x) = -m$, што је посебан пример истог поступка.
- **Дилатација дуж x -осе и рефлексација у односу на y -осу** (теореме 3.3, 3.8) $g(x) = f(b \cdot x)$: ако x_0 решава једначину $f(x) = m$, тада $x = \frac{x_0}{b}$ решава $f(b \cdot x) = m$. Свако решење полазне једначине даје тачно једно решење нове једначине, па се број решења не мења, мења се само положај или знак сваког решења. Специјалан случај $b = -1$ одговара рефлексацији у односу на y -осу, тада $x = -x_0$ решава $f(-x) = m$, што не мења горе описан поступак.

- **Апсолутна вредност примењена на функцију** (теорема 3.9) $g(x) = |f(x)|$: једначина $g(x) = t$ за $t > 0$ еквивалентна је унији два услова, $f(x) = t$ или $f(x) = -t$, па је број решења једначине $g(x) = t$ једнак збиру броја решења ова два услова. За $t = 0$, решења се поклапају са нулама функције f , а за $t < 0$ једначина $g(x) = t$ нема решења, јер је $g(x) \geq 0$ за свако x .
- **Апсолутна вредност примењена на аргумент** (теорема 3.10) $g(x) = f(|x|)$: за $x \geq 0$ решења се поклапају са решењима једначине $f(x) = t$ на делу домена $X \cap [0, +\infty)$. Свако такво решење $x_0 > 0$ огледа се и на $x = -x_0$, удвостручујући број решења, изузев потенцијалног решења $x_0 = 0$ које се не удвостручује.

Аналогни закључци важе и у случају неједначина, с том разликом што сада не пратимо број пресечних тачака, већ облик и положај скупа решења, тј. унију интервала на којима се график налази изнад, односно испод, посматране праве. Транслација и дилатација дуж y -осе померају, односно скалирају, границу t коју упоређујемо са функцијом f , чиме се померају границе самог скупа решења. Транслација и дилатација дуж x -осе, као и рефлексije, померају или скалирају сам скуп решења дуж x -осе, не мењајући његов облик. Апсолутна вредност, слично као код једначина, дели неједначину на два услова (за $|f(x)| > t$: услове $f(x) > t$ или $f(x) < -t$, чији се скупови решења сједињују у унију, за $|f(x)| < t$: услове $f(x) < t$ и $f(x) > -t$, чији се скупови решења пресецају), што типично мења облик коначног скупа решења у односу на полазну неједначину.

Пример 3.2. *Одредимо за које вредности параметра $a \in \mathbb{R}$ једначина $|x - 2| + a = 5$ има тачно два решења.*

Аналитички приступ: *Једначину запишемо у облику $|x - 2| = 5 - a$. Како је лева страна ненегативна, ако је $5 - a < 0$, једначина нема решења. Ако је $5 - a \geq 0$, разликујемо два случаја, у зависности од знака израза $x - 2$.*

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

Случај $x \geq 2$:

$$|x - 2| = x - 2$$

$$x - 2 = 5 - a$$

$$x = 7 - a$$

Случај $x < 2$:

$$|x - 2| = 2 - x$$

$$2 - x = 5 - a$$

$$x = a - 3$$

Услов $x \geq 2$ важи ако и само ако

$$7 - a \geq 2 \implies a \leq 5.$$

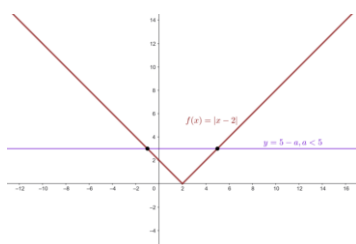
Комбинујмо добијене резултате:

Услов $x < 2$ важи ако и само ако

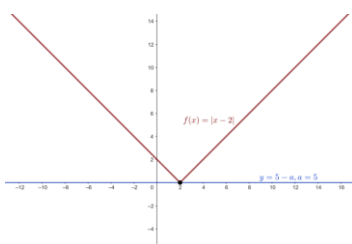
$$a - 3 < 2 \implies a < 5.$$

- ако је $a < 5$: оба решења, $x = 7 - a$ и $x = a - 3$, задовољавају своје услове и међусобно су различита – два решења;
- ако је $a = 5$: решење $x = 7 - a = 2$ задовољава услов $x \geq 2$, док решење $x = a - 3 = 2$ не задовољава услов $x < 2$ – једно решење, $x = 2$;
- ако је $a > 5$: нема решења.

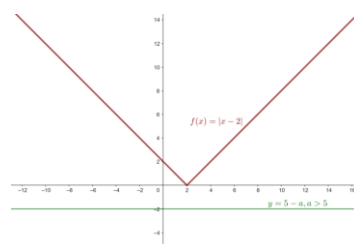
Графички приказ: До истог закључка можемо доћи посматрањем графика. Слике приказују график функције $f(x) = |x - 2|$ заједно с хоризонталним правима $y = 5 - a$ за три карактеристичне вредности параметра a : за $a < 5$ (права изнад шемена, два пресека), за $a = 5$ (права тачно кроз шеме, један пресек) и за $a > 5$ (права испод шемена, нема пресека).



$a < 5$



$a = 5$



$a > 5$

Број пресечних тачака графика функције f и сваке од ових права директно потврђује резултат добијен аналитичким путем.

Изложени резултати показују да параметри у трансформацијама графика имају непосредан и предвидив утицај на број и природу решења придружене једначине или неједначине: транслација и дилатација дуж x -осе, као и рефлексije, чувају број решења мењајући само њихов положај; транслација и

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

дилатација дуж y -осе делују посредно, преко промене тражене вредности m ;
а трансформације са апсолутном вредношћу мењају број решења.

Глава 4

Примена аналитичке и графичке методе

У претходним главама систематизовали смо нама потребна теоријска знања о функцијама и показали како параметри у геометријским трансформацијама графика утичу на број и природу решења придружене једначине или неједначине. У овој глави та теоријска знања примењујемо на конкретне задатке, са циљем да покажемо у ком односу стоје аналитички и графички метод решавања и када је један од њих погоднији од другог.

Аналитички метод подразумева решавање једначине или неједначине искључиво алгебарским путем, трансформацијом израза, применом познатих формула и идентитета, до добијања тачног решења. Предност ове методе је што даје прецизне, егзактне резултате, али његова примена постаје знатно тежа, када једначина укључује трансцендентне изразе, комбинације различитих типова функција или параметре чији утицај на број и облик решења није лако пратити чисто алгебарским путем.

Графички метод, насупрот томе, своди решавање једначине $f(x) = g(x)$ на проналажење пресечних тачака графика функција f и g . Предност овог приступа огледа се управо тамо где аналитички метод показује своје слабости. График даје непосредан увид у број и распоред решења, чак и када тачну вредност решења није могуће израчунати. Ова метода посебно добија на значају код задатака са параметром, где праћење промене положаја или облика графика директно показује како се број решења мења у зависности од параметра, без потребе да се за сваку вредност параметра решење рачуна изнова.

Ипак, графички метод није лишен ограничења. Прецизност читавања вредности са графика је мања од прецизности алгебарског рачуна, те графички метод чешће служи за утврђивање постојања и броја решења, него за одређивање њихове тачне вредности. Осим тога, поуздано скицирање графика захтева претходно добро познавање особина функције.

У наставку ове главе размотрићемо, кроз низ конкретних задатака, ситуације у којима графички метод битно олакшава решавање у односу на аналитички поступак, сложеније задатке са параметрима у којима се погодности графичког приступа посебно испољавају, као и задатке код којих аналитичко решење није могуће одредити, па се графички метод користи искључиво за утврђивање броја решења. На крају главе, кроз селекцију задатака са пријемних испита за факултете, показаћемо практичну примену изложених идеја. Запажања до којих кроз ове задатке долазимо биће систематизована у глави 5, у којој формулишемо критеријуме за избор методе и указујемо на границе графичког приступа.

4.1 Задаци код којих графичка метода битно олакшава решавање у односу на аналитичку методу

Задатак 4.1. Решити једначину $\log(5x) + \log(x - 1) = 2$.

Аналитички приступ: Домен захтева $5x > 0$ и $x - 1 > 0$, тј. $x > 1$. Применом особине логаритма $\log a + \log b = \log(ab)$ (за $a, b > 0$), једначина постаје

$$\log(5x(x - 1)) = 2.$$

Одакле следи $5x(x - 1) = 100$, тј. $5x^2 - 5x - 100 = 0$, што после дељења са 5 даје

$$x^2 - x - 20 = 0.$$

Решења квадратне једначине су $x = 5$ и $x = -4$. Како домен захтева $x > 1$, решење $x = -4$ се одбацује. Дакле, једначина има јединствено решење $x = 5$.

Графички приступ: Посматрајмо функцију $f(x) = \log(5x) + \log(x - 1)$ и испитајмо њене особине неопходне за скицирање графика.

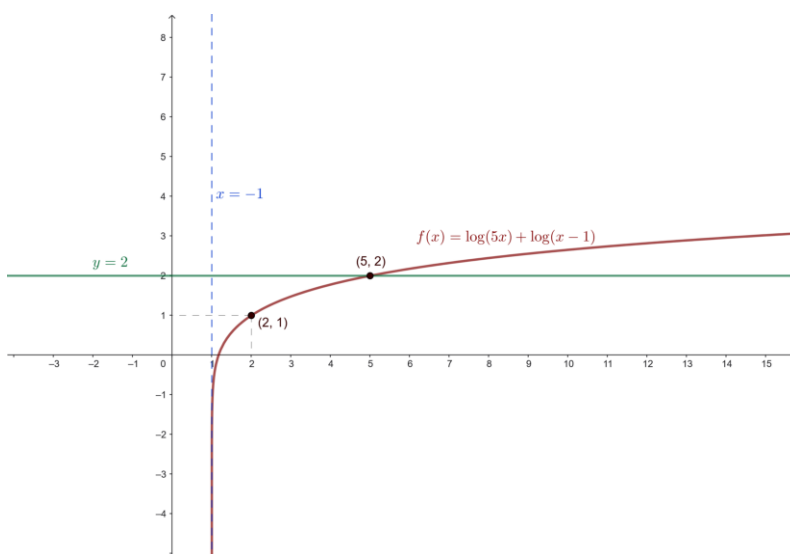
Домен: Пресеком услова $5x > 0$ и $x - 1 > 0$ добијамо $D_f = (1, +\infty)$.

Моношност: Функције $\log(5x)$ и $\log(x-1)$ су обе строго растуће на свом домену, па је, према теореме 2.2, и њихов збир f строго растућа функција на $(1, +\infty)$.

Асимптотике: Како $x = 1$ не припада домену, а $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, права $x = 1$ је вертикална асимптота функције f . У случају када $x \rightarrow +\infty$, оба члана, $\log(5x)$ и $\log(x-1)$, теже ка $+\infty$, па $f(x) \rightarrow +\infty$. Дакле функција нема хоризонталну асимптоту.

За још прецизније скицарање графика, израчунајмо и једну конкретну тачку графика: $f(2) = \log(10) + \log(1) = 1 + 0 = 1$, тј. график пролази кроз тачку $(2, 1)$.

Тражимо решење једначине $f(x) = 2$, тј. пресек графика функције f са хоризонталном правом $y = 2$. Функција f је строго растућа и прелази од $-\infty$ до $+\infty$ на целом домену $(1, +\infty)$, па њен график сече сваку хоризонталну праву, па и праву $y = 2$ тачно једном.



Ово потврђује решење добијено алгебарским путем. Алгебарско решавање квадратне једначине $x^2 - x - 20 = 0$ природно уводи и друго, лажно решење које накнадно треба проверити и одбацити због услова домена, док нам график унапред показује да постоји само једно решење.

Задатак 4.2. Решити једначину $|x-1| + |x+2| = 5$.

Аналитички приступ: Израз мења облик у зависности од знака сваког израза под апсолутном вредношћу, што нас доводи до три случаја.

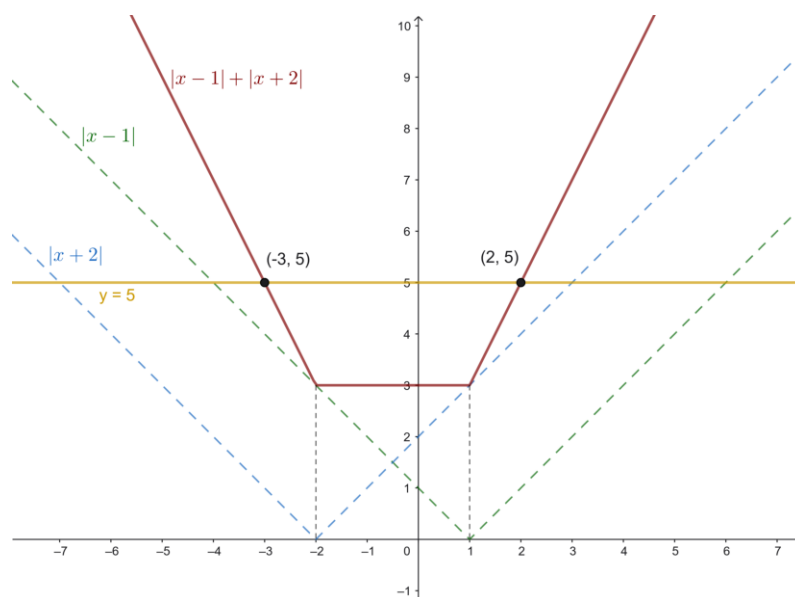
$1^\circ x < -2:$	$2^\circ -2 \leq x \leq 1:$	$3^\circ x > 1:$
$ x - 1 = 1 - x$	$ x - 1 = 1 - x$	$ x - 1 = x - 1$
$ x + 2 = -x - 2$	$ x + 2 = x + 2$	$ x + 2 = x + 2$
$(1 - x) + (-x - 2) = 5$	$(1 - x) + (x + 2) = 5$	$(x - 1) + (x + 2) = 5$
$-2x - 1 = 5$	$3 = 5$	$2x + 1 = 5$
$x = -3$	(нема решења)	$x = 2$
(задовољава $x < -2$)		(задовољава $x > 1$)

Дакле, једначина има два решења: $x = -3$ и $x = 2$.

Графички приступ: Функција $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$ добија се као збир две транслиране функције апсолутне вредности: $|x - 1|$ (график функције $|x|$ транслиран за 1 удесно, теме у тачки $(1, 0)$, теорема 3.2) и $|x + 2|$ (график функције $|x|$ транслиран за 2 улево, теме у тачки $(-2, 0)$, теорема 3.2).

Скицирајмо обе транслиране функције на истом координатном систему и сабирамо њихове вредности тачку по тачку: на интервалу $(-\infty, -2)$ обе функције су опадајуће, па је и њихов збир опадајући; на интервалу $(-2, 1)$, тј. између темена функција, функција $|x + 2|$ расте, а $|x - 1|$ опада истом брзином, па им је збир константан на висини $f(x) = (1 - x) + (x + 2) = 3$; на интервалу $(1, +\infty)$ обе функције су растуће, па је и збир растући.

График непосредно показује да права $y = 5$ сече график тачно два пута, што се потпуно слаже са аналитички добијеним решењима $x = -3$ и $x = 2$. Овде графички приступ посебно олакшава разумевање зашто на средњем интервалу нема решења: раван део графика, на константној висини $3 < 5$, показује да права $y = 5$ уопште не може да га додирне, без потребе да се то закључи тек након добијања контрадикције $3 = 5$ алгебарским путем.



Задатак 4.3. Решити неједначину $\frac{x+2}{x-1} > x-3$.

Аналитички приступ: Пре свега, мора важити $x \neq 1$, јер именилац не сме бити 0. Пребацивањем свих чланова на леву страну и свођењем на заједнички именилац добијамо

$$\frac{x+2}{x-1} - (x-3) > 0 \iff \frac{(x+2) - (x-3)(x-1)}{x-1} > 0.$$

Сређивањем бројиоца добијамо

$$\frac{-x^2 + 5x - 1}{x-1} > 0,$$

множењем неједнакости са -1 добијамо,

$$\frac{x^2 - 5x + 1}{x-1} < 0.$$

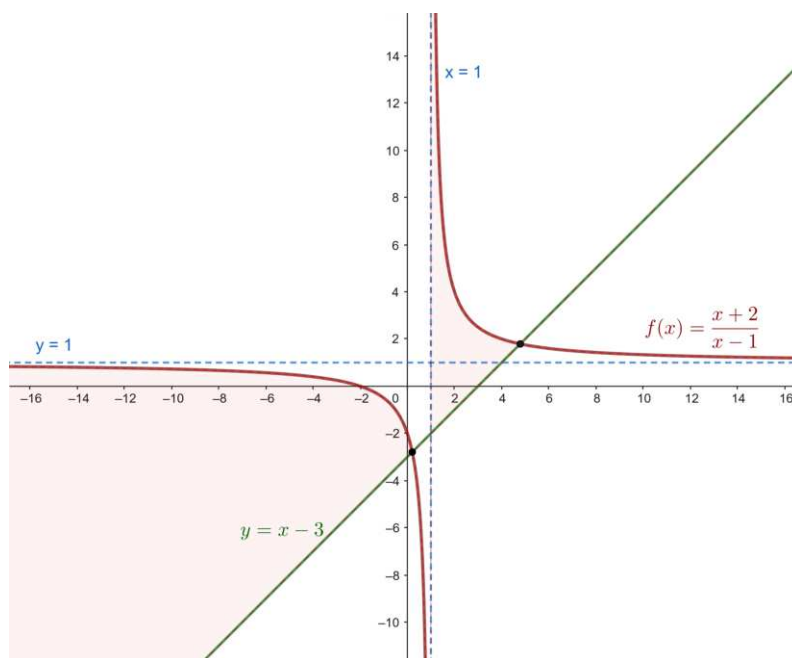
Нуле бројиоца су $x_1 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \approx 0.21$ и $x_2 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \approx 4.79$, а нула имениоца је $x = 1$. Знак разломка $\frac{x^2 - 5x + 1}{x-1}$ по интервалима дат је следећом таблицом:

	$(-\infty, x_1)$	$(x_1, 1)$	$(1, x_2)$	$(x_2, +\infty)$
$x^2 - 5x + 1$	+	-	-	+
$x - 1$	-	-	+	+
$\frac{x^2 - 5x + 1}{x - 1}$	-	+	-	+

Тражимо где је разломак негативан, што је, према табlici, на интервалима $(-\infty, x_1)$ и $(1, x_2)$. Дакле, решење неједначине је

$$x \in \left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(1, \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right).$$

Графички приступ: Функција $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ је рационална функција са вертикалном асимптотом $x = 1$ и хоризонталном асимптотом $y = 1$. Можемо приметити да важи $f(x) = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$. Дакле, функција f добија се из степене функције $\frac{1}{x}$ у три корака: прво дилатацијом дуж y -осе у размери $3 : 1$ (теорема 3.7), чиме се добија $\frac{3}{x}$, а затим транслацијом за 1 удесно и 1 навише (теореме 3.2, 3.1).



Са слике се непосредно уочавају две тачке пресека, једна лево од вертикалне асимптоте, друга десно, које одговарају границама $x_1 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$ и $x_2 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$. Подручја на којима је крива $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ изнад праве $y = x-3$ директно се читавају као интервали решења неједначине, без потребе да се пажљиво прати обртање знака неједначине, што је уједно и чест извор грешака у аналитичком приступу. Треба, ипак, нагласити да график сам по

себи даје само приближан положај тачака пресека. Тачне вредности граница, $\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, добијају се аналитичким путем.

Задатак 4.4. Решити неједначину $-6|x - 3| + 8 > 2$.

Аналитички приступ: Приметимо да важи

$$-6|x - 3| + 8 > 2 \Rightarrow -6|x - 3| > -6 \Rightarrow |x - 3| < 1.$$

Користећи особину $|a| < b \iff -b < a < b$ (за $b > 0$), добијамо

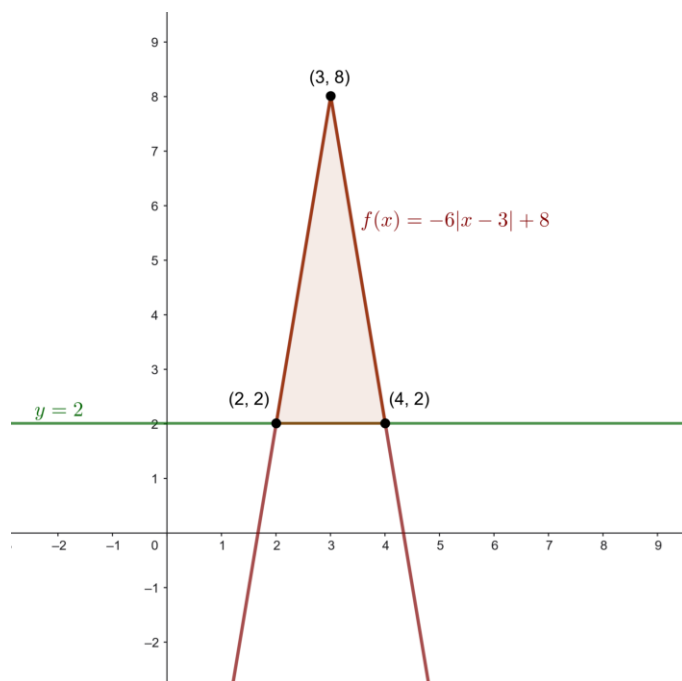
$$-1 < x - 3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4.$$

Графички приступ: Функцију $g(x) = -6|x - 3| + 8$ препознајемо у облику $g(x) = a \cdot f(bx + c) + d$ (теорема 3.11), где је $f(x) = |x|$, $a = -6$, $b = 1$, $c = -3$, $d = 8$. Према теорему 3.11, график добијамо низом трансформација:

1. транслација дуж x -осе за 3 удесно - теме прелази у тачку $(3, 0)$;
2. дилатација дуж x -осе изостаје, јер је $b = 1$;
3. дилатација дуж y -осе у размери $6 : 1$, праћена рефлексijом у односу на x -осу, јер је $a = -6 < 0$ - теме остаје у $(3, 0)$;
4. транслација дуж y -осе за 8 навише - теме прелази у $(3, 8)$.

Дакле, без потребе да се функција рачуна тачку по тачку, знамо да график представља обрнуто „V“ са теменом у $(3, 8)$, при чему функција g строго расте на $(-\infty, 3)$ и строго опада на $(3, +\infty)$.

Скицирајмо овај график заједно с хоризонталном правом $y = 2$. Како је вредност функције у темену већа од 2, према теорему 3.12 права $y = 2$ сече график тачно једном на сваком од два интервала монотоности – укупно два пресека, који одговарају границама тражене неједначине. Са слике се непосредно читава да је график изнад праве $y = 2$ управо на интервалу $(2, 4)$ што је у складу са аналитички добијеним резултатом.



Овај пример показује како примена теореме 3.11 омогућава да се сложенија трансформација скицира истим поступком као и основна функција $|x|$, без цртања међукорача или рачунања појединачних тачака.

Задатак 4.5. Решити једначину $\sin(2x) = \cos x$ на интервалу $x \in [0, 2\pi]$.

Аналитички приступ: Применом идентитета двоструког угла $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, једначина постаје

$$2 \sin x \cos x = \cos x \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2 \sin x - 1) = 0.$$

Производ је једнак нули ако је бар један од чинилаца једнак нули, па разликујемо два случаја.

$$\begin{aligned} \cos x &= 0: \\ \text{на } [0, 2\pi]: \\ x &= \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

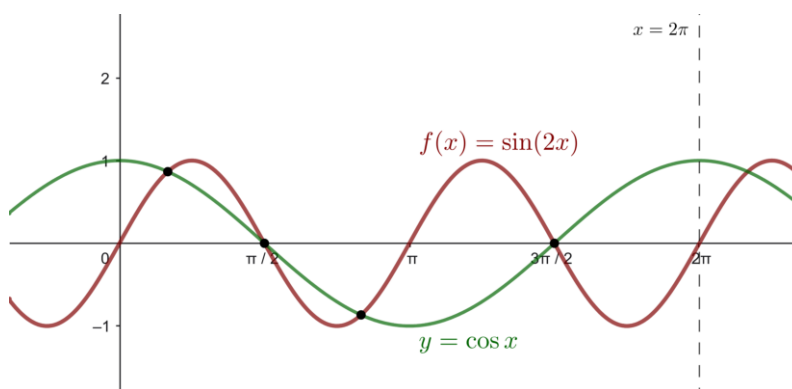
$$\begin{aligned} 2 \sin x - 1 &= 0 \\ \sin x &= \frac{1}{2}: \\ \text{на } [0, 2\pi]: \\ x &= \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

Дакле, једначина има четири решења на датом интервалу: $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$.

Графички приступ: Уместо да тражимо нуле једне сложене функције, погодније је посматрати једначину као тражење пресечних тачака два већ позната графика: функције $y = \sin(2x)$ и функције $y = \cos x$.

Функција $y = \cos x$ је основна тригонометријска функција. Присетимо се да је она периодична са основним периодом $T = 2\pi$, парна, ограничена између -1 и 1 и са нулама у $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Док се функција $y = \sin(2x)$ добија дилатацијом графика функције $\sin x$ дуж x -осе у размери $1 : 2$, тј. сажимањем два пута. Према теорему 2.8 основни период се дели са $|b| = 2$, па функција $\sin(2x)$ осцилује између -1 и 1 са основним периодом $T = \pi$, дуго брже него функција $\cos x$.

Скицирајмо оба графика на истом координатном систему за $x \in [0, 2\pi]$.



Са слике се непосредно уочавају четири тачке пресека на посматраном интервалу. Предност графичког приступа овде није у томе што аналитичко решавање није могуће. Напротив, препознавање идентитета $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ брзо води до тачног резултата. Предност је у томе што график унапред показује колико укупно решења треба очекивати, служећи као провера да ниједно решење није изгубљено или удвостручено. Треба, ипак, нагласити да график сам по себи открива само број решења, њихове тачне вредности нису директно читљиве са слике и захтевају управо аналитички поступак изложен изнад.

4.2 Задаци са параметрима

Задатак 4.6. Решити неједначину $\tan x > a \cdot \cot x$ на интервалу $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, у зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$.

Аналитички приступ: На датом интервалу важи $\cot x > 0$, па множење обе стране са $\cot x$ не мења знак неједнакости:

$$\tan x \cdot \cot x > a \cdot \cot^2 x.$$

Како је $\tan x \cdot \cot x = 1$ за свако x на датом интервалу, неједначина постаје

$$1 > a \cdot \cot^2 x.$$

Разликујемо два случаја, у зависности од знака параметра a .

Случај $a \leq 0$: како је $\cot^2 x > 0$ на целом интервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, важи $a \cdot \cot^2 x \leq 0 < 1$ за свако x из интервала. Дакле, неједнакост важи за свако $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Случај $a > 0$: Неједначина $1 > a \cot^2 x$ еквивалентна је $\cot^2 x < \frac{1}{a}$, тј. $|\cot x| < \frac{1}{\sqrt{a}}$. Како је $\cot x > 0$ на датом интервалу, добијамо $\cot x < \frac{1}{\sqrt{a}}$.

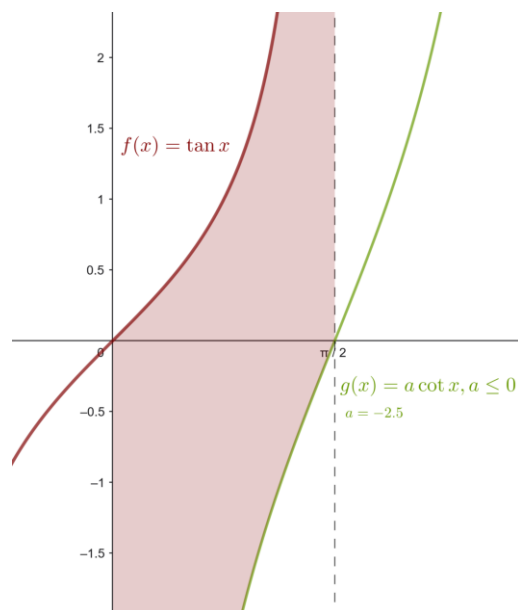
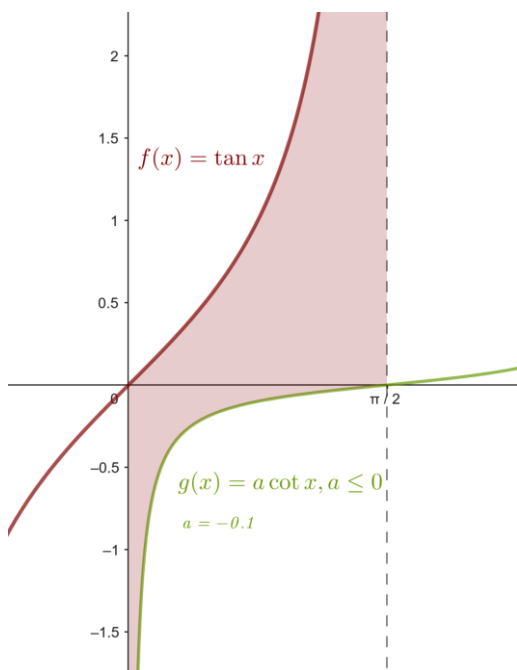
Функција $\cot x$ је строго опадајућа на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Означимо са x_0 ону тачку интервала за коју важи

$$\cot x_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad \text{тј.} \quad x_0 = \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right).$$

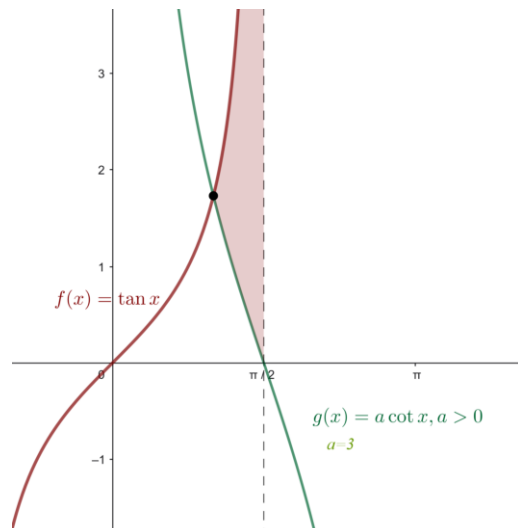
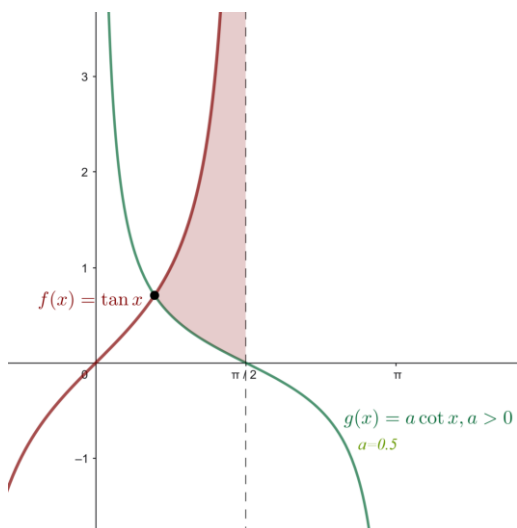
Како $\cot x$ опада, важи следеће: за $x < x_0$ важи $\cot x > \frac{1}{\sqrt{a}}$, а за $x > x_0$ важи $\cot x < \frac{1}{\sqrt{a}}$. Тражени услов, $\cot x < \frac{1}{\sqrt{a}}$, испуњен је за $x > x_0$. Решење неједначине је интервал $x \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Графички приступ: Функције $\tan x$ и $\cot x$ су познате елементарне функције. Функцију $g(x) = a \cdot \cot x$ добијамо дилатацијом дуж y -осе примењеном на $\cot x$ (теорема 3.7). Скицирајмо графике функција $\tan x$ и $g(x) = a \cot x$ на истом координатном систему за $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

За $a \leq 0$, график функције g се у целости налази испод x -осе, док је $\tan x$ увек позитиван на посматраном интервалу. Графички се непосредно види да је $\tan x$ свуда изнад $g(x)$, у складу са аналитичким резултатом да неједначина важи за свако x .



За $a > 0$, обе криве су позитивне на интервалу: $\tan x$ полази од 0 и расте, а $g(x)$ полази од $+\infty$ и опада. Две супротно монотоне криве морају се сећи тачно једном, у тачки x_0 , при чему је $\tan x$ испод $g(x)$ лево од те тачке, а изнад ње десно, што директно показује да је решење неједначине интервал $(x_0, \frac{\pi}{2})$, без потребе да се неједначина алгебарски своди на услов по $\cot x$.



Поново ћемо нагласити да тачна вредност границе $x_0 = \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)$ није директно читљива са слике за произвољно a и да је то мана графичког при-

ступа у овом примеру, па је за одређивање тачне нумеричке вредности неопходан аналитички поступак изложен изнад.

Задатак 4.7. *Одреди́ти број решења једначине $|2^x - 4| = m$ у зависно́сти од параметра $m \in \mathbb{R}$.*

Аналитички приступ: Разложимо задатак на два случаја:

Случај $2^x - 4 = m$: тј. $2^x = 4 + m$. Како експоненцијална функција узима искључиво позитивне вредности, једначина има решење акко $4 + m > 0$, тј. $m > -4$; тада је $x = \log_2(4 + m)$.

Случај $2^x - 4 = -m$: тј. $2^x = 4 - m$. Аналогно, једначина има решење акко $4 - m > 0$, тј. $m < 4$; тада је $x = \log_2(4 - m)$.

Како је лева страна полазне једначине ненегативна, за $m < 0$ ниједан од ова два случаја не даје ваљано решење – једначина нема решења за $m < 0$, без обзира на то што горе изведени алгебарски услови по себи дозвољавају решења и за неке негативне вредности m .

Комбинујући оба услова, уз услов $m \geq 0$, добијамо:

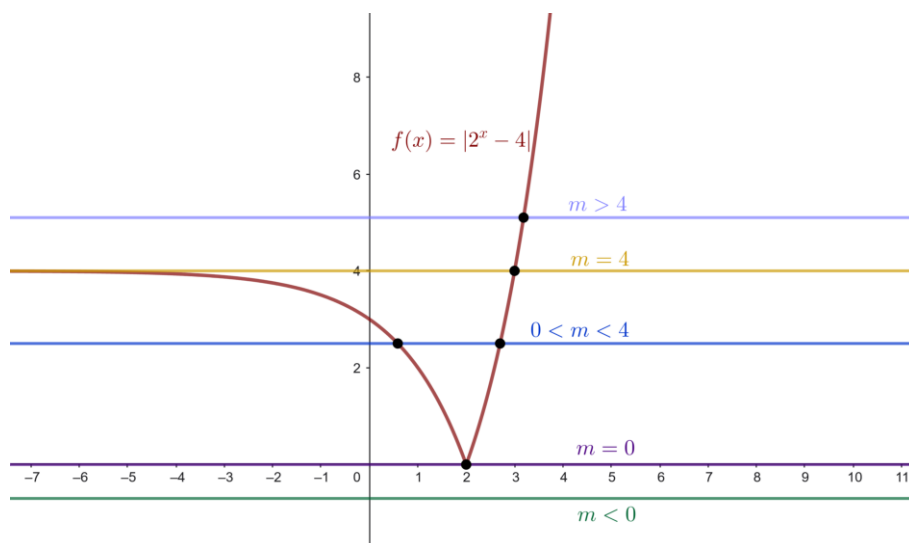
- за $m < 0$: једначина нема решења;
- за $m = 0$: испуњена оба услова, али се вредности $x = \log_2(4 + 0) = \log_2 4 = 2$ и $x = \log_2(4 - 0) = \log_2 4 = 2$ поклапају – једно решење;
- за $0 < m < 4$: испуњена оба услова, а вредности $x = \log_2(4 + m)$ и $x = \log_2(4 - m)$ су различите – два решења;
- за $m = 4$: испуњен само први услов – једно решење, $x = \log_2(8) = 3$;
- за $m > 4$: испуњен само први услов – једно решење.

Графички приступ: Функција $h(x) = 2^x - 4$ добија се транслацијом графика функције 2^x за 4 доле (теорема 3.1). Функцију $f(x) = |2^x - 4|$ добијамо потом применом апсолутне вредности на h (теорема 3.9): део графика испод x -осе се преврће изнад ње, док део изнад x -осе остаје непромењен.

Испитајмо понашање функције f на границама домена. Када $x \rightarrow -\infty$, важи $2^x \rightarrow 0$, па $h(x) = 2^x - 4 \rightarrow -4$, односно $f(x) \rightarrow 4$. Како је ова гранична вредност коначна, права $y = 4$ је хоризонтална асимптота функције f . Када $x \rightarrow +\infty$, важи $2^x \rightarrow +\infty$, па и $f(x) \rightarrow +\infty$, па функција нема хоризонталну асимптоту у том смеру, већ неограничено расте.

Скицирајмо график функције f : за негативне x вредност функције је близу 4 (приближава се хоризонталној асимптоти $y = 4$, никада је не достижући), како x расте, вредност опада, достижући нулу тачно у $x = 2$; након тога за $x > 2$ функција поново неограничено расте. Скицирајмо ову криву заједно с хоризонталном правом $y = m$:

- за $m < 0$: права се налази испод целог графика - нема пресека;
- за $m = 0$: права додирује график тачно у тачки $(2, 0)$ - један пресек;
- за $0 < m < 4$: права пролази кроз појас у ком се график креће и лево и десно од $x = 2$ - два пресека;
- за $m = 4$: график с леве стране прилази вредности 4 али је никада не достиже, па права $y = 4$ сече само десни, растући део графика - један пресек;
- за $m > 4$: слично, права сече само десни део графика - један пресек.



Овакав облик графика непосредно показује промену броја решења, без потребе да се сваки гранични случај рачуна засебно алгебарским путем.

Задатак 4.8. Решити неједначину $|x^2 - 2x - 3| < a$ у зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$.

Аналитички приступ: Означимо $g(x) = x^2 - 2x - 3$, чије су нуле $x = -1$ и $x = 3$. Неједначина $|g(x)| < a$ еквивалентна је двострукој неједначини $-a < g(x) < a$.

Ако је $a \leq 0$, неједначина нема решења.

Ако је $a > 0$, разлажемо ову двоструку неједначину на два услова:

$$g(x) < a \iff x^2 - 2x - (3 + a) < 0, \quad g(x) > -a \iff x^2 - 2x + (a - 3) > 0.$$

Дискриминанте ова два израза износе $D_1 = 4 + 4(3 + a) = 16 + 4a$ и $D_2 = 4 - 4(a - 3) = 16 - 4a$. Како је $a > 0$, важи да је $D_1 > 16 > 0$, док знак D_2 зависи од a . Разликујемо два подслучаја, у зависности од знака D_2 .

Случај $0 < a \leq 4$: тада је $D_2 \geq 0$.

Решење услова $x^2 - 2x - (3 + a) < 0$ је $1 - \sqrt{4 + a} < x < 1 + \sqrt{4 + a}$.

Решење услова $x^2 - 2x + (a - 3) > 0$ је $x < 1 - \sqrt{4 - a}$ или $x > 1 + \sqrt{4 - a}$.

Пресеком ова два услова добија се решење неједначине:

$$x \in (1 - \sqrt{4 + a}, 1 - \sqrt{4 - a}) \cup (1 + \sqrt{4 - a}, 1 + \sqrt{4 + a}).$$

Случај $a > 4$: тада је $D_2 < 0$. Услов $x^2 - 2x + (a - 3) > 0$ важи за свако $x \in \mathbb{R}$, јер парабола $x^2 - 2x + (a - 3)$ нема реалних нула, а водећи коефицијент јој је позитиван. Остаје само услов $x^2 - 2x - (3 + a) < 0$, чије је решење

$$x \in (1 - \sqrt{4 + a}, 1 + \sqrt{4 + a}).$$

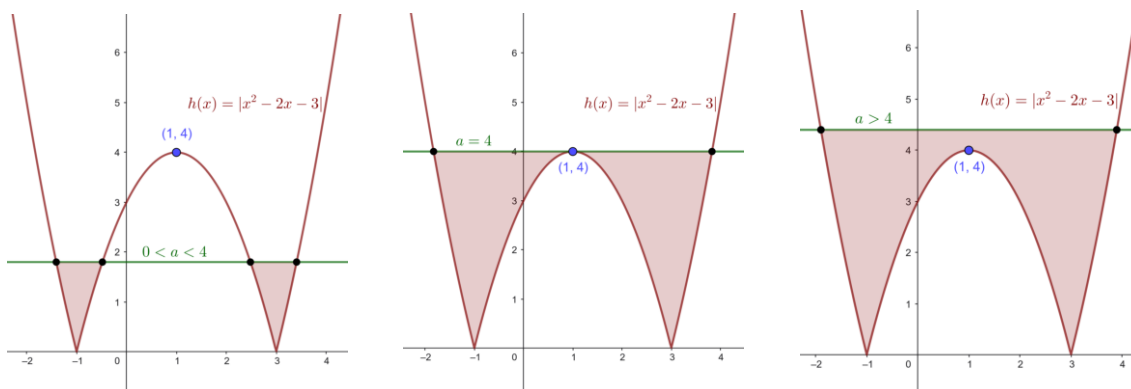
Графички приступ: Функција $h(x) = |x^2 - 2x - 3|$ добија се применом апсолутне вредности на g (теорема 3.9): део параболе између нула, првобитно испод x -осе, добија се рефлексijом у односу на x -осу. Теме дела параболе је у тачки $(1, 4)$.

Скицирајмо ову параболу заједно са хоризонталном правом $y = a$ за неколико вредности параметра:

- за $a \leq 0$: права се налази испод целог графика - решење је празан скуп;
- за $0 < a < 4$: права пролази испод темена и сече график у четири тачке па је

$$x \in (1 - \sqrt{4 + a}, 1 - \sqrt{4 - a}) \cup (1 + \sqrt{4 - a}, 1 + \sqrt{4 + a});$$

- за $a = 4$: права управо додирује теме параболе па је $x \in (1 - \sqrt{8}, 1 + \sqrt{8})$;
- за $a > 4$: права пролази изнад темена параболе и сече график само у две крајње тачке па је $x \in (1 - \sqrt{4 + a}, 1 + \sqrt{4 + a})$.



Прогресија скупа решења, празан скуп, унија два интервала, један спојен интервал, непосредно се читава са слике, посредством положаја праве $y = a$ у односу на теме параболе у тачки $(1, 4)$. Треба, ипак, нагласити да график открива само облик и број интервала решења за дато a . Тачне границе нису директно читљиве са слике и захтевају управо аналитички поступак изложен изнад.

Задатак 4.9. *Одредили број решења једначине $\arctan(x - a) = b$ у зависности од параметара $a, b \in \mathbb{R}$.*

Аналитички приступ: Функција $\arctan$ дефинисана је за сваку реалну вредност аргумента. Међутим, скуп вредности функције аркустангенс је ограничен: за свако $t \in \mathbb{R}$ важи $\arctan(t) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

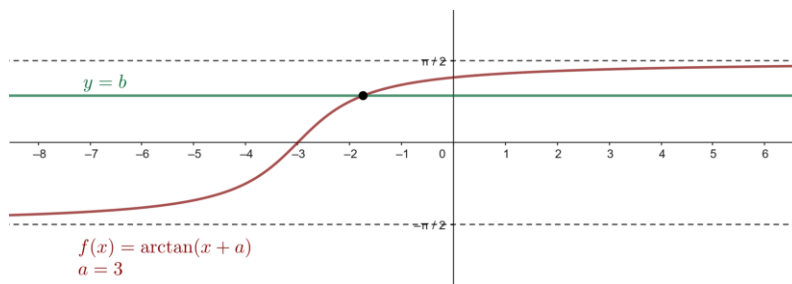
Разликујемо два случаја, у зависности искључиво од параметра b :

Случај $b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$: како $\arctan$ узима сваку вредност из овог интервала тачно једном постоји тачно једно решење. Из $x - a = \tan b$ добијамо $x = a + \tan b$. Ово решење постоји за свако $a \in \mathbb{R}$.

Случај $|b| \geq \frac{\pi}{2}$: како $\arctan(t)$ никада не достиже ни премашује вредност $\frac{\pi}{2}$ једначина нема решења.

Графички приступ: Функција $f(x) = \arctan(x - a)$ добија се трансформацијом графика функције $\arctan x$ за a удесно (теорема 3.2). Транслација дуж x -осе не мења облик нити хоризонталне асимптоте функције.

Скицирајмо график функције f заједно с хоризонталном правом $y = b$. Читав график налази се строго између асимптота $y = \pm \frac{\pi}{2}$, па непосредно уочавамо: ако права $y = b$ пролази између те две асимптоте, сече монотонно растући график тачно једном, где год да се транслирани график хоризонтално налази, а ако права $y = b$ пролази изван тог појаса она ниједном не додирује график.



Овде графички приступ јасно показује да параметар translације a уопште не утиче на број решења. Хоризонтално померање графика не мења његов однос према хоризонталним асимптотама, док би овај закључак алгебарским путем захтевао засебно образложење зашто a испада из услова постојања решења.

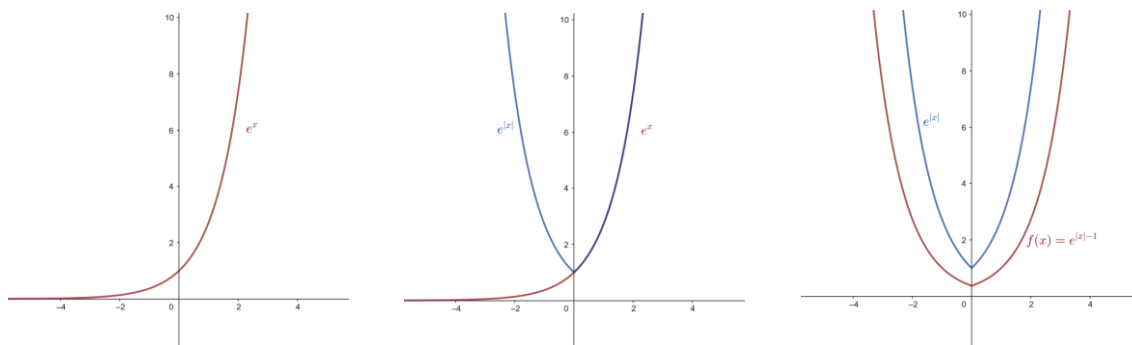
4.3 Задаци код којих аналитичко решење није могуће

За разлику од претходних одељака, у којима је графички приступ служио да убрза или олакша долазак до већ постојећег, тачног аналитичког решења, у овом одељку разматрамо једначине код којих такво решење није изводљиво у затвореном облику. У следећим задацима, циљ више није проналажење тачне вредности решења, већ утврђивање броја решења. Као и у претходним одељцима, графички приступ се ослања на претходно утврђене особине функција и геометријске трансформације.

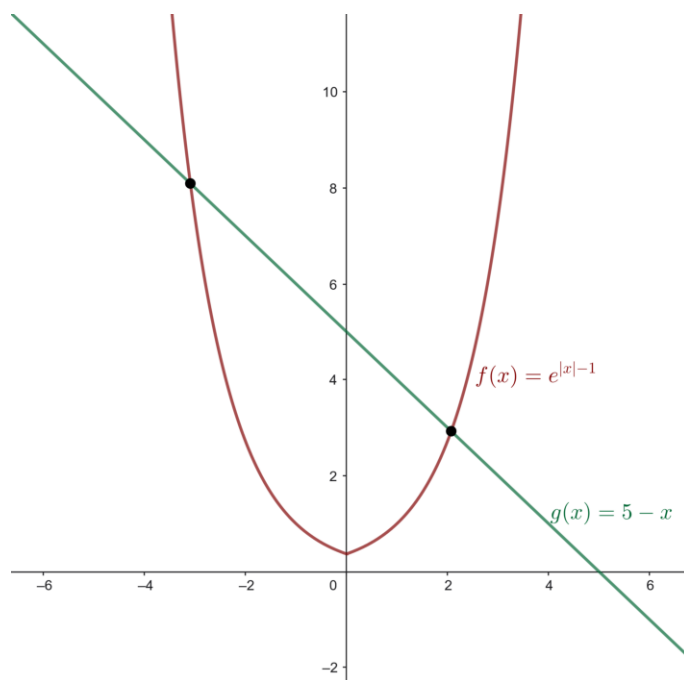
Задатак 4.10. *Одреди број решења једначине $e^{|x|-1} = 5 - x$.*

Означимо $f(x) = e^{|x|-1}$ и $g(x) = 5 - x$. Функцију f добијамо у два корака, полазећи од функције e^x :

1. применом апсолутне вредности на аргумент функције e^x (теорема 3.10), добијамо $e^{|x|}$. График је симетричан, са теменом у тачки $(0, 1)$;
2. како важи $e^{|x|-1} = e^{|x|} \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \cdot e^{|x|}$, применом дилатације дуж y -осе у размери $\frac{1}{e} : 1$ (теорема 3.7), теме се помера у тачку $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, а облик остаје исти, само сажето дуж y -осе.



Функцију $g(x) = 5 - x$ скицирамо као праву која настаје тако што рефлектујемо функцију $y = x$ у односу на x -осу (теорема 3.4), а затим је транслирамо за 5 навише (теорема 3.1).



Са скице графика јасно се уочава да једначина има *два* решења. Права g сече оба крака криве f тачно по једном, једном за позитивно и једном за негативно x .

Задатак 4.11. *Одредили број решења једначине $\sin^4 x + \cos^4 x = \sqrt{x}$.*

Применом идентитета $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$,

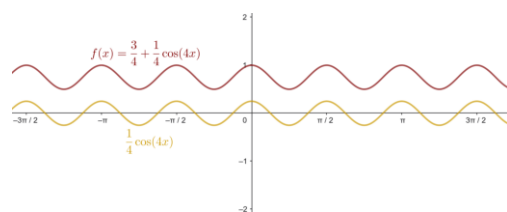
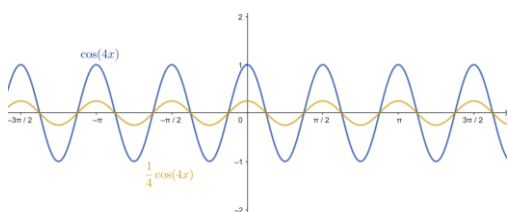
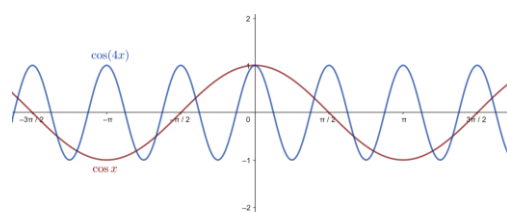
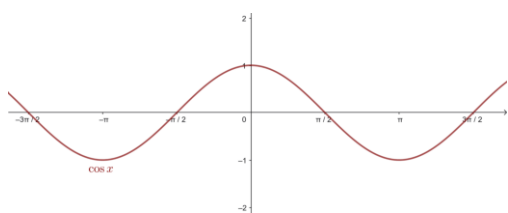
лева страна се своди на

$$\begin{aligned}\sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos(4x)}{2} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4x).\end{aligned}$$

Означимо $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4x)$ и $g(x) = \sqrt{x}$.

Функцију f градимо полазећи од функције $\cos x$:

1. дилатацијом дуж x -осе у размери $1 : 4$ (теорема 3.8) добијамо $\cos(4x)$.
Основни период постаје $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;
2. дилатацијом дуж y -осе у размери $\frac{1}{4} : 1$ (теорема 3.7) добијамо $\frac{1}{4} \cos(4x)$.
Амплитуда осцилације се смањује са 1 на $\frac{1}{4}$;
3. транслацијом дуж y -осе за $\frac{3}{4}$ навише (теорема 3.1) добијамо коначну функцију $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4x)$. График осцилује између вредности $\frac{1}{2}$ и 1, са основним периодом $\frac{\pi}{2}$.

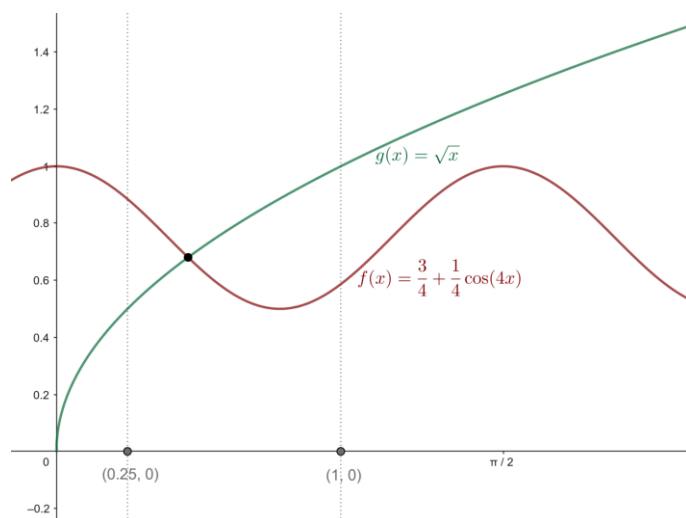


Функција $g(x) = \sqrt{x}$ је елементарна функција, строго растућа на домену $[0, +\infty)$.

Како је $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ за свако x , једнакост $f(x) = g(x)$ може важити само тамо где и $g(x)$ упада у тај исти интервал:

$$g(x) \geq \frac{1}{2} \iff \sqrt{x} \geq \frac{1}{2} \iff x \geq \frac{1}{4}, \quad g(x) \leq 1 \iff \sqrt{x} \leq 1 \iff x \leq 1.$$

Дакле, решења можемо тражити искључиво на интервалу $x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$.



Са скице графика јасно се уочава да једначина има једно решење на интервалу $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$.

Задатак 4.12. *Одредити број решења једначине*

$$2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \ln\left(1 + |x| - \frac{3\pi}{8}\right) = 0,$$

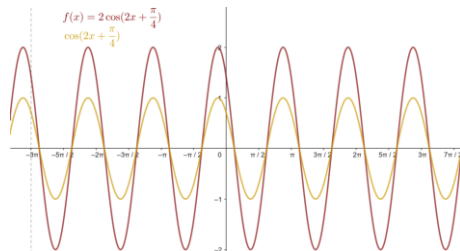
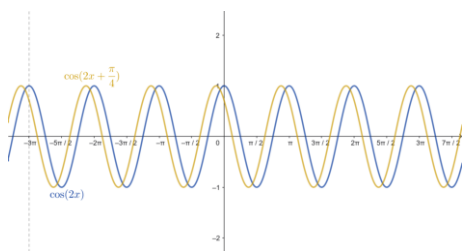
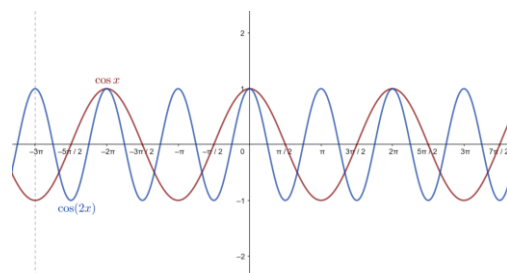
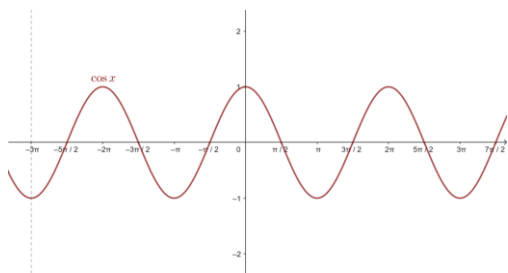
која су већа од -3π .

Означимо $f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ и $g(x) = \ln\left(1 + |x| - \frac{3\pi}{8}\right)$.

Функцију f градимо полазећи од функције $\cos x$:

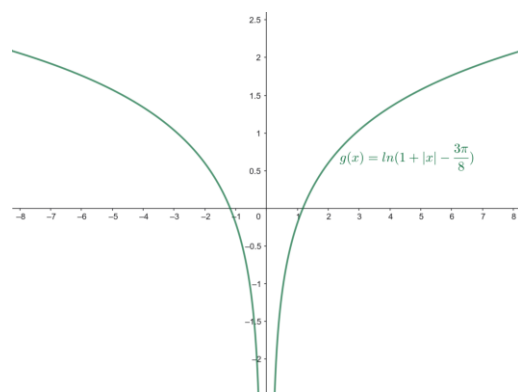
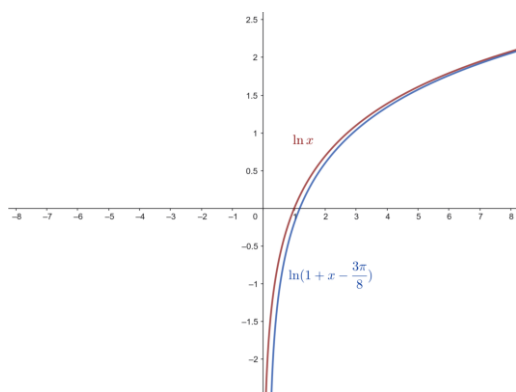
1. дилатацијом дуж x -осе у размери 1 : 2 (теорема 3.8) добијамо $\cos(2x)$. Основни период постаје π (теорема 2.8);
2. транслацијом улево за $\frac{\pi}{8}$ (теорема 3.2) добијамо $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;
3. дилатацијом дуж y -осе у размери 2 : 1 (теорема 3.7) добијамо коначну функцију $f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. График осцилује између вредности -2 и 2 , са основним периодом π .

ГЛАВА 4. ПРИМЕНА АНАЛИТИЧКЕ И ГРАФИЧКЕ МЕТОДЕ

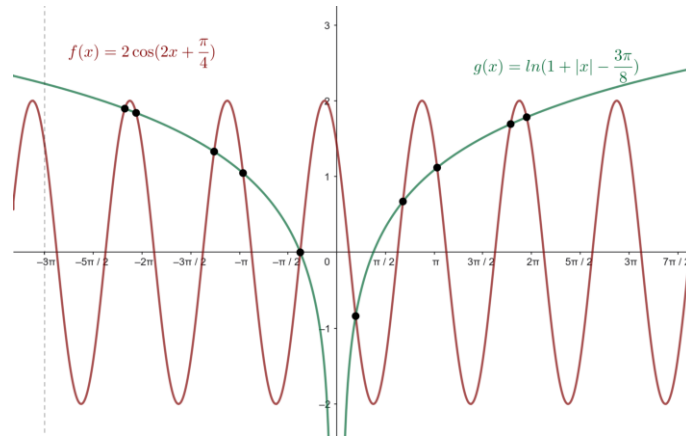


Функцију g градимо полазећи од функције $\ln x$:

1. трансляцијом дуж x -осе за $\frac{3\pi}{8} - 1$ удесно (теорема 3.2) добијамо $\ln\left(1 + x - \frac{3\pi}{8}\right)$;
2. применом ове функције на $|x|$ уместо на x (теорема 3.10) добијамо коначну функцију $g(x) = \ln\left(1 + |x| - \frac{3\pi}{8}\right)$. График је симетричан у односу на y -осу, са две вертикалне асимптоте у $x = \pm\left(\frac{3\pi}{8} - 1\right)$, а домен искључује затворен интервал између њих.



Скицирајмо функције f и g заједно на интервалу $x > -3\pi$.



Са скице графика уочава се да периодична, ограничена крива f осцилује изнад и испод споро растуће криве g на сваком свом периоду. Пошто је период функције f свега π , а посматрани интервал знатно дужи, тачно пребројавање пресека ослањајући се искључиво на ручно нацртану скицу постаје непоуздано. Лако се догоди да се понеки пресек пропусти или погрешно уочи. Стога није могуће са потпуном сигурношћу тврдити тачан број решења само на основу скице. За поуздан резултат неопходна је прецизна, софтверски генерисана слика. Уз помоћ такве слике, пребројавањем пресека добија се да је укупан број решења, већих од -3π , десет.

Задатак 4.13. *Одредити број решења једначине*

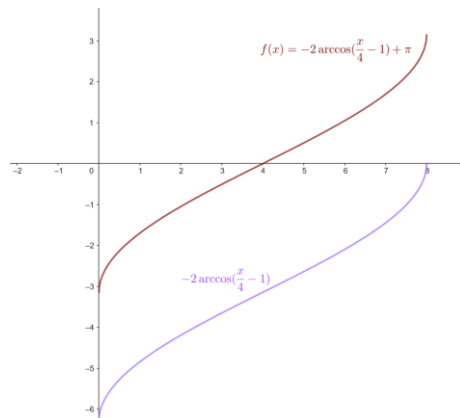
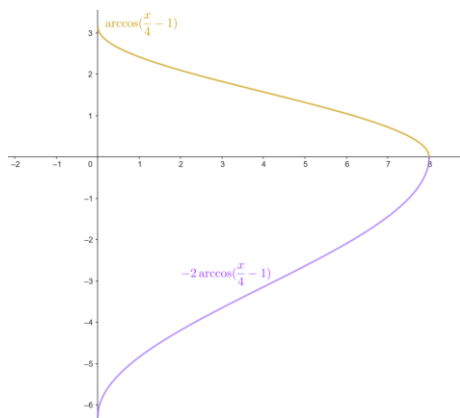
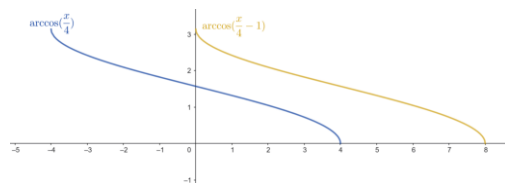
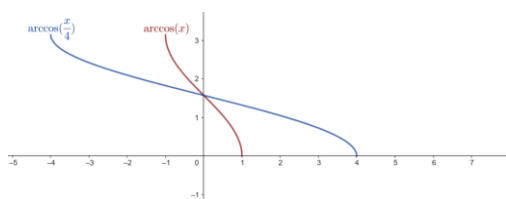
$$-2 \arccos\left(\frac{x}{4} - 1\right) + \pi = \frac{(x-2)^2}{8} - 1.$$

Означимо $f(x) = -2 \arccos\left(\frac{x}{4} - 1\right) + \pi$ и $g(x) = \frac{(x-2)^2}{8} - 1$.

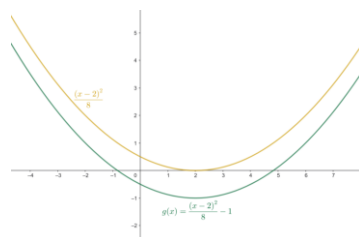
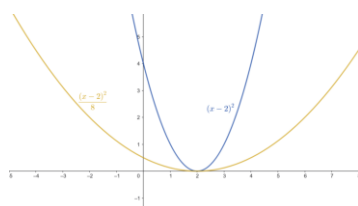
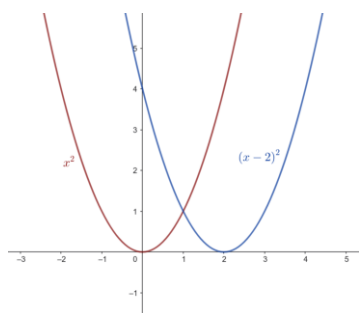
Функцију f градимо полазећи од функције $\arccos x$:

1. дилатацијом дуж x -осе у размери $4 : 1$ (теорема 3.8) добијамо $\arccos\left(\frac{x}{4}\right)$;
2. транслацијом удесно за 4 (теорема 3.2) добијамо $\arccos\left(\frac{x}{4} - 1\right)$. Како $\arccos$ захтева аргумент из $[-1, 1]$, домен нове функције постаје $[0, 8]$;
3. дилатацијом дуж y -осе у размери $2 : 1$, праћеном рефлексijом у односу на x -осу (теорема 3.7) добијамо $-2 \arccos\left(\frac{x}{4} - 1\right)$. Функција је растућа;
4. транслацијом дуж y -осе за π навише (теорема 3.1) добијамо коначну функцију f која је строго растућа на $[0, 8]$, са вредностима у интервалу $[-\pi, \pi]$.

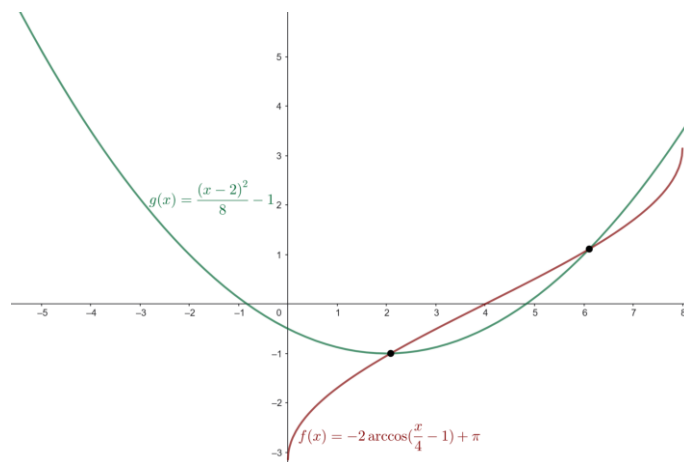
ГЛАВА 4. ПРИМЕНА АНАЛИТИЧКЕ И ГРАФИЧКЕ МЕТОДЕ



Функцију $g(x) = \frac{(x-2)^2}{8} - 1$ градимо полазећи од функције x^2 : транслацијом удесно за 2 (теорема 3.2), дилатацијом дуж y -осе у размери $\frac{1}{8} : 1$ (теорема 3.7) и транслацијом дуж y -осе за 1 наниже (теорема 3.1). Теме је у тачки $(2, -1)$. Функција g опада на $[0, 2]$, а расте на $[2, 8]$.



Скицирајмо функције f и g заједно на домену $[0, 8]$.



Упоредимо вредности функција f и g у неколико карактеристичних тачака домена:

x	0	2	4	6	8
$f(x)$	$-\pi \approx -3.14$	$-\frac{\pi}{3} \approx -1.05$	0	$\frac{\pi}{3} \approx 1.05$	$\pi \approx 3.14$
$g(x)$	-0.5	-1	-0.5	1	3.5

Са скице графика, потврђене овим вредностима, уочава се да крива g остаје изнад криве f на почетном делу домена, потом крива f премашује криву g око средине домена, да би при крају домена крива g поново премашила криву f . Две овакве промене међусобног положаја крива одговарају тачно два решења дате једначине, једном између $x = 2$ и $x = 4$, а другом између $x = 6$ и $x = 8$.

4.4 Анализа задатака са пријемних испита

Прегледом задатака са пријемних испита Математичког факултета у Београду кроз више година уочавамо да велики број њих директно одговара типовима које смо већ детаљно обрадили у претходним одељцима. Задаци облика $|f(x)| = a$, нпр. $|x^3 - 3x^2 + 2x| = a$ из 2023. године или $|x^2 - 22x + 21| = a$ из 2022. године, решавају се сличним поступком који смо применили на неједначини $|x^2 - 2x - 3| < a$ (зadataк 4.8.). Задаци у којима се тражи број решења тригонометријске једначине на задатом интервалу, нпр. $\cos(2x) = \sin x$ и $x^2 - \cos x = 0$ из 2004. године, или $\operatorname{tg} x = \cos x$ из 2017. године, решавају се истим приступом као и једначина $\sin(2x) = \cos x$ (зadataк 4.5.). У наставку издвајамо шест задатка са пријемних испита.

Задатак 4.14. (МАТФ, 2022) Нека је $f(x) = x - 1$ и $g(x) = |x + 1|$. Одредили скупи решења једначине $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

Овај задатак издвајамо јер уводи композицију функција, тип задатка који до сада нисмо сретали у раду.

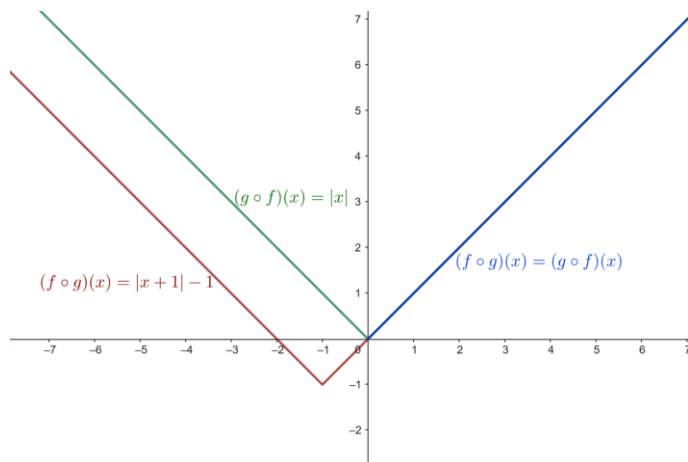
Одредимо најпре обе стране једначине:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|x + 1|) = |x + 1| - 1,$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = |x - 1 + 1| = |x|.$$

Функцију $(f \circ g)$ градимо полазећи од функције $|x|$:

1. транслацијом дуж x -осе за 1 улево (теорема 3.2) добијамо $|x + 1|$. Теме се помера у тачку $(-1, 0)$;
2. транслацијом дуж y -осе за 1 надоле (теорема 3.1), добијамо коначну функцију $|x + 1| - 1$. Теме се помера у тачку $(-1, -1)$.



Са скице графика уочавамо да се криве $(f \circ g)$ и $(g \circ f)$ поклапају на целом делу $x \geq 0$, док се за $x < 0$ разилазе. Дакле, скуп решења дате једначине је $x \in [0, +\infty)$.

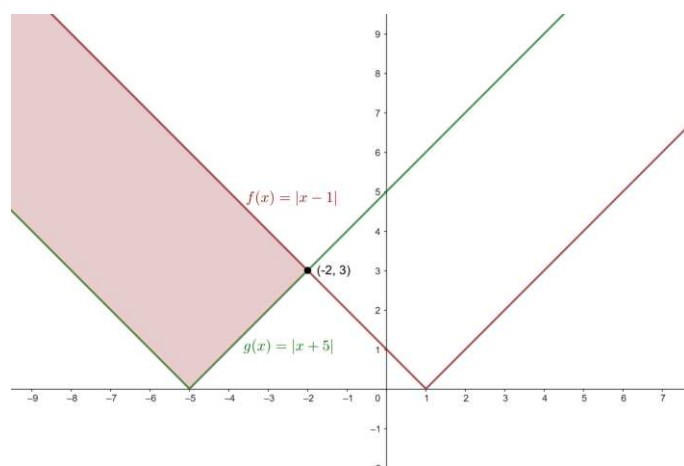
Задатак 4.15. (МАТФ, 2017) Одредили скупи решења неједначине $|x - 1| > |x + 5|$.

Овај задатак издвајамо јер поставља неједначину директно између две функције апсолутне вредности, за разлику од задатака у одељку 4.1, где смо неједначине упоређивали са правом или другом врстом криве.

Означимо $f(x) = |x - 1|$ и $g(x) = |x + 5|$.

Функција f добија се транслацијом графика функције $|x|$ за 1 удесно (теорема 3.2). Теме је у тачки $(1, 0)$.

Функција g добија се транслацијом графика функције $|x|$ за 5 улево (теорема 3.2). Теме је у тачки $(-5, 0)$.



Скицирајмо обе криве на истом координатном систему. Обе функције имају идентичан облик, само су хоризонтално померене једна у односу на другу. Криве се секу тачно у тачки где су подједнако удаљене од оба темена, тј. на средини између $x = -5$ и $x = 1$, у $x = -2$. Лево од те тачке, крива g лежи испод криве f , док десно од те тачке важи обрнуто.

Тражимо где је $f(x) > g(x)$, тј. где је крива f изнад криве g . Са слике можемо прочитати да је то лево од пресечне тачке. Дакле, скуп решења неједначине је $x \in (-\infty, -2)$.

Задатак 4.16. (МАТФ, 2025) *Одредити број реалних решења једначине $\cos x - \ln |x| = 0$.*

Овај задатак издвајамо зато што показује једноставнији облик исте комбинације функција коју смо већ срели у задатку 4.12. За разлику од оног, знатно сложенијег примера, овде је, услед одсуства трансформација, могуће решење утврдити директним, поузданим пребројавањем на кратком интервалу.

Означимо $f(x) = \cos x$ и $g(x) = \ln |x|$.

Функција $f(x) = \cos x$ је периодична, парна и ограничена између -1 и 1 .

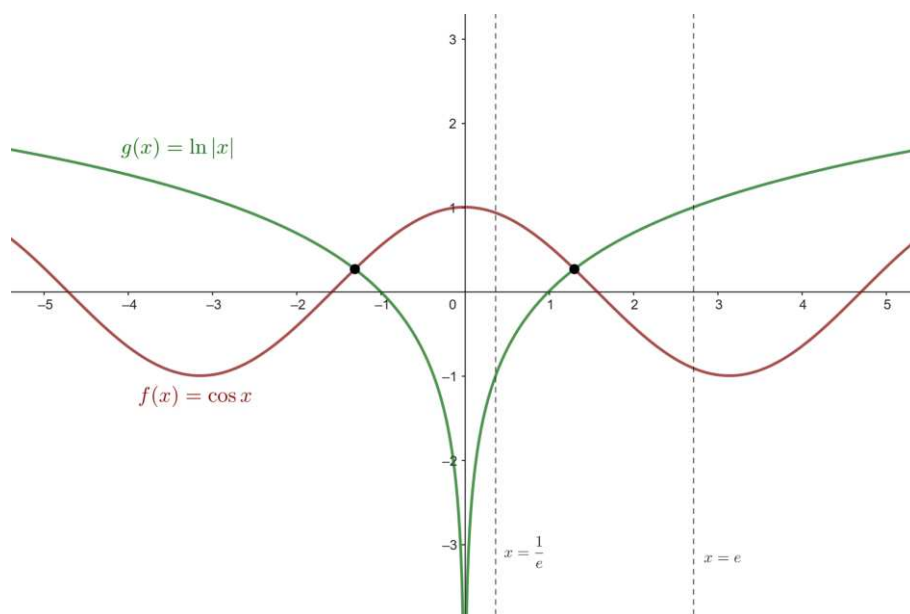
Функција $g(x) = \ln |x|$ добија се применом функције $\ln x$ на $|x|$ (теорема 3.10). Ово је парна функција, дефинисана за свако $x \neq 0$, са две вертикалне асимптоте у $x = 0$, растућа за $x > 0$ и опадајућа за $x < 0$.

Како је f ограничена између -1 и 1 , решења могу постојати само тамо где и g упада у тај исти опсег:

$$-1 \leq \ln |x| \leq 1 \iff \frac{1}{e} \leq |x| \leq e.$$

Услед парности обе функције, довољно је испитати позитивну грану, $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, а закључак ће, по симетрији, важити и за одговарајућу негативну грану.

Скицирамо обе криве заједно на интервалу $\left[\frac{1}{e}, e\right]$. На почетку интервала крива f лежи изнад криве g , док на крају интервала крива g премашује криву f , која је у том делу опала испод нуле. Пошто на овом кратком интервалу крива f монотонно опада, а крива g монотонно расте, ове две криве се секу тачно једном.



Са слике можемо прочитати једно решење на позитивној грани, негде између $x = 1$ и $x = 2$. Услед парности обе функције, постоји одговарајуће решење и на $\left[-e, -\frac{1}{e}\right]$. Дакле, једначина $\cos x = \ln |x|$ има укупно два решења.

Задатак 4.17. (МАТФ, 2025) *Одредити скуп решења неједначине*

$$||2x + 1| - 5| > 2.$$

Овај задатак издвајамо јер садржи двоструку апсолутну вредност.

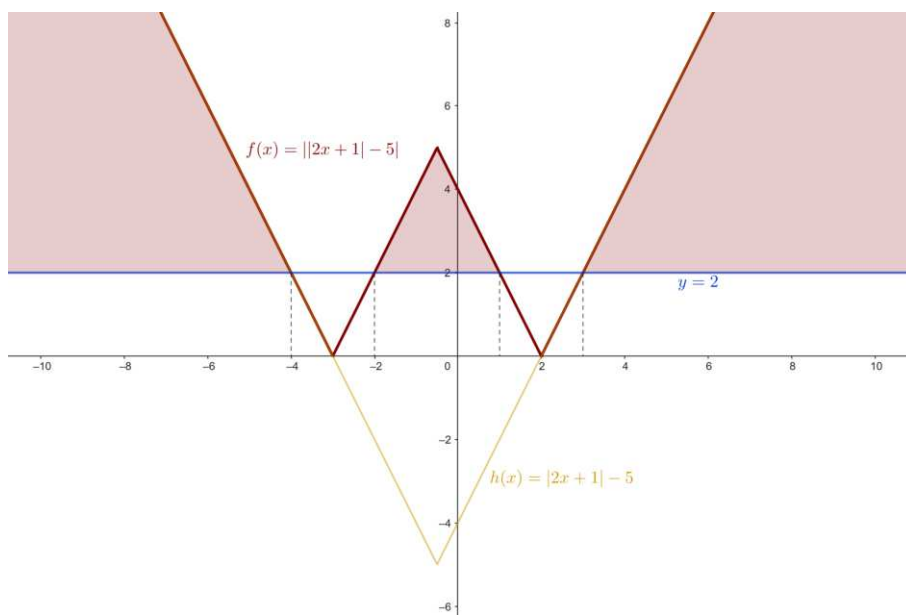
Означимо $h(x) = |2x + 1| - 5$ и $f(x) = |h(x)| = ||2x + 1| - 5|$.

Функцију h градимо полазећи од функције $|x|$:

1. дилатацијом дуж x -осе у размери $1 : 2$ (теорема 3.8) и транслацијом (теорема 3.2) добијамо $|2x + 1|$. Теме се помера у тачку $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$;
2. транслацијом дуж y -осе за 5 надоле (теорема 3.1) добијамо коначну функцију $h(x) = |2x + 1| - 5$. Теме се помера у тачку $\left(-\frac{1}{2}, -5\right)$.

Функцију $f(x) = |h(x)|$ добијамо применом апсолутне вредности на h (теорема 3.9). Део графика испод x -осе се преврће изнад ње, дајући облик налик слову „W“. Теме функције помера се у тачку $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$. Нуле функције h , а тиме и тачке у којима график f додирује x -осу, добијају се из $|2x + 1| - 5 = 0 \Rightarrow |2x + 1| = 5 \Rightarrow 2x + 1 = \pm 5 \Rightarrow x = 2$ или $x = -3$.

Скицирајмо функцију f заједно с хоризонталном правом $y = 2$. Како права пролази испод темена функције, она сече график у четири тачке.



Тражимо где је $f(x) > 2$, тј. где је крива изнад праве. Са слике можемо прочитати три одвојена интервала: $x \in (-\infty, -4) \cup (-2, 1) \cup (3, +\infty)$.

Задатак 4.18. (МАТФ, 2009) *Одредити скуп решења неједначине*

$$2 \ln(1 - x) - \ln(2x + 6) \leq 0.$$

Овај задатак издвајамо јер показује поређење два логаритамска графика супротне монотоности, где се решење неједначине директно читава из положаја пресечне тачке.

Пре свега, домен захтева $1 - x > 0$ и $2x + 6 > 0$, тј. $x < 1$ и $x > -3$, па је $D = (-3, 1)$.

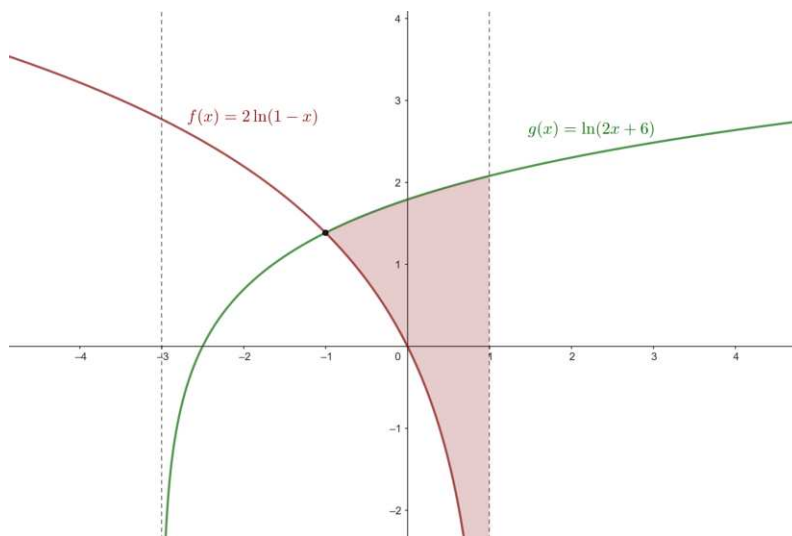
Означимо $f(x) = 2 \ln(1 - x)$ и $g(x) = \ln(2x + 6)$.

Функцију f градимо полазећи од функције $\ln x$:

1. рефлексijом у односу на y -осу (теорема 3.3) добијамо $\ln(-x)$;
2. транслацијом дуж x -осе за 1 удесно (теорема 3.2) добијамо $\ln(1 - x)$, са вертикалном асимптотом $x = 1$ и нулом у $x = 0$;
3. дилатацијом дуж y -осе у размери $2 : 1$ (теорема 3.7) добијамо коначну функцију $f(x) = 2 \ln(1 - x)$, чија је нула и даље у $x = 0$.

Функцију g градимо полазећи од функције $\ln x$, користећи да важи $\ln(2x + 6) = \ln(2(x + 3)) = \ln 2 + \ln(x + 3)$:

1. транслацијом дуж x -осе за 3 улево (теорема 3.2) добијамо $\ln(x + 3)$, са вертикалном асимптотом $x = -3$ и нулом у $x = -2$;
2. транслацијом дуж y -осе за $\ln 2$ навише (теорема 3.1) добијамо коначну функцију $g(x) = \ln(2x + 6)$, чија је нула у тачки где $2x + 6 = 1$, тј. $x = -\frac{5}{2}$.



На заједничком домену $(-3, 1)$, функција f је строго опадајућа, док је функција g строго растућа. Како су функције супротне монотоности на истом интервалу графици се секу тачно једном, у тачки $x = -1$, где важи $f(-1) = g(-1) = \ln 4$.

Тражимо где је $f(x) \leq g(x)$. Са слике можемо прочитати да је то десно од пресечне тачке, укључујући и саму тачку пресека. Дакле, скуп решења неједначине је $x \in [-1, 1)$.

Задатак 4.19. (МАТФ, 2005) *Одредили број решења једначине $2^x = -x^2 - 2x$.*

Овај задатак издвајамо јер комбинује експоненцијалну и квадратну функцију и представља пример код кога аналитичко решење није изводљиво у затвореном облику.

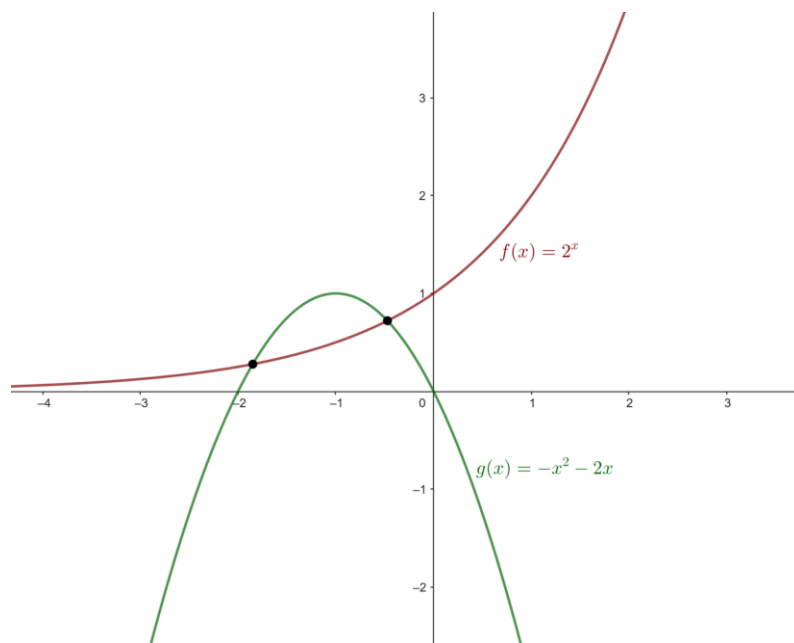
Означимо $f(x) = 2^x$ и $g(x) = -x^2 - 2x$.

Функција $f(x) = 2^x$ је позната елементарна функција, строго растућа на целом домену $\mathbb{R}$, увек позитивна, са хоризонталном асимптотом $y = 0$ када $x \rightarrow -\infty$ и сече y -осу у тачки $(0, 1)$.

Функцију g градимо полазећи од функције x^2 , користећи да важи $g(x) = -x^2 - 2x = -(x+1)^2 + 1$:

1. транслацијом дуж x -осе за 1 улево (теорема 3.2) добијамо $(x+1)^2$, теме се помера у тачку $(-1, 0)$;
2. дилатацијом дуж y -осе праћеном рефлексijом у односу на x -осу (теорема 3.7) добијамо $-(x+1)^2$, теме остаје у тачки $(-1, 0)$;
3. транслацијом дуж y -осе за 1 навише (теорема 3.1) добијамо коначну функцију $g(x) = -(x+1)^2 + 1$, теме се помера у тачку $(-1, 1)$.

Функција g је парабола отворена наниже, са теменом у тачки $(-1, 1)$, нулама у $x = -2$ и $x = 0$, растућа на $(-\infty, -1)$, а опадајућа на $(-1, +\infty)$.



Са слике се уочавају две тачке пресека: једна између $x = -2$ и $x = -1$, где крива f пресеца растући леви крак функције g , и друга између $x = -1$ и $x = 0$, где f пресеца опадајући десни крак функције g . За веће x , функција g опада ка $-\infty$, док f наставља да расте, па се криве више не секу. Дакле, једначина $2^x = -x^2 - 2x$ има два решења.

Глава 5

Критеријуми за избор методе и границе графичког приступа

У претходној глави показали смо низ ситуација у којима графички метод даје брз, поуздан, а понекад и једини доступан пут до решења. Ефикасност графичког приступа, међутим, није унапред загарантована. Она зависи од две одвојене ствари: од тога колико се поуздано дати график може скицирати и од тога колико се прецизно са те скице може прочитати управо оно што задатак тражи. Ова два питања не смеју се мешати, јер график који је лако нацртати не мора бити график са кога се тражена величина може прочитати, нити обрнуто.

У овој глави систематизујемо запажања стечене кроз задатке главе 4 и формулишемо их као критеријуме за процену погодности графичке методе. Критеријуми се примењују редом. Најпре проверавамо може ли се график уопште поуздано конструисати (одељак 5.1). Тек ако је одговор потврдан, можемо се питати шта се са добијене слике сме закључити (одељак 5.2). Задаци са параметром чине посебну групу, јер код њих сам параметар унапред одређује да ли ће се број решења уопште мењати (одељак 5.3). Збирни преглед дат је у одељку 5.4.

5.1 Критеријуми за цртање графика

К1 – Конструктивност Основно питање гласи: да ли се посматрана функција добија коначним низом познатих трансформација једне елементарне функције? Ако је одговор позитиван, теорема 3.11 даје цео график без

ГЛАВА 5. КРИТЕРИЈУМИ ЗА ИЗБОР МЕТОДЕ И ГРАНИЦЕ ГРАФИЧКОГ ПРИСТУПА

рачунања појединачних тачака. Тако смо у задатку 4.4 функцију $g(x) = -6|x - 3| + 8$ скицирали у четири корака, знајући унапред да је реч о обрнутом слову „V“ са теменом у тачки $(3, 8)$, без иједне израчунате тачке. Исти поступак применили смо и у задацима 4.10, 4.13 и 4.17.

Са овим критеријумом уско је повезано питање *разлагања*. Једначина облика $f(x) = g(x)$ не мора се сводити на тражење нула једне сложене функције. Често је погодније оставити је неразложеном и тражити пресек два независна графика. Ова одлука доноси се пре цртања и понекад чини да график, који се иначе не би могао нацртати, ипак буде нацртан. У задатку 4.5 једначину $\sin(2x) = \cos x$ посматрали смо као пресек две познате тригонометријске криве, а у задатку 4.10 као пресек криве $e^{|x|} - 1$ и праве $5 - x$, а у задатку 4.16 као пресек $\cos x$ и $\ln |x|$.

Критеријум K1 није испуњен за функције настале као производ или збир две суштински различите елементарне функције. Функција $h(x) = x \sin x$ није ни монотона ни периодична, а амплитуда јој неограничено расте са $|x|$. Опис њеног графика захтева појам „омотача“ одређеног правима $y = \pm x$, који не следи ни из једне уведене теореме. Слично, функција $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ не добија се ни непосредно из особина, ни узастопном применом познатих трансформација, јер обе њене компоненте имају различит облик и понашање, па њихов збир захтева засебну анализу.

У оваквим случајевима графички приступ захтева резоновање изван оквира изложене теорије или се ослања на софтверске алате — GeoGebra, Desmos, Wolfram Alpha, MATLAB — који пружају прецизност коју ручно цртање не може поуздано постићи. Важно је нагласити да употреба таквог алата не замењује разумевање теорије, већ се на њу ослања. Алат убрзава и прецизира извршење, али не замењује одлуку шта и зашто треба нацртати.

K2 – Однос периода периодичне функције и дужине посматраног интервала Ако је бар једна страна једначине периодична функција, поузданост ручне скице зависи од тога колико периода стаје у посматрани интервал. Провера вредности у неколико карактеристичних тачака домена, метод који је поуздан код монотоних функција, овде постаје осетљив на грешку: ако је растојање између две узастопне контролне тачке веће од половине основног периода, цео један врх или дно осцилације могу се прескочити, а да то не буде примећено.

ГЛАВА 5. КРИТЕРИЈУМИ ЗА ИЗБОР МЕТОДЕ И ГРАНИЦЕ ГРАФИЧКОГ ПРИСТУПА

Контраст између два задатка најбоље показује домет овог критеријума. У задатку 4.12 основни период функције $2\cos(2x + \frac{\pi}{4})$ износи $\pi \approx 3.14$, док се релевантан део домена, онај на коме логаритамска крива улази у опсег $[-2, 2]$, простире на интервалу дужине преко 7 на свакој грани. Унутар тог интервала налази се више од два пуна периода, а сваки период доноси до два потенцијална пресека, што значи шест или више карактеристичних тачака по грани. Тачно пребројавање пресека ослањајући се искључиво на ручно нацртану скицу постаје непоуздано. За поуздан резултат неопходна је или софтверски генерисана слика или детаљнија аналитичка анализа. Насупрот томе, у задатку 4.16 претрага је сведена на интервал $[\frac{1}{e}, e]$ на коме се одвија свега једна осцилација, па је скица потпуно довољна.

К3 – Ограниченост домена Ограничен домен допушта коначну проверу међусобног положаја кривих таблицом вредности у неколико карактеристичних тачака, чиме тај закључак постаје проверљив. У задатку 4.13 домен $[0, 8]$ омогућио нам је да упоређивањем вредности функција f и g у тачкама 0, 2, 4, 6, 8 утврдимо две промене међусобног положаја кривих, а тиме и број решења.

Када је домен неограничен, таблица вредности мора бити допуњена испитивањем понашања функција када $x \rightarrow \pm\infty$. У задатку 4.7 управо је то испитивање дало кључну информацију: из $\lim_{x \rightarrow -\infty} |2^x - 4| = 4$ следи да је права $y = 4$ хоризонтална асимптота, а тиме и да је $m = 4$ критична вредност параметра. У задатку 4.9 асимптоте $y = \pm\frac{\pi}{2}$ саме одређују услов егзистенције решења.

5.2 Критеријуми очитљивости

К4 – Природа траженог одговора Пре него што се график употреби, мора се разјаснити шта се тражи: тачна вредност решења, укупан број решења или облик скупа решења. График поуздано даје одговор на друго и треће питање, док одговор на прво питање даје само у посебним случајевима.

У задатку 4.2 решења $x = -3$ и $x = 2$ читају се непосредно са слике, јер су пресеци у целобројним тачкама. Насупрот томе, у задатку 4.3 границе $\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, у задатку 4.6 граница $\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$, а у задатку 4.8 границе $1 \pm \sqrt{4 \pm a}$ нису читљиве са слике ни приближно тачно, те је за њихово одређивање

неопходан аналитички поступак. График у таквим задацима не даје решење, већ његову структуру: број интервала, њихов распоред и међусобни однос.

К5 – Монотоност као гаранција броја решења Према теорему 3.12, ако је функција строго монотона на сваком од k интервала на које се домен дели, једначина $f(x) = t$ има највише k решења, чиме је број пресека одозго ограничен независно од квалитета скице.

У задатку 4.1 строга монотоност функције $\log(5x) + \log(x - 1)$ на целом домену $(1, +\infty)$, уз чињеницу да функција прелази од $-\infty$ до $+\infty$, гарантује тачно један пресек са сваком хоризонталном правом.

К6 – Ограниченост скупа вредности као сужавање претраге Ако је скуп вредности једне стране једначине ограничен, друга страна мора упасти у тај исти опсег да би једнакост уопште била могућа. Тиме се претрага своди на коначан интервал. Овај критеријум је најделотворнији алат за задатке код којих аналитичко решење није изводљиво.

У задатку 4.11, из $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4x) \in [\frac{1}{2}, 1]$ следи да решења могу постојати искључиво на интервалу $x \in [\frac{1}{4}, 1]$. У Задатку 4.16, из $-1 \leq \ln |x| \leq 1$ следи $\frac{1}{e} \leq |x| \leq e$.

К7 – Симетрија Ако обе стране једначине имају исту симетрију (обе парне или обе непарне) посао се преполовљава. Довољно је испитати једну грану, а закључак се по симетрији преноси на другу. У задатку 4.16 обе функције, $\cos x$ и $\ln |x|$, су парне, па је испитивање спроведено само на позитивној грани, а укупан број решења добијен удвостручавањем.

5.3 Критеријуми за задатке са параметром

К8 – Оса дуж које параметар делује Ово је једини критеријум који одговор даје и пре цртања. Према резултатима Одељка 3.6, ако параметар делује дуж x -осе (транслацијом, дилатацијом или рефлексijом) број решења се не мења, већ само њихов положај. У задатку 4.9 управо то објашњава зашто параметар a уопште не улази у услов постојања решења.

Ако параметар делује дуж y -осе, број решења се мења. Критичне вредности параметра нису произвољне: то су тачно висине темена, локалних ек-

стрема и хоризонталних асимптота полазне функције. У задатку 4.7 критичне вредности су $m = 0$ (висина темена) и $m = 4$ (висина хоризонталне асимптоте), а у задатку 4.8 вредност $a = 4$ (висина темена преврнуте параболе). Уместо да се сваки гранични случај рачуна засебно алгебарским путем, довољно је прочитати те висине са графика.

К9 – Апсолутна вредност као посебан случај Транслација и дилатација дуж y -осе мењају број решења посредно, преко промене тражене вредности m . Апсолутна вредност делује другачије: она услов $|f(x)| = m$ дели на два одвојена услова. Према резултатима Одељка 3.6, за $m > 0$ број решења једнак је збиру броја решења услова $f(x) = m$ и $f(x) = -m$, за $m = 0$ решења се поклапају са нулама функције f , а за $m < 0$ решења нема.

Због тога се код задатака са параметром критичне вредности померају у односу на полазну функцију: у задатку 4.7 то су $m = 0$ и $m = 4$, а у задатку 4.8 вредност $a = 4$. Исти механизам делује и без параметра. У задатку 4.17 двострука апсолутна вредност даје график облика слова „W“, па права $y = 2$ сече криву у четири тачке.

5.4 Збирни преглед

Примена наведених критеријума у пракси не захтева њихово формално навођење. Довољно је, пре цртања, поставити три питања: да ли је функција конструктивна, да ли је оно што се тражи број решења или њихова тачна вредност и ако задатак садржи параметар, дуж које осе тај параметар делује. Одговори на та три питања у највећем броју случајева унапред одређују да ли ће графички приступ бити довољан, довољан уз аналитичку допуну, или неприменљив без софтверске подршке.

Наредна табела сажима изложене критеријуме.

ГЛАВА 5. КРИТЕРИЈУМИ ЗА ИЗБОР МЕТОДЕ И ГРАНИЦЕ ГРАФИЧКОГ ПРИСТУПА

Тип задатка	Критеријум	Шта график даје	Шта остаје аналитичком поступку
Функција до-бијена транс-формацијама елементарне функције	K1, K4	Облик, положај темена, нуле, интервале решења; искључење решења ван домена	Тачне вредности гра-ница када пресеци нису у целобројним тачкама
Тригонометријска једначина на затвореном интервалу	K2, K6	Укупан број решења; проверу да ниједно није изгубљено ни удвостручено	Тачне вредности решења, преко идентитета
Трансцендентна једначина без решења у затвореном облику	K5, K6, K7	Егзистенцију и тачан број решења, уз ограничење претраге на коначан интервал	Ништа — аналитичко решење не постоји
Задатак са параметром, параметар дуж x -осе	K8	Непосредан закључак да се број решења не мења	Израз за положај решења у зависности од параметра
Задатак са параметром, параметар дуж y -осе	K8, K9	Критичне вредности параметра као висине темена и асимптота	Тачне границе интервала решења
Функција која није конструктивна	K1	Ништа поуздано без софтверске подршке	Засебну анализу изван оквира главе 3

Табела 5.1: Преглед критеријума за избор методе

Глава 6

Закључак

Предмет овог рада је однос аналитичког и графичког метода при решавању једначина и неједначина. Циљ није да се један метод прогласи бољим од другог, већ да се утврди у којим класама проблема је који од њих делотворнији и из чега та разлика произлази.

Пут до тих закључака води преко теоријских основа изложених у глави 2 и геометријских трансформација у глави 3, где показујемо да трансформације графика нису само техника цртања. Транслација и дилатација дуж x -осе, као и рефлексије, чувају број решења мењајући им само положај; транслација и дилатација дуж y -осе делују посредно, тако што померају праву са којом тражимо пресек; а трансформације са апсолутном вредношћу мењају број решења. У глави 4 ти резултати се примењују на конкретне задатке, кроз које се показује да предност графичког приступа није свуда иста. Негде он убрзава долазак до већ постојећег решења, негде служи као независна провера, а негде је једини пут до одговора. Глава 5 та запажања формулише као критеријуме на основу којих се методолошка погодност задатка може проценити унапред.

Сprovedена анализа води до неколико закључака.

Прво, графички метод је равноправан аналитичком, а у одређеним класама проблема и погоднији од њега. То су задаци у којима се тражи број, а не вредност решења, задаци са параметром и трансцендентне једначине код којих решење у затвореном облику не постоји. У тим случајевима графички приступ није помоћно средство, већ једини изводљив пут.

Друго, графички метод није самосталан. Са слике се види да се две криве секу, али не и да пресека нема више него што се на слици види. За то

је потребно знати да је функција монотона на одређеном интервалу или да јој је скуп вредности ограничен, па се претрага може свести на коначан део домена. Те особине утврђују се аналитички, пре него што се било шта нацрта. График, дакле, не замењује аналитички апарат, већ га користи.

Треће, ограничења графичког метода нису случајна, већ следе из саме природе метода, па се могу и предвидети. Прво се јавља код функција које се не добијају низом познатих трансформација једне елементарне функције. Њихов график се не може поуздано скицирати поступком изложеним у глави 3, па је потребна засебна анализа или софтверска подршка. Друго ограничење тиче се прецизности читавања тачних вредности решења са графика, чак и ако је он прецизно нацртан. То ограничење софтвер не уклања, јер није реч о томе колико је слика прецизна, већ о томе да се тражена вредност мора израчунати.

Четврто, критеријуми изложени у глави 5 показују да избор методе није ствар укуса. Он се може донети унапред, на основу структуре саме функције и природе постављеног питања.

Изложени методолошки оквир непосредно је примењив у настави математике у средњој школи. Анализа задатака са пријемних испита у Одељку 4.4 показује да се знатан део тих задатака решава графички брже и са мање могућности за грешку него стандардним алгебарским поступком, што овај приступ чини употребљивим у припреми ученика за наставак школовања.

Рад отвара и један правац за даље истраживање: проширење теоријског апарата главе 3 на функције настале као производ или збир две различите елементарне функције, чиме би се уклонило ограничење описано критеријумом K1.

Библиографија

- [1] Аднађевић, Д., Каделбург, З. (2012). *Математичка анализа I*. Београд: Математички факултет.
- [2] Миловановић, Г., Ђорђевић, Р. (2005). *Математичка анализа I*. Ниш: Природно-математички факултет.
- [3] Larson, R., Hostetler, R. P. (2006). *Precalculus* (7th ed.). Brooks Cole.
- [4] Stewart, J., Clegg, D., Watson, S. (2020). *Calculus: Early Transcendentals* (9th ed.). Boston: Cengage Learning.
- [5] Gelfand, I. M., Glagoleva, E. G., Shnol, E. E. (1990). *Functions and Graphs*. Boston: Birkhäuser.
- [6] Универзитет у Београду - Математички факултет. *Сџари пријемни испити*. Доступно на: https://www.matf.bg.ac.rs/upis-oas/#stari_prijemni (приступљено [09. август 2026.]).