

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Невена Остојић

АНАЛИТИЧКЕ МЕТОДЕ У
ЕЛЕМЕНТАРНОЈ МАТЕМАТИЦИ СА
ОСВРТОМ НА ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ
НЕЈЕДНАКОСТИ И ПРИМЕНЕ У
ГЕОМЕТРИЈИ

мастер рад

Београд, 2026.

Ментор:

др Миљан КНЕЖЕВИЋ, доцент

Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Марек СВЕТЛИК, доцент

Универзитет у Београду, Математички факултет

др Милош ЂОРИЋ, доцент

Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: _____

Породици и пријатељима

Наслов мастер рада: Аналитичке методе у елементарној математици са освртом на тригонометријске неједнакости и примене у геометрији

Резиме: Предмет овог мастер рада су аналитичке методе у елементарној математици, са посебним нагласком на тригонометријске неједнакости и њихове примене у геометрији. У раду се систематски излажу класични аналитички приступи у доказивању неједнакости — монотоност функција, укључујући и монотоност функција више променљивих, конвексност функција, неједнакост између аритметичке и геометријске средине, Јенсенова неједнакост и одабране геометријске неједнакости у троуглу. Централни део рада посвећен је тригонометријским идентитетима и неједнакостима у троуглу, најчешћим облицима тригонометријских супституција и њиховој примени у доказивању аналитичких неједнакости, при чему су посебно обрађене Вилкерова, Куса–Хајгенсова и Хајгенсова неједнакост. У завршном делу рада представљени су карактеристични задаци са међународних и балканских математичких олимпијада, укључујући и одабране геометријске примере. Циљ рада је да послужи као методички ресурс наставницима и ученицима средњих школа у припреми за такмичења вишег нивоа, као и као основа за даље изучавање аналитичких неједнакости.

Кључне речи: неједнакости, тригонометријске неједнакости, тригонометријске супституције, конвексност функција, Јенсенова неједнакост, АГ неједнакост, Вилкерова неједнакост, Куса–Хајгенсова неједнакост, монотоност функција, геометријске неједнакости, олимпијадска математика

Садржај

1	Увод	1
2	Аналитички приступи у доказивању неједнакости	3
2.1	Монотоност функција	3
2.2	Конвексност функција	5
2.3	Неједнакост између средина	7
2.4	Јенсенова неједнакост	9
2.5	Геометријске неједнакости	10
3	Тригонометријске супституције у доказивању аналитичких неједнакости	14
3.1	Тригонометријске функције и неједнакости	14
3.2	Најчешћи облици тригонометријских супституција	25
3.3	Тригонометријски задаци	27
4	Разни задаци	36
5	Закључак	45
	Библиографија	47

Глава 1

Увод

Развој теорије неједнакости повезан је са радовима многих математичара, међу којима су Коши, Чебишев, Хелдер, Јенсен и други. Појава класичног дела *Inequalities* аутора Хардија, Литлвуда и Полије 1934. године означила је прекретницу и неједнакости су од збирке засебних формула прерасле у систематску математичку дисциплину [5]. Данас неједнакости имају значајну улогу у готово свим гранама математике [5, 8].

Теорија неједнакости чврсто је укореењена и у елементарну математику, где посебно долази до изражаја у раду са надареним ученицима и у припреми за математичка такмичења [8, 12, 13]. Аналитичке методе — монотоност и конвексност функција, класичне неједнакости између средина, Јенсенова неједнакост — омогућавају да се елементарни проблеми решавају на елегантан начин. Посебно место заузима употреба тригонометријских супституција, којима се алгебарски искази преводе у тригонометријске облике.

Циљ овог рада је да прикаже како се аналитичке методе примењују у доказивању елементарних неједнакости, са посебним нагласком на тригонометријске супституције и примене у геометрији. Рад је подељен у пет поглавља. У другом поглављу представљени су основни аналитички приступи: монотоност функција (укључујући функције више променљивих), конвексност, неједнакост између средина, Јенсенова неједнакост и геометријске неједнакости у троуглу. Треће поглавље чини централни део рада: тригонометријски идентитети и неједнакости у троуглу, најчешћи облици супституција, као и Вилкерова, Куса–Хајгенсова и Хајгенсова неједнакост [4, 2, 9, 6]. Четврто поглавље садржи додатне задатке, међу којима су и репрезентативни примери са међународних и балканских математичких олимпијада [12, 13, 10, 11]. Пето

поглавље чини закључак.

За писање рада коришћена је домаћа и страна литература. Од највећег значаја за писање рада била је *Inequalities* од Здравка Цветковског. Поред тога, Материјали за младе математичаре Друштва математичара Србије у којима се налазе задаци са Међународних и Балканских математичких олимпијада.

Од читаоца се очекује основно предзнање из математичке анализе на нивоу уводног универзитетског курса.

Глава 2

Аналитички приступи у доказивању неједнакости

У овом поглављу представљени су основни аналитички приступи који се користе у доказивању неједнакости: монотоност и конвексност функција, класичне неједнакости између средина, Јенсенова неједнакост и одабране геометријске неједнакости. Заједничка идеја ових приступа јесте да се дата неједнакост сведе на познато својство неке помоћне функције — њену монотоност или конвексност — чиме се проблем доказивања неједнакости своди на анализу извода те функције. Ови резултати чине аналитичку основу на коју се, у наредном поглављу, надовезују тригонометријске супституције.

2.1 Монотоност функција

Дефиниција 2.1.1. Нека је $I \subseteq \mathbb{R}$ интервал и $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ функција. Функцију f називамо:

- 1) **неоппадајућом** на I , ако за свако $x_1, x_2 \in I$ такве да је $x_1 < x_2$ важи $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- 2) **строго растућом** на I , ако за свако $x_1, x_2 \in I$ такве да је $x_1 < x_2$ важи $f(x_1) < f(x_2)$;
- 3) **нерастућом** на I , ако за свако $x_1, x_2 \in I$ такве да је $x_1 < x_2$ важи $f(x_1) \geq f(x_2)$;

- 4) **строго опадајућом** на I , ако за свако $x_1, x_2 \in I$ такве да је $x_1 < x_2$ важи $f(x_1) > f(x_2)$.

За функцију која је растућа или опадајућа на I кажемо да је монотона на I .

Теорема 2.1.1. Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b) . Тада:

- 1) ако је $f'(x) \geq 0$ за свако $x \in (a, b)$, функција f је неоппадајућа на $[a, b]$;
- 2) ако је $f'(x) > 0$ за свако $x \in (a, b)$, функција f је строго растућа на $[a, b]$;
- 3) ако је $f'(x) \leq 0$ за свако $x \in (a, b)$, функција f је нерастућа на $[a, b]$;
- 4) ако је $f'(x) < 0$ за свако $x \in (a, b)$, функција f је строго опадајућа на $[a, b]$.

Доказ. Докажимо први део тврђења; остали делови се доказују аналогно. Нека су $x_1, x_2 \in [a, b]$ произвољни, такви да је $x_1 < x_2$. Према Лагранжовој теореме о средњој вредности, постоји $\xi \in (x_1, x_2)$ такво да је

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Пошто је $f'(\xi) \geq 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, следи $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, тј. $f(x_1) \leq f(x_2)$. $\square$

Пример 2.1.1. Докажимо да за свако $x > 0$ важи $\sin x < x$.

Посматрајмо помоћну функцију $g(x) = x - \sin x$ за $x \geq 0$. Тада је

$$g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$$

за свако $x \in \mathbb{R}$, са једнакошћу само у тачкама $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Дакле, g је строго растућа на $[0, +\infty)$, а како је $g(0) = 0$, следи $g(x) > 0$ за свако $x > 0$, тј. $\sin x < x$.

Монотоност функција више променљивих

За функције више променљивих појам монотоности није јединствено дефинисан. За потребе доказивања неједнакости најчешће се посматра монотоност по појединачним променљивима [7].

Дефиниција 2.1.2. Нека је $D \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Функција f је **растућа по i -тој променљивој** на D , ако за фиксирани вредности $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ функција једне променљиве

$$\varphi_i(t) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

монотono је растућа. Ако ово својство важи за свако $i = 1, 2, \dots, n$, кажемо да је f **монотono растућа по свакој променљивој**.

Теорема 2.1.2. Нека је $D \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен и конвексан скуп и нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ има непрекидне парцијалне изводе на D . Ако је $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \geq 0$ за свако $x \in D$, онда је f неоппадајућа по i -тој променљивој. Ако важи строго неједнакост, f је строго растућа по i -тој променљивој.

Доказ. Нека су $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ фиксирани и посматрајмо функцију $\varphi_i(t) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Тада је

$$\varphi_i'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0.$$

Према **Теорему 2.1.1**, φ_i је неоппадајућа, па је f неоппадајућа по i -тој променљивој. $\square$

Ако је функција f монотono растућа по свакој променљивој, тада за $x, y \in D$ такве да $x_i \leq y_i$ за свако i важи $f(x) \leq f(y)$. Ово својство се назива монотоност по координатном уређењу.

Пример 2.1.2. Посматрајмо функцију $f : (0, +\infty)^n \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисану са $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$. За свако $i = 1, 2, \dots, n$ важи

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \prod_{j \neq i} x_j > 0,$$

пошто су сви $x_j > 0$. Дакле, f је строго растућа по свакој променљивој. Одатле следи да за свака два низа позитивних бројева $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ такве да важи $x_i \leq y_i$ за свако i , важи

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq y_1 y_2 \cdots y_n.$$

2.2 Конвексност функција

Дефиниција 2.2.1. За функцију $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ кажемо да је конвексна на интервалу $[a, b]$ ако за свако $x, y \in [a, b]$ и за свако $\alpha \in (0, 1)$ важи

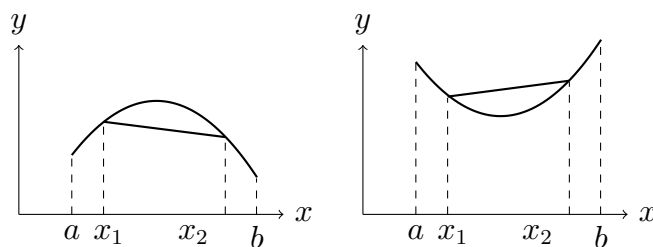
$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Уколико важи строга неједнакост, онда кажемо да је f строго конвексна. За функцију f ћемо рећи да је конкавна ако је $-f$ конвексна функција (в. [5, 8]).

Теорема 2.2.1. Нека је $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ функција која има други извод на интервалу (a, b) . Тада важи:

- 1) ако је $f''(x) \geq 0$ за свако $x \in (a, b)$, онда је функција f конвексна на (a, b) ;
- 2) ако је $f''(x) > 0$ за свако $x \in (a, b)$, онда је функција f строго конвексна на (a, b) .

Услов $f''(x) > 0$ је довољан, али није неопходан за строго конвексност. На пример, функција $f(x) = x^4$ строго је конвексна на $\mathbb{R}$, иако је $f''(0) = 0$.



Слика 2.1: Конкавна и конвексна функција

Пример 2.2.1. Посматрајмо тригонометријске функције:

- 1) $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x < 0$ за $x \in (0, \pi)$, па је функција $\sin$ конкавна на интервалу $(0, \pi)$
- 2) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f''(x) = -\cos x < 0$ за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, па је функција $\cos$ конкавна на интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$
- 3) $f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$, а пошто су $\sin x > 0$ и $\cos^3 x > 0$ за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, онда је и $\operatorname{tg}'' x > 0$ за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, па је функција tg конвексна на интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$
- 4) $f(x) = \operatorname{ctg} x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow f''(x) = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$, а пошто су $\cos x > 0$ и $\sin^3 x > 0$ за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, онда је и $\operatorname{ctg}'' x > 0$ за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, па је функција ctg конвексна на интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$

Све ово смо одредили помоћу **Теореме 2.1.1.**

2.3 Неједнакост између средина

Теорема 2.3.1. (Неједнакост између аритметичке и геометријске средине)[10]

Нека је a дата n -торка позитивних бројева. Тада је

$$A_n(a) \geq G_n(a),$$

a једнакост важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Доказ. Теорему ћемо доказати математичком индукцијом. За $n = 2$ дата неједнакост постаје

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Претпоставимо да је тврђење тачно за $n - 1 \geq 2$, тј. да важи

$$A_{n-1}(a) \geq G_{n-1}(a)$$

и покажимо да важи и за n . Можемо претпоставити, без умањења општости, да је $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Тада је

$$\frac{\overbrace{a_1 + a_1 + \dots + a_1}^n}{n} \leq A_n(a) \leq \frac{\overbrace{a_n + a_n + \dots + a_n}^n}{n} = a_n$$

Приметимо да је $a_n - A_n(a) \geq 0$, тј. $a_1 + a_n - A_n(a) \geq a_1 \geq 0$.

Посматрајмо $n - 1$ позитивних бројева $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_1 + a_n - A_n(a)$, за које можемо применити индукцијску претпоставку, односно важи

$$\frac{a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_1 + a_n - A_n(a)}{n - 1} \geq \sqrt[n-1]{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot (a_1 + a_n - A_n(a))},$$

Како је $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = n \cdot A_n(a)$, претходна неједнакост постаје

$$\frac{n \cdot A_n(a) - A_n(a)}{n - 1} = A_n(a) \geq \sqrt[n-1]{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot (a_1 + a_n - A_n(a))}.$$

Одатле следи да је

$$\begin{aligned} A_n^{n-1}(a) &\geq a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot (a_1 + a_n - A_n(a)), \text{ тј.} \\ A_n^n(a) &\geq A_n(a) \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot (a_1 + a_n - A_n(a)). \end{aligned}$$

Покажимо сада да је

$$A_n(a) \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot (a_1 + a_n - A_n(a)) \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = G_n^n(a).$$

ГЛАВА 2. АНАЛИТИЧКИ ПРИСТУПИ У ДОКАЗИВАЊУ НЕЈЕДНАКОСТИ

Ако претходну неједнакост поделимо са $a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1} \geq 0$, добијамо еквивалентну неједнакост

$$\begin{aligned} A_n(a)(a_1 + a_n - A_n(a)) &\geq a_1 a_n \iff A_n(a)a_1 - a_1 a_n + A_n(a)(a_n - A_n(a)) \geq 0 \\ &\iff -a_1(a_n - A_n(a)) + A_n(a)(a_n - A_n(a)) \geq 0 \\ &\iff (A_n(a) - a_1)(a_n - A_n(a)) \geq 0. \end{aligned}$$

Како су $A_n(a) - a_1$ и $a_n - A_n(a)$ позитивни бројеви, па је и њихов производ позитиван број. Дакле, претходна неједнакост је тачна, па следи да је $A_n^n(a) \geq G_n^n(a)$, тј. $A_n(a) \geq G_n(a)$.

Докажимо још да једнакост важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, очигледно је да једнакост важи. Претпоставимо да су бар два броја из низа међусобно различита, нека је на пример $a_1 \neq a_2$. Тада је

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &= \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \cdots + a_n}{n} \\ &\geq \left(\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 a_3 \cdots a_n \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\geq (a_1 a_2 a_3 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

јер је

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \text{ за } a_1 \neq a_2.$$

Овим је доказ завршен. □

Теорема 2.3.2. *(Неједнакости између аритметичке и квадратне средине)[10]*
Нека је a дапа n -торка позитивних бројева. Тада је

$$K_n(a) \geq A_n(a),$$

а једнакост важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Доказ. Ако се у идентитету

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 &= \\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2(a_1 a_2 + \cdots + a_1 a_n + a_2 a_3 + \cdots + a_2 a_n + \cdots + a_{n-1} a_n), \end{aligned}$$

на десној страни једнакости искористи следећа неједнакост за a_i и a_k , где су $1 \leq i, k \leq n$, $2a_i a_k \leq a_i^2 + a_k^2$, добијамо неједнакост

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

Како су $a_1, a_2, \dots, a_n$ позитивни, следи да је

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \sqrt{n} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2},$$

тј.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Остаје још да се покаже да једнакост важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, очигледно је да имамо једнакост. С друге стране, ако претпоставимо да су бар два броја из низа бројева $a_1, a_2, \dots, a_n$ различита међусобно, на пример $a_1 \neq a_2$, имамо да је

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &= \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + a_3 + \cdots + a_n}{n} \\ &\leq \sqrt{\frac{2 \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}{n}} < \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}{n}}, \end{aligned}$$

јер је коришћењем

$$\frac{(a_1 + a_2)^2}{2} < a_1^2 + a_2^2 \text{ за } a_1 \neq a_2.$$

Овим је доказ завршен. □

2.4 Јенсенова неједнакост

Теорема 2.4.1. (Јенсенова неједнакост) [5, 8] Нека је $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција на интервалу (a, b) и нека су $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ненегативни реални бројеви, такви да је $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. Тада за све $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ важи неједнакост

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i),$$

иј.

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

Ако је функција f строго конвексна, тада једнакост важи ако и само ако су сви x_i једнаки међу собом или су сви α_i сем једног једнаки нули.

Одговарајућа шврђења важе за конкавне функције.

Доказ. Неједнакост ћемо доказати математичком индукцијом.

За $n = 2$ неједнакост се своди на дефиницију конвексне функције и важи по претпоставци.

Претпоставимо да неједнакост важи за произвољних $n - 1$ бројева x интервала (a, b) и произвољних $n - 1$ ненегативних коефицијената α чији је збир једнак 1.

Нека су $x_1, x_2, \dots, x_n$ произвољни елементи интервала (a, b) и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ненегативни реални бројеви за које је $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Означимо са $\mu = \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Ако је $\mu \neq 0$, тада су $\frac{\alpha_2}{\mu}, \dots, \frac{\alpha_n}{\mu}$ ненегативни бројеви (њих $n - 1$) чији је збир једнак 1, па важи

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) &= f\left(\alpha_1 x_1 + \mu \left(\frac{\alpha_2}{\mu} x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\mu} x_n\right)\right) \\ &\leq \alpha_1 f(x_1) + \mu f\left(\frac{\alpha_2}{\mu} x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\mu} x_n\right) \\ &\leq \alpha_1 f(x_1) + \mu \left[\frac{\alpha_2}{\mu} f(x_2) + \dots + \frac{\alpha_n}{\mu} f(x_n)\right] = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i), \end{aligned}$$

при чему прва неједнакост следи на основу дефиниције конвексне функције, а друга по индуктивној претпоставци. Једнакост важи (у случају строге конвексности) ако и само ако су сви x_i једнаки међу собом или су сви α_i сем једног једнаки нули.

На овај начин је доказана неједнакост за конвексне функције. За конкавне функције се доказује на исти начин. $\square$

2.5 Геометријске неједнакости

Систематски преглед геометријских неједнакости може се наћи у [10, 11]. У наставку су приказани неки од класичних резултата ове области, међу којима и неједнакости које повезују основне елементе троугла — странице, висине, површину и полупречнике уписане и описане кружнице.

Лема 2.5.1. Нека је дао троугао ABC са страницама a, b и c , тада је

$$\begin{aligned}h_a &\leq \sqrt{s(s-a)} \\h_b &\leq \sqrt{s(s-b)} \\h_c &\leq \sqrt{s(s-c)}\end{aligned}$$

при чему је $s = \frac{a+b+c}{2}$ (полюобим).

Доказ. Користићемо Херонов образац $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Како је површина троугла $P = \frac{ah_a}{2}$, добијамо

$$h_a = \frac{2P}{a} = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-a)} \frac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{\frac{a}{2}}.$$

Применом АГ неједнакости имамо $\sqrt{(s-b)(s-c)} \leq \frac{s-b+s-c}{2} = \frac{a}{2}$, па је

$$h_a \leq \sqrt{s(s-a)}.$$

Аналогно се добија да је $h_b \leq \sqrt{s(s-b)}$, $h_c \leq \sqrt{s(s-c)}$. □

Пример 2.5.1. (Ојлерова неједнакост) Нека су R и r полупречници описане и уписане кружнице троугла ABC . Доказати да је $R \geq 2r$.

Решење. Познато је да важи

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Пошто је $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ (**Тврђење 3.1.3**, тачка **6**)), добијамо

$$r \leq 4R \cdot \frac{1}{8} = \frac{R}{2},$$

односно $R \geq 2r$. Једнакост важи за једнакостранични троугао. □

Пример 2.5.2. (Вајценбекова неједнакост) За сваки троугао са страницама a, b, c и површином P важи

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}P.$$

Решење. Према Хероновој формули у облику

$$16P^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4,$$

довољно је доказати неједнакост $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 48P^2$. Користећи Херонов облик, разлика леве и десне стране једнака је

$$2((a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2) \geq 0.$$

Дакле, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}P$. Једнакост важи за једнакостранични троугао. $\square$

Последица 2.5.1. Ако су h_a, h_b, h_c висине троугла ABC , онда важи

$$\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} \geq 2\sqrt{3}.$$

Доказ. Пошто је $h_a = \frac{2P}{a}$, имамо $\frac{a}{h_a} = \frac{a^2}{2P}$. Зато је

$$\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2P} \geq 2\sqrt{3},$$

по Вајценбековој неједнакости [3]. $\square$

Задатак 2.1. Нека су s и P полуобим и површина троугла ABC . Доказати да је $s^2 \geq 3\sqrt{3}P$.

Решење. Користећи Равијеву супституцију имамо $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$. Тада је $s = x + y + z$.

Заменом у Херонову формулу за површину троугла добијамо

$$P = \sqrt{s \cdot (s - y - z) \cdot (s - z - x) \cdot (s - x - y)},$$

па је

$$P = \sqrt{sxyz}.$$

Квадрирањем претходне једнакости добијамо

$$P^2 = sxyz.$$

Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине имамо

$$xyz \leq \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3, \text{ па је } xyz \leq \frac{s^3}{27}.$$

Даље,

$$P^2 = sxyz \leq \frac{s^4}{27}, \text{ па је } P \leq \frac{s^2}{3\sqrt{3}}.$$

Из претходне неједнакости следи $s^2 \geq 3\sqrt{3}P$, чиме је задатак завршен.

Задатак 2.2. (Финслер–Хадвигер) За троугао са страницама a, b, c и површином P доказати да је

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}P + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Упутство. Задатак представља појачање Вајценбекове неједнакости.

У формулу $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ заменимо следеће једнакости косинусне теореме:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ и $P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$. Добијамо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4P}$, па је

$a^2 = (b-c)^2 + 4P \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Аналогно, $b^2 = (c-a)^2 + 4P \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ и $c^2 = (a-b)^2 + 4P \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$.

Тада је

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4P \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right).$$

Како је $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$ (**Тврђење 3.1.3**, тачка **13**)), тиме је неједнакост доказана.

Глава 3

Тригонометријске супституције у доказивању аналитичких неједнакости

Ово поглавље чини централни део рада. Основна идеја тригонометријске супституције јесте да се алгебарски услов дат у задатку — на пример услов да три позитивна броја задовољавају одређену релацију — препозна као тригонометријски идентитет који важи за углове троугла, чиме се алгебарски проблем своди на познату тригонометријску неједнакост. У наставку су приказани класични тригонометријски идентитети и неједнакости у троуглу, најчешћи облици оваквих супституција, као и неколико класичних неједнакости — Вилкерова, Куса–Хајгенсова и Хајгенсова — чији докази илуструју примену помоћне функције у комбинацији са тригонометријским идентитетима.

3.1 Тригонометријске функције и неједнакости

Тригонометријски идентитети и неједнакости у троуглу представљени у овом одељку сакупљени су према [8]. Ови идентитети и неједнакости чине основу за тригонометријске супституције које се уводе у наредном одељку, а које се, кроз задатке у одељку **3.3**, показују као ефикасан алат за доказивање алгебарских неједнакости.

Тврђење 3.1.1. *Нека су α, β и γ углови датог троугла. Тада имамо следеће*

ГЛАВА 3. ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ СУПСТИТУЦИЈЕ У ДОКАЗИВАЊУ АНАЛИТИЧКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ

идејте:

- 1) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$
- 2) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$
- 3) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$
- 4) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma$
- 5) $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = 1$
- 6) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1$
- 7) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$
- 8) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$

Тврђење 3.1.2. Нека су α, β и γ произвољни реални бројеви. Тада имамо следеће идеје:

- 1) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\gamma+\alpha}{2}$
- 2) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma+\alpha}{2}$

У наставку ће бити приказане неједнакости које се пишу улова у дајом шроулу, које ће се користити у доказивању неједнакости коришћењем тригонометријских супституција.

Тврђење 3.1.3. Нека су α, β и γ улови дајот шроула. Тада имамо следеће неједнакости, трисане у четири целине.

а) **Основне неједнакости за $\sin$ и $\cos$ улова шроула:**

$$1) \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Доказ. Функција $\sin x$ је конкавна на интервалу $(0, \pi)$, тада на основу Јенсенове неједнакости важи

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} &\leq \sin \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \iff \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &\leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

□

$$2) \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Доказ. Како је функција $\sin x > 0$ за свако $x \in (0, \pi)$, може се применити неједнакост између аритметичке и геометријске средине

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \left(\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \right)^3 \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

У доказивању ове неједнакости искоришћена је неједнакост 1). □

$$3) \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$$

Доказ. Како је $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ добија се

$$\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta) = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Даље,

$$\begin{aligned} 3 - 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) &= 3 - 2(\cos \alpha + \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta + 1 + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha - 2 \cos \beta + \\ &\quad 2 \cos \alpha \cos \beta \\ &= (\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (1 - \cos \alpha - \cos \beta)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

што је еквивалентно са

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

□

$$4) \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{1}{8}$$

Доказ. Како је $\cos(\alpha + \beta) = -\cos \gamma$ добија се

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \cos \gamma \\ &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos \gamma) \cos \gamma \\ &= \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) \cos \gamma - \frac{\cos^2 \gamma}{2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\cos \gamma - \frac{\cos(\alpha - \beta)}{2} \right)^2 + \frac{\cos^2(\alpha - \beta)}{8}$$

$$\leq \frac{\cos^2(\alpha - \beta)}{8} \leq \frac{1}{8}$$

$$\text{Дакле, } \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{1}{8}.$$

□

б) Неједнакости за ђоловине уђлова:

$$5) \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$$

Доказ. Слично као у доказу неједнакости **1)** ће бити

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}}{3} \leq \sin \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\iff \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$$

пошто је функција $\sin x$ конкавна на интервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

□

$$6) \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$

Доказ. Слично као у доказу неједнакости **2)** користи се неједнакост између аритметичке и геометријске средине

$$\sqrt[3]{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}} \leq \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}}{3} \leq \frac{1}{2}$$

$$\iff \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

□

$$7) \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Доказ. Како су $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, значи да су $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Функција $\cos x$ је конкавна на интервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, па се може применити Јенсенова неједнакост.

$$\frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}}{3} \leq \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{6} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

□

$$8) \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Доказ. Како су $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, значи да $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$, па $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma > 0$. Под овим условима се може употребити неједнакост између аритметичке и геометријске средине.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}} &\leq \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \iff \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} &\leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

□

в) Квадратне неједнакости:

$$9) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{9}{4}$$

Доказ. Користећи идентитет

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma$$

и применом неједнакости **4)** добија се

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq 2 + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{4}$$

□

$$10) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}$$

Доказ. Користећи идентитет

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = 1$$

добија се

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Применом неједнакости **6)** само са знаком $-$ испред биће

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \geq 1 - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

□

$$11) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}$$

$$\text{Доказ. } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 3 - (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) \geq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \quad \square$$

$$12) \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} \leq \frac{9}{4}$$

$$\text{Доказ. } \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 3 - (\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2}) \leq 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \quad \square$$

ī) Неједнакости за tg и ctg :

$$13) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$$

Доказ. Како је функција $\operatorname{tg} x$ конвексна на интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$ може се користити Јенсенова неједнакост.

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{3} &\geq \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta + \gamma}{6} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \iff \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &\geq \sqrt{3} \end{aligned}$$

□

$$14) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \geq 3\sqrt{3}$$

Доказ. Како је функција $\operatorname{ctg} x$ конвексна на интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$ може се користити Јенсенова неједнакост.

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \geq 3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta + \gamma}{6} = 3\sqrt{3}$$

□

$$15) \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{3}$$

ГЛАВА 3. ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ СУПСТИТУЦИЈЕ У ДОКАЗИВАЊУ
АНАЛИТИЧКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ

Доказ. Прво имамо

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Даље,

$$\begin{aligned} 1 &\geq \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \\ \cos \gamma &= -\cos(\alpha + \beta) = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Када се саберу претходна неједнакост и једнакост добија се

$$2 \sin \alpha \sin \beta \leq 1 + \cos \gamma.$$

$$\iff 2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \leq (1 + \cos \gamma) \sin(\alpha + \beta)$$

$$\iff 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq (1 + \cos \gamma) \sin(\alpha + \beta)$$

$$\iff \frac{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta (1 + \cos \gamma)} \leq \frac{(1 + \cos \gamma) \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta (1 + \cos \gamma)}$$

$$\iff \frac{2 \sin \gamma}{1 + \cos \gamma} \leq \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Тада је

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \geq \frac{2 \sin \gamma}{1 + \cos \gamma} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4 \sin^2 \gamma + 2 \cos^2 \gamma + 2 \cos \gamma}{(1 + \cos \gamma) \sin \gamma} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3 \sin^2 \gamma + (1 + \cos \gamma)^2}{(1 + \cos \gamma) \sin \gamma} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{3} \sin^2 \gamma \cdot (1 + \cos \gamma)^2}{(1 + \cos \gamma) \sin \gamma} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Дакле,

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{3}.$$

□

Тврђење 3.1.4. Нека су α, β и γ улови оштроуглог троугла. Тада важи

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq 3\sqrt{3}.$$

ГЛАВА 3. ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ СУПСТИТУЦИЈЕ У ДОКАЗИВАЊУ АНАЛИТИЧКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ

Доказ. Како је у питању оштроугли троугао, важи $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$. Функција $\operatorname{tg} x$ је конвексна на $(0, \frac{\pi}{2})$, па је могуће применити Јенсенову неједнакост.

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$$

□

Теорема 3.1.1. *Нека су α, β и $\gamma \in (0, \pi)$. Услови α, β и γ су услови троугла ако и само ако важи*

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1.$$

Доказ. $\Rightarrow$ Нека су α, β и γ углови произвољног троугла. Тада је $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, па је $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}$. Тада је

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \\ &\iff \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Нека је $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, $z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$. Услов је

$$xy + yz + zx = 1.$$

Тада је именилац у формули за $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ једнак

$$1 - xy - yz - zx = 0.$$

Пошто је $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \in (0, \frac{3\pi}{2})$ и пошто се у овом положају не добија $\frac{3\pi}{2}$, следи $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$, па је $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Дакле, α, β и γ су углови троугла.

□

Теорема 3.1.2. *Нека су α, β и $\gamma \in (0, \pi)$. Услови α, β и γ су услови троугла ако и само ако важи*

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = 1.$$

Доказ. $\Rightarrow$ Нека су α, β и γ углови произвољног троугла. Тада имамо

$$\begin{aligned} &\sin^2 \frac{\gamma}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \\ &= \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \right) \\ &= \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

ГЛАВА 3. ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ СУПСТИТУЦИЈЕ У ДОКАЗИВАЊУ
АНАЛИТИЧКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ

$$\begin{aligned}
 &= \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2} (\cos \alpha + \cos \beta) \\
 &= \frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2},
 \end{aligned}$$

па је

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = 1.$$

$\Leftarrow$ Нека α, β и $\gamma \in (0, \pi)$ и важи

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = 1.$$

Пошто је $0 < \alpha + \beta < 2\pi$, онда постоји $\gamma_1 \in (-\pi, \pi)$ тако да је $\alpha + \beta + \gamma_1 = \pi$.

Према претходном мора важити

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma_1}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma_1}{2} = 1.$$

Ако одузмемо једнакост са γ и γ_1 добијамо

$$\left(\sin \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\gamma_1}{2} \right) \left(\sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma_1}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \right) = 0.$$

Али

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma_1}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} &= \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma_1}{2} + \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \\
 &= \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma_1}{2} + \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \sin \frac{\gamma_1}{2} = \sin \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha-\beta}{2}.
 \end{aligned}$$

Пошто је $\frac{\gamma}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\frac{\alpha-\beta}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ следи

$$\sin \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha-\beta}{2} > 0, \text{ па је } \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma_1}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} > 0.$$

Изнад смо добили $\left(\sin \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\gamma_1}{2} \right) \left(\sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma_1}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \right) = 0$, а пошто је $\sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma_1}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} > 0$ мора бити

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\gamma_1}{2}, \text{ па је } \gamma = \gamma_1.$$

Дакле, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, што значи да су α, β и γ углови троугла.

□

Теорема 3.1.3. (Вилкер) За свако $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ важи

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\operatorname{tg} x}{x} > 2.$$

Елеџанџан доказ ове неједнакости дао је Џу у [4]. Различите генерализације и уланчавања ове неједнакости са Хајџенсовом и Лазаревићевом даје су у [2, 9, 1].

Доказ. После множења жељене неједнакости позитивним бројем $x^2 \cos x$ природно се јавља помоћна функција

$$f(x) = \sin^2 x \cos x + x \sin x - 2x^2 \cos x.$$

Тада је

$$f'(x) = 3 \sin x - 3 \sin^3 x - 3x \cos x + 2x^2 \sin x,$$

$$f''(x) = \cos x (2x^2 + 7x \operatorname{tg} x - 9 \sin^2 x).$$

Означимо $g(x) = 2x^2 + 7x \operatorname{tg} x - 9 \sin^2 x$. Пошто за $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ важе познате неједнакости $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, следи да је

$$g(x) > 2x^2 + 7x \cdot x - 9x^2 = 0.$$

Како је и $\cos x > 0$ на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, важи $f''(x) > 0$, па је f' строго растућа функција.

Из $f'(0) = 0$ следи $f'(x) > 0$ за $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, па је и f строго растућа. Из $f(0) = 0$ добијамо да је $f(x) > 0$ за све $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Дељењем неједнакости $f(x) > 0$ са $x^2 \cos x > 0$, добијамо

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\operatorname{tg} x}{x} - 2 > 0,$$

чиме је тврђење доказано. □

Теорема 3.1.4. (Куса–Хајџенс) За свако $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ важи

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{2 + \cos x}{3}.$$

Ова неједнакост, њене генерализације и побољшања су детаљно истражени у [1, 2].

Доказ. Неједнакост је еквивалентна тврђењу да је помоћна функција

$$g(x) = x(2 + \cos x) - 3 \sin x$$

позитивна на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Три пута узастопним диференцирањем добија се

$$g'(x) = 2 + \cos x - x \sin x - 3 \cos x = 2 - 2 \cos x - x \sin x,$$

$$g''(x) = 2 \sin x - \sin x - x \cos x = \sin x - x \cos x,$$

$$g'''(x) = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x.$$

За $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ је $x \sin x > 0$, па је g'' строго растућа. Како је $g''(0) = 0$, следи $g''(x) > 0$, па је g' строго растућа. Из $g'(0) = 0$ имамо $g'(x) > 0$, па је и g строго растућа. Најзад, $g(0) = 0$ имплицира $g(x) > 0$ за све $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, чиме је неједнакост доказана. $\square$

Теорема 3.1.5. (Хајџенс) За свако $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ важи

$$2 \sin x + \operatorname{tg} x > 3x.$$

Нова побољшања и генерализације Хајџенсове неједнакости даћи су у [6, 1].

Доказ. Посматрајмо помоћну функцију

$$h(x) = 2 \sin x + \operatorname{tg} x - 3x.$$

Њен први извод је

$$h'(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3.$$

Множењем ове неједнакости са $\cos^2 x > 0$, добија се да је $h'(x) > 0$ еквивалентно са

$$2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1 > 0.$$

Означимо $t = \cos x \in (0, 1)$ за $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Тада је

$$2t^3 - 3t^2 + 1 = (1 - t)^2(1 + 2t).$$

Пошто је $t \in (0, 1)$, важи $(1 - t)^2 > 0$ и $1 + 2t > 0$, па је $2t^3 - 3t^2 + 1 > 0$, односно $h'(x) > 0$. Дакле, функција h је строго растућа на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Пошто је $h(0) = 0$, следи $h(x) > 0$ за све $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, чиме је тврђење доказано. $\square$

3.2 Најчешћи облици тригонометријских супституција

- 1) Нека су α, β и γ углови произвољног троугла.

Нека је $A = \frac{\pi-\alpha}{2}, B = \frac{\pi-\beta}{2}$ и $C = \frac{\pi-\gamma}{2}$.

Тада је $A + B + C = \pi$, штавише $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$. Ова супституција нам омогућава да пренесемо углове произвољног троугла на углове оштроуглог троугла, а то је битно због коришћења Јенсенове неједнакости.

Тада имамо:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \cos A, \quad \sin \frac{\beta}{2} = \cos B, \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \cos C.$$

- 2) (*Равијева супституција*) Нека су x, y и z позитивни реални бројеви. Тада постоји троугао са страницама дужина $a = x + y, b = y + z, c = z + x$.

Јасно је $(x, y, z) = (s - b, s - c, s - a)$, где је $s = \frac{a+b+c}{2} = x + y + z$.

- 3) Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је $ab + bc + ca = 1$.

Пошто је $\operatorname{tg} x \in (0, \infty)$ за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ и због **Теореме 3.1.1.** можемо користити супституције

$$a = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad b = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad c = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2},$$

где су α, β и γ углови троугла, па је $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

- 4) Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је $ab + bc + ca = 1$.

Тада, према **3)** и **1)** можемо искористити супституције

$$a = \operatorname{ctg} \alpha, \quad b = \operatorname{ctg} \beta, \quad c = \operatorname{ctg} \gamma,$$

где су α, β и γ углови оштроуглог троугла, па је $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

- 5) Нека су a, b и c позитивни реални бројеви тако да важи

$$a + b + c = abc, \text{ тј. } \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = 1.$$

Онда, према **3)** имамо

ГЛАВА 3. ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ СУПСТИТУЦИЈЕ У ДОКАЗИВАЊУ АНАЛИТИЧКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, & \frac{1}{b} &= \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, & \frac{1}{c} &= \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}, \\ \text{тј. } a &= \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, & b &= \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}, & c &= \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}, \end{aligned}$$

где су α, β и γ углови произвољног троугла.

- 6) Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је $a + b + c = abc$.
Онда, према 5) и 1) можемо користити следеће супституције

$$a = \operatorname{tg} \alpha, \quad b = \operatorname{tg} \beta, \quad c = \operatorname{tg} \gamma,$$

где су α, β и γ углови оштроуглог троугла, тј. $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

- 7) Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1.$$

Пошто су a, b и c позитивни реални бројеви можемо закључити да мора бити $a, b, c < 1$. Тада према **Теорема 3.1.2.** можемо користити следеће супституције

$$a = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad b = \sin \frac{\beta}{2}, \quad c = \sin \frac{\gamma}{2},$$

где су α, β и γ углови произвољног троугла, тј. $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

- 8) Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1.$$

Онда, према 7) и 1) можемо користити следеће супституције

$$a = \cos \alpha, \quad b = \cos \beta, \quad c = \cos \gamma,$$

где су α, β и γ углови оштроуглог троугла.

- 9) Нека су x, y, z позитивни реални бројеви.

Тада изрази:

$$\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}, \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}}, \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}}$$

са супституцијама из **2)** постају

$$\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}, \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

где су a, b, c дужине страница троугла. Али приметимо да

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}, \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Дакле, за дате изразе је једноставно направити супституције: $\sin \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\gamma}{2}$, где су α, β и γ углови троугла.

10) Слично као у **9)** за изразе:

$$\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}}, \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}}, \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}}$$

можемо направити супституције $\cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\beta}{2}, \cos \frac{\gamma}{2}$, где су α, β и γ углови троугла.

3.3 Тригонометријски задаци

У овом одељку приказани су карактеристични задаци у којима се тригонометријске супституције појављују као природан алат за доказивање алгебарских неједнакости.

Задатак 3.1 ([8]). Доказати да за свако $x \in [-1, 1]$ важи следећа неједнакост:

$$\sqrt{1-x^2} \leq 1 - \frac{x^2}{2}$$

Решење. Пошто је $x \in [-1, 1]$, а лева страна садржи израз облика $\sqrt{1-x^2}$, природно је користити супституцију $x = \sin \alpha, \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, чиме се $\sqrt{1-x^2}$ своди на $\cos \alpha$.

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\sin^2 \alpha} &\leq 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \\ \cos \alpha &\leq 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \end{aligned}$$

Користећи идентитет $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ добија се:

ГЛАВА 3. ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ СУПСТИТУЦИЈЕ У ДОКАЗИВАЊУ АНАЛИТИЧКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ

$$\cos \alpha \leq 1 - \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2} = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2}.$$

Помножимо обе стране са 2 и добијамо:

$$2 \cos \alpha \leq 1 + \cos^2 \alpha.$$

Даље,

$$0 \leq 1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha = (1 - \cos \alpha)^2$$

За овај израз знамо да је позитиван, па је неједнакост тачна.

Задатак 3.2 ([8]). Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је $a + b + c = abc$. Доказати следећу неједнакост

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Решење. Услов $a + b + c = abc$ одговара тригонометријском идентитету $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$, који важи за углове троугла, па је природно узети $a = \operatorname{tg} \alpha, b = \operatorname{tg} \beta, c = \operatorname{tg} \gamma$ где су $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$, чиме дата неједнакост постаје

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma}}} \leq \frac{3}{2},$$

тј.

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Такође

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha} = 0,$$

где је $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Функција $\cos x$ је конкавна на $(0, \frac{\pi}{2})$

Применом Јенсенове неједнакости имамо

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3} \leq \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \frac{1}{2},$$

тј. имамо

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2},$$

овим је доказ завршен.

Задатак 3.3 ([8]). Нека су $x, y, z > 0$ реални бројеви. Доказати следећу неједнакост

$$\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(z+x)} + \sqrt{z(x+y)} \geq 2\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z}}.$$

Решење. Дата неједнакост је еквивалента следећој неједнакости

$$\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}} \geq 2.$$

Овакав облик израза одговара супституцији **10)** из поглавља **3.2**, па је довољно доказати

$$\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \geq 2,$$

где су α, β и γ углови троугла, тј. $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Због **1)** из поглавља **3.2**. потребно је доказати

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq 2,$$

где су α, β и γ углови оштроуглог троугла, тј. $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Пошто је $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ важи $0 < \sin \alpha \leq 1$, тј. $\sin \alpha \geq \sin^2 \alpha$, а једнакост важи ако и само ако је $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Слично, за $\beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2}]$ закључујемо

$$\sin \beta \geq \sin^2 \beta \text{ и } \sin \gamma \geq \sin^2 \gamma.$$

Тада имамо

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$$

$$= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + \sin^2 \gamma = 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \sin^2 \gamma$$

$$= 1 - \frac{1}{2}2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + 1 - \cos^2 \gamma = 2 - \cos(\pi - \gamma) \cos(\alpha - \beta) - \cos^2 \gamma$$

$$= 2 + \cos \gamma \cos(\alpha - \beta) - \cos^2 \gamma = 2 + \cos \gamma (\cos(\alpha - \beta) - \cos \gamma)$$

$$= 2 + \cos \gamma [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\pi - (\alpha + \beta))] = 2 + \cos \gamma (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$= 2 + 2 \cos \gamma \cos \alpha \cos \beta > 2.$$

ГЛАВА 3. ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ СУПСТИТУЦИЈЕ У ДОКАЗИВАЊУ АНАЛИТИЧКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ

Задатак 3.4 ([8]). Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да важи $a + b + c = 1$. Доказати следећу неједнакост

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq 1.$$

Решење. Услов $a + b + c = 1$ у комбинацији са циљаном неједнакошћу наводи на симетричну смену $a = xy, b = yz, c = zx$, чиме дата неједнакост постаје

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2\sqrt{3}xyz \leq 1,$$

где су x, y, z позитивни реални бројеви такви да је $xy + yz + zx = 1$.

Неједнакост коју смо добили је еквивалентна неједнакости

$$(xy + yz + zx)^2 + 2\sqrt{3}xyz \leq 1 + 2xyz(x + y + z)$$

или

$$x + y + z \geq \sqrt{3}.$$

Пошто добијени услов $xy + yz + zx = 1$ одговара облику из **3)** поглавља **3.2.**, можемо узети

$$x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2},$$

где су $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

На крају добијамо

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3},$$

а то знамо да је тачно из **Тврђења 3.1.3.** део **13)**.

Задатак 3.5 ([8]). Нека су $a, b, c \in (0, 1)$ позитивни реални бројеви такви да је $ab + bc + ca = 1$. Доказати следећу неједнакост

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{1-a^2}{a} + \frac{1-b^2}{b} + \frac{1-c^2}{c} \right).$$

Решење. Услов $ab + bc + ca = 1$ одговара облику који смо увели у **3)** из поглавља **3.2.**, па можемо користити следеће супституције

$$a = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad b = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad c = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2},$$

ГЛАВА 3. ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ СУПСТИТУЦИЈЕ У ДОКАЗИВАЊУ АНАЛИТИЧКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ

где су α, β и γ углови троугла.

Пошто $a, b, c \in (0, 1)$, следи $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \in (0, 1)$, тј. следи да су α, β и γ углови оштроуглог троугла.

Такође, имамо да је

$$\frac{a}{1-a^2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}.$$

Слично

$$\frac{b}{1-b^2} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{2} \quad \text{и} \quad \frac{c}{1-c^2} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{2}.$$

Због тога дата неједнакост постаје

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{2} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{2}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{2}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{2}{\operatorname{tg} \gamma} \right)$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq 3 \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} \right).$$

Пошто знамо да је $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$, довољно је доказати

$$(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)^2 \geq 3(\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha).$$

То је еквивалентно са

$$\frac{1}{2} ((\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)^2 + (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma)^2 + (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha)^2) \geq 0$$

тима је доказ завршен.

Задатак 3.6 ([8]). Нека су a, b, c ненегативни реални бројеви такви да је $ab + bc + ca = 1$. Доказати следећу неједнакост

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Решење. Услов $ab + bc + ca = 1$ поново одговара облику из **3)** поглавља **3.2.**, па можемо узети

$$a = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad b = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad c = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

где су $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Тада имамо

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} = \frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma),$$

и дата неједнакост постаје

$$\frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

тј.

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

а то знамо да је тачно из **Тврђења 3.1.3.** под 1).

Задатак 3.7 ([8]). Нека су $a, b, c \in (0, 1)$ позитивни реални бројеви такви да је $ab + bc + ca = 1$. Доказати следећу неједнакост

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Решење. Услов $ab + bc + ca = 1$ уз ограничење $a, b, c \in (0, 1)$ поново одговара облику из **3)** поглавља **3.2.**, па можемо узети

$$a = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad b = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad c = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2},$$

где су $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Користећи идентитет

$$\frac{a}{1-a^2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

дата неједнакост је еквивалентна неједнакости

$$\frac{1}{2}(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \text{тј.} \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq 3\sqrt{3},$$

а то знамо да је тачно из **Тврђења 3.1.4.**

Задатак 3.8 ([8]). Нека су x, y и z позитивни реални бројеви такви да је $xy + yz + zx = 1$. Доказати следећу неједнакост

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq 1.$$

Решење. Дата неједнакост се може записати на следећи начин

$$\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{(x+y)(x+z)}{x^2}}} + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{(y+z)(y+x)}{y^2}}} + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{(z+x)(z+y)}{z^2}}} \leq 1.$$

ГЛАВА 3. ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ СУПСТИТУЦИЈЕ У ДОКАЗИВАЊУ АНАЛИТИЧКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ

Како су x, y, z позитивни реални бројеви такви да је $xy + yz + zx = 1$, природно је узети

$$x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2},$$

где су α, β, γ углови троугла.

Имамо да је

$$\frac{(x+y)(x+z)}{x^2} = \frac{(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2})(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2})}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Аналогно је

$$\frac{(y+z)(y+x)}{y^2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{(z+x)(z+y)}{z^2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}.$$

Тада дата неједнакост постаје

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{1 + \sin \frac{\beta}{2}} + \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{1 + \sin \frac{\gamma}{2}} \leq 1.$$

Како је $\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} = 1 - \frac{1}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}$ претходна неједнакост је еквивалентна са

$$\frac{1}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{\gamma}{2}} \geq 2.$$

Применом неједнакости између аритметичке и хармонијске средине добијамо

$$\frac{1}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{\gamma}{2}} \geq \frac{9}{3 + \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Применом неједнакости за $\sin$ половине угла из **Тврђења 3.1.3.** под **5)** добија се

$$\frac{1}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{\gamma}{2}} \geq \frac{9}{3 + \frac{3}{2}} = 2$$

чиме је неједнакост доказана.

Задатак 3.9 ([8]). Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је $a+b+c = 1$. Доказати следећу неједнакост

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \leq \frac{3}{2}.$$

Решење. Имамо да је

$$(c+a)(c+b) = c^2 + ca + cb + ab = c^2 + c(a+b) + ab = c^2 + c(1-c) + ab = c + ab.$$

Слично, имамо

$$(a+b)(a+c) = a + bc \quad \text{и} \quad (b+c)(b+a) = b + ca.$$

Сада дата неједнакост постаје

$$\sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}} + \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}} \leq \frac{3}{2}.$$

Добијени облик израза одговара супституцији **9)** из поглавља **3.2.**, па је довољно показати

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2},$$

где су $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, а то знамо да је тачно из **Тврђења 3.1.3.** под **5)**.

Задатак 3.10 ([8]). Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је $a + b + c = 1$. Доказати следећу неједнакост

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c+ab} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Решење. Услов $a + b + c = 1$ поново наводи на смену $a = xy, b = yz, c = zx$, где су $x, y, z > 0$, чиме дата неједнакост постаје

$$\frac{xy}{xy + (yz)(zx)} + \frac{yz}{yz + (zx)(xy)} + \frac{xyz}{zx + (xy)(yz)} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

тј.

$$\frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

где је $xy + yz + zx = 1$.

Пошто добијени услов $xy + yz + zx = 1$ поново одговара облику из **3)** поглавља **3.2.**, можемо узети да је $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$, где су $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Тада претходна неједнакост постаје

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

тј.

$$\cos^2 \frac{\gamma}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin \beta}{2} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Користећи већ познати тригонометријски идентитет $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$ претходна неједнакост постаје

$$\frac{\cos \gamma + 1}{2} + \frac{\cos \alpha + 1}{2} + \frac{\sin \beta}{2} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

тј.

$$\cos \gamma + \cos \alpha + \sin \beta \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Имамо

$$\begin{aligned} \cos \gamma + \cos \alpha + \sin \beta &= \cos \alpha + \cos \gamma + \sin(\pi - (\alpha + \gamma)) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \gamma \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} \sin \alpha \cos \gamma + \sqrt{3} \cos \alpha \sin \gamma) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{4} + \cos^2 \alpha + \frac{3}{4} + \cos^2 \gamma \right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} (3 \sin^2 \alpha + \cos^2 \gamma + \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \gamma) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Глава 4

Разни задаци

У овом поглављу приказани су одабрани задаци који илуструју разноликост техника обрађених у претходним поглављима — Равијеву супституцију, неједнакост између аритметичке и геометријске средине, класичне неједнакости средина, Јенсенову неједнакост, као и примену монотоности функција. Поред задатака из литературе, укључени су и репрезентативни примери са Међународних (ИМО) и Балканских (ВМО) математичких олимпијада, чиме се показује како се аналитичке методе преплићу у решавању нетривијалних, такмичарских проблема.

Задатак 4.1 ([8]). Нека су a, b и c дужине страница троугла. Доказати неједнакост

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc.$$

Решење. Применимо Равијеву супституцију, тј. $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, где су $x, y, z > 0$. Тада је

$$a + b - c = 2z, \quad b + c - a = 2x, \quad c + a - b = 2y,$$

па се неједнакост своди на

$$8xyz \leq (y + z)(z + x)(x + y).$$

Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине на сваки од чинилаца добија се

$$y + z \geq 2\sqrt{yz}, \quad z + x \geq 2\sqrt{zx}, \quad x + y \geq 2\sqrt{xy},$$

па је

$$(y+z)(z+x)(x+y) \geq 8\sqrt{yz \cdot zx \cdot xy} = 8xyz,$$

чиме је тврђење доказано [8]. $\square$

Задатак 4.2 ([8]). Нека су a, b и c дужине страница троугла. Доказати неједнакост

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Решење. Докажимо прво десну неједнакост.

Пошто је $a+b > c$, онда имамо $2(a+b) > a+b+c$, тј. $a+b > s$, где је $s = \frac{a+b+c}{2}$. Слично добијамо $b+c > s$ и $a+c > s$.

Тада је

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{a}{s} + \frac{b}{s} + \frac{c}{s} = 2.$$

Тиме је доказана десна неједнакост.

Докажимо сада леву неједнакост.

Означимо $b+c = x, a+c = y, a+b = z$, онда важи

$$a = \frac{z+y-x}{2}, b = \frac{z+x-y}{2}, c = \frac{x+y-z}{2}.$$

Одатле је

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{z+y-x}{2} + \frac{z+x-y}{2} + \frac{x+y-z}{2},$$

тј.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 3 \right) \geq \frac{1}{2} (2+2+2-3) = \frac{3}{2}$$

Тиме је доказана и лева неједнакост. [8]. $\square$

Задатак 4.3 ([8]). Нека су a, b и c позитивни реални бројеви. Доказати неједнакост

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Решење. Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине на сваки од чинилаца добија се

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b+c \geq 2\sqrt{bc}, \quad c+a \geq 2\sqrt{ca},$$

па је

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc.$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$ [8]. $\square$

Задатак 4.4 ([8]). Доказати да је функција $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ строго опадајућа на интервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Решење. Први извод функције f износи

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

Знак извода одређен је бројиоцем. Означимо $\varphi(x) = x \cos x - \sin x$. Тада је

$$\varphi'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x.$$

За $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ важи $\sin x > 0$, па је $\varphi'(x) < 0$. Дакле, функција φ је строго опадајућа на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Пошто је $\varphi(0) = 0$, следи $\varphi(x) < 0$ за свако $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Тиме је $f'(x) < 0$, па је функција f строго опадајућа на посматраном интервалу. $\square$

Задатак 4.5 ([8]). Нека су $a, b > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Доказати неједнакост

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

Решење. Функција $f(x) = x^n$ за $n \in \mathbb{N}$ је конвексна на интервалу $(0, +\infty)$, пошто је $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$. Применом Јенсенове неједнакости (**Теорема 2.4.1**) на тачке a и b са тежинама $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ добија се

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} = \frac{a^n + b^n}{2},$$

чиме је тврђење доказано [8]. $\square$

Задатак 4.6 ([8]). Нека су a, b и c дужине страница троугла. Доказати неједнакост

$$8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq (a+b)(b+c)(c+a).$$

Решење. Применимо Равијеву супституцију $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, где су $x, y, z > 0$. Тада је

$$a + b - c = 2z, \quad b + c - a = 2x, \quad c + a - b = 2y,$$

па је лева страна једнака $64xyz$. Са друге стране,

$$a + b = 2z + x + y, \quad b + c = 2x + y + z, \quad c + a = 2y + x + z.$$

Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине на сваки од чинилаца:

$$2z + x + y \geq 4\sqrt[4]{z \cdot z \cdot x \cdot y} = 4\sqrt[4]{z^2xy},$$

и аналогно за остале, добија се

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 4^3 \sqrt[4]{z^2xy \cdot x^2yz \cdot y^2zx} = 64 \sqrt[4]{x^4y^4z^4} = 64xyz,$$

чиме је тврђење доказано [8]. □

Задатак 4.7 (ВМО 1985). Нека су $a, b, c, d \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ такви да важи

$$\sin a + \sin b + \sin c + \sin d = 1 \quad \text{и} \quad \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d \geq \frac{10}{3}.$$

Доказати да је $a, b, c, d \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

Решење. Уведимо смену $x = \sin a$, $y = \sin b$, $z = \sin c$, $t = \sin d$. Због $a, b, c, d \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ имамо $x, y, z, t \in [-1, 1]$. Довољно је показати да је, на пример, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$; аналогно се доказује за остале.

Користећи да је $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 1 - 2x^2$, $\cos 2b = 1 - 2y^2$, $\cos 2c = 1 - 2z^2$ и $\cos 2d = 1 - 2t^2$, услови задатка су

$$x + y + z + t = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq \frac{1}{3}.$$

Из неједнакости између аритметичке и квадратне средине следи

$$\frac{y + z + t}{3} \leq \sqrt{\frac{y^2 + z^2 + t^2}{3}}, \text{ тј. } (y + z + t)^2 \leq 3(y^2 + z^2 + t^2).$$

Комбинацијом са $y + z + t = 1 - x$ и $y^2 + z^2 + t^2 \leq \frac{1}{3} - x^2$ добија се

$$\frac{1}{3} \geq x^2 + (y^2 + z^2 + t^2) \geq x^2 + \frac{(y^2 + z^2 + t^2)^2}{3} = x^2 + \frac{(1 - x)^2}{3},$$

што сређивањем даје $2x^2 - x \leq 0$. Одатле је $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, па је $0 \leq a \leq \frac{\pi}{6}$ [12]. □

Задатак 4.8 (ИМО 1991). Дат је троугао ABC . Нека су A' , B' , C' тачке пресека симетрала углова CAB , ABC , BCA са страницама BC , CA , AB респективно и I центар уписаног круга. Доказати да је

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}.$$

Решење. Означимо са a, b, c дужине страница троугла наспрам темена A, B, C . Из теореме о симетрали угла следи $\frac{BA'}{A'C} = \frac{c}{b}$ и $BA' + A'C = a$, одакле је $BA' = \frac{ac}{b+c}$. Даље, користећи да је I пресек симетрала, добија се

$$\frac{AA'}{AI} = \frac{AI + IA'}{AI} = 1 + \frac{IA'}{AI} = 1 + \frac{BA'}{AB} = 1 + \frac{1}{c} \cdot \frac{ac}{b+c} = \frac{a+b+c}{b+c},$$

тј.

$$\frac{AI}{AA'} = \frac{b+c}{a+b+c}.$$

Аналогно се добија $\frac{BI}{BB'} = \frac{a+c}{a+b+c}$ и $\frac{CI}{CC'} = \frac{a+b}{a+b+c}$. Тада применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине следи

$$\frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \left[\frac{1}{3} \left(\frac{AI}{AA'} + \frac{BI}{BB'} + \frac{CI}{CC'} \right) \right]^3 = \frac{1}{27} \left(\frac{2(a+b+c)}{a+b+c} \right)^3 = \frac{8}{27},$$

чиме је десна неједнакост доказана.

За леву неједнакост користимо следеће тврђење за четири ненегативна броја x, y, u, v : ако је $x + y = u + v$ и $|x - y| < |u - v|$, онда је $x^3 + y^3 < u^3 + v^3$. Нека за странице a, b и c датог троугла важи $a \geq b \geq c$. Користећи формулисано тврђење за четири ненегативна броја добијамо следеће неједнакости:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &< \left(\frac{a+b+c}{2} \right)^3 + \left(\frac{a+b-c}{2} \right)^3, \\ \left(\frac{a+b-c}{2} \right)^3 + c^3 &< \left(\frac{a+b+c}{2} \right)^3 + 0^3. \end{aligned}$$

Сабирајући ове две неједнакости добијамо да је

$$a^3 + b^3 + c^3 < 2 \left(\frac{a+b+c}{2} \right)^3 = \frac{1}{4} (a+b+c)^3.$$

Користећи идентитет $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$ и претходну неједнакост, добијамо

$$\begin{aligned} \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} &= \frac{3(a+b)(b+c)(c+a)}{3(a+b+c)^3} = \frac{(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3}{3(a+b+c)^3} \\ &> \frac{(a+b+c)^3 - \frac{(a+b+c)^3}{4}}{3(a+b+c)^3} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Овим је и лева неједнакост доказана. [12]. $\square$

Задатак 4.9 (ИМО 1991). Нека је P унутрашња тачка троугла ABC . Доказати да је бар један од углова PAB, PBC, PCA мањи или једнак 30° .

Решење. Означимо: $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$, и $\angle PAB = x$, $\angle PBC = y$, $\angle PCA = z$. За углове троугла α, β, γ важе неједнакости

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3, \quad \text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma \geq \sqrt{3}.$$

На основу синусне теореме у троугловима PAB, PBC и PCA добија се

$$\frac{PA}{PB} = \frac{\sin(\beta - y)}{\sin x}, \quad \frac{PB}{PC} = \frac{\sin(\gamma - z)}{\sin y}, \quad \frac{PC}{PA} = \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin z},$$

а множењем ових једнакости следи

$$\frac{\sin(\alpha - x) \sin(\beta - y) \sin(\gamma - z)}{\sin x \sin y \sin z} = 1.$$

Приметимо да је $\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin x} = \sin \alpha (\text{ctg } x - \text{ctg } \alpha)$, и аналогно за остале. Дакле, важи

$$(\text{ctg } x - \text{ctg } \alpha)(\text{ctg } y - \text{ctg } \beta)(\text{ctg } z - \text{ctg } \gamma) = \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добија се

$$\frac{1}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \leq \left(\frac{\text{ctg } x + \text{ctg } y + \text{ctg } z - \text{ctg } \alpha - \text{ctg } \beta - \text{ctg } \gamma}{3} \right)^3,$$

одакле, коришћењем неједнакости $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3$, следи

$$\text{ctg } x + \text{ctg } y + \text{ctg } z - \text{ctg } \alpha - \text{ctg } \beta - \text{ctg } \gamma \geq 2\sqrt{3}.$$

Комбинацијом са $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{3}$ добијамо $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z \geq 3\sqrt{3}$, па је бар један од бројева $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg} y$, $\operatorname{ctg} z$ већи или једнак $\sqrt{3}$. Одатле следи да је бар један од углова x, y, z мањи или једнак 30° [12]. $\square$

Задатак 4.10 (ВМО 1996). Нека је O центар описане кружнице, а T тежиште троугла ABC . Ако је R полупречник описане, а r полупречник уписане кружнице троугла ABC , доказати да је

$$OT \leq \sqrt{R(R-2r)}.$$

Решење. Из услова $3\vec{OT} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ следи

$$9OT^2 = (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})^2 = 3R^2 + 2R^2(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma),$$

где су α, β, γ углови троугла (централни углови су $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$). Користећи $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ и синусну теорему $a = 2R \sin \alpha$, добија се

$$9OT^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2), \text{ тј. } OT^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

Са друге стране, из формуле за површину троугла $P = \frac{abc}{4R} = \frac{(a+b+c)r}{2}$ добија се $2Rr = \frac{abc}{a+b+c}$. Тражена неједнакост је еквивалентна са

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \geq \frac{abc}{a+b+c},$$

односно

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \cdot \frac{a+b+c}{3} \geq abc,$$

а ово следи из неједнакости између аритметичке и геометријске средине, пошто је $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}$ и $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$, тј. ако је троугао ABC једнакостраничан [13]. $\square$

Задатак 4.11 (ВМО 1999). Нека су P, M и N пројекције тежишта оштроуглог троугла ABC на странице AB, BC и CA редом. Доказати да важи

$$\frac{4}{27} < \frac{P(MNP)}{P(ABC)} \leq \frac{1}{4},$$

где су $P(MNP)$ и $P(ABC)$ површине троуглова MNP и ABC .

Решење. Означимо тежиште троугла са T и странице троугла са a, b, c наспрам темена A, B, C и углове α, β, γ . Тежиште дели тежишне дужи из темена у односу $1 : 2$.

Важи

$$P(ABT) = P(BCT) = P(CAT) = \frac{P(ABC)}{3}.$$

Даље, знамо да је

$$P(ABT) = \frac{TP \cdot c}{2}, P(BCT) = \frac{TM \cdot a}{2} \text{ и } P(CAT) = \frac{TN \cdot b}{2}.$$

Због тога је $\frac{c \cdot TP}{2} = \frac{P(ABC)}{3}$, тј. $TP = \frac{2P(ABC)}{3c}$. Аналогно добијамо $TM = \frac{2P(ABC)}{3a}$, $TN = \frac{2P(ABC)}{3b}$.

Даље, посматрамо четвороугао $TPBM$. Знамо да је $\angle TPB = \angle BMT = 90^\circ$ и $\angle ABC = \beta$, па је $\angle MTP = 180^\circ - \beta$. Коришћењем синусне теореме добијамо

$$\begin{aligned} P(TPM) &= \frac{TP \cdot TM \cdot \sin \angle MTP}{2} = \frac{\frac{2P(ABC)}{3c} \cdot \frac{2P(ABC)}{3a} \cdot \sin \beta}{2} = \\ &= \frac{4P^2(ABC) \cdot \sin \beta}{9 \cdot 2 \cdot a \cdot c} = \frac{2P^2(ABC) \cdot \sin \beta}{9ac} = \frac{P(ABC) \cdot \sin^2 \beta}{9}, \end{aligned}$$

а ту смо искористили $P(ABC) = \frac{ac \sin \beta}{2}$.

На сличан начин добијамо и $P(TMN) = \frac{P(ABC) \cdot \sin^2 \gamma}{9}$, $P(TNP) = \frac{P(ABC) \cdot \sin^2 \alpha}{9}$.

Како је $P(MNP) = P(TPM) + P(TMN) + P(TNP)$, заменом претходних једнакости добијамо

$$\begin{aligned} P(MNP) &= \frac{P(ABC) \cdot \sin^2 \beta}{9} + \frac{P(ABC) \cdot \sin^2 \gamma}{9} + \frac{P(ABC) \cdot \sin^2 \alpha}{9} \\ &= \frac{P(ABC)}{9} \cdot (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) \end{aligned}$$

па је тражена неједнакост еквивалентна са

$$\frac{4}{3} < \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{9}{4}$$

за $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Десна неједнакост следи из **Тврђења 3.1.3** тачка **9**).

За леву неједнакост, користећи

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

и чињеницу да је $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma > 0$ на оштроуглом троуглу, следи

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma > 2 > \frac{4}{3}$$

Тиме су доказане обе неједнакости. [13]. $\square$

Задатак 4.12 (ВМО 2001). Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је $a + b + c \geq abc$. Доказати да је

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq abc\sqrt{3}.$$

Решење. Уведимо смену $x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$. Тада услов задатка постаје

$$\frac{x + y + z}{3} \geq xyz,$$

а треба доказати

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq 3\sqrt{3} \cdot xyz\sqrt{3}, \text{ тј. } \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq xyz.$$

Из неједнакости између квадратне и аритметичке средине следи

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^2 = \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^{1/2}.$$

Пошто из неједнакости између аритметичке и геометријске средине важи $\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, а из услова задатка $\frac{x + y + z}{3} \geq xyz$, добијамо:

$$\left(\frac{x + y + z}{3}\right)^{3/2} \geq (\sqrt[3]{xyz})^{3/2} = (xyz)^{1/2}$$

и

$$\left(\frac{x + y + z}{3}\right)^{1/2} \geq (xyz)^{1/2},$$

па је

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq (xyz)^{1/2} \cdot (xyz)^{1/2} = xyz,$$

што је и требало доказати [13]. $\square$

Глава 5

Закључак

У раду је приказан систематски преглед аналитичких метода које се могу применити у доказивању елементарних неједнакости. У другом поглављу обрађене су основне технике аналитичког приступа: монотоност функција, укључујући и функција више променљивих; конвексност функција са Јенсеновом неједнакостју; неједнакост између аритметичке и геометријске средине, као и одабране геометријске неједнакости у троуглу. Свако тврђење је поткрепљено детаљним доказом.

Централно место у раду заузима треће поглавље, посвећено тригонометријским идентитетима и неједнакостима у троуглу, најчешћим облицима тригонометријских супституција и њиховој примени у доказивању аналитичких неједнакости. Дато је десет најчешћих типова супституција са образложењем употребе, а неколико класичних неједнакости — Вилкерова, Куса–Хајгенсова и Хајгенсова — обрађене су детаљно са својим доказима. Кроз десет решених задатака показано је како се методе комбинују у пракси, где се посебно види вредност тригонометријске супституције као алата за прелазак са алгебарског на тригонометријско разматрање.

Четврто поглавље садржи додатне задатке који потичу претежно са Међународних и Балканских математичких олимпијада, као и из класичних збирки. Ови задаци илуструју разноликост техника обрађених у претходним поглављима — Равијеву супституцију, употребу неједнакости троугла, класичне неједнакости средина, Јенсенову неједнакост, као и трик-примене монотоности — показујући како се аналитичке методе преплићу у решавању нетривијалних проблема.

Овако конципиран рад може послужити наставницима и ученицима сред-

њих школа у припреми за такмичења вишег нивоа, али и као основа за даље изучавање теорије неједнакости. Прикази метода на овом нивоу нуде природан прелаз од елементарне ка вишој математици, што их чини погодним и за наставу на почетним универзитетским курсевима. Многа побољшања и генерализације разматраних неједнакости — посебно Вилкеровог и Хајгенсовог типа — предмет су актуелних истраживања [9, 1, 6], што отвара низ могућих праваца за наставак рада.

Библиографија

- [1] Barkat Ali Bhayo, József Sándor. On classical inequalities of trigonometric and hyperbolic functions. 2014. arXiv:1405.0934 [math.CA].
- [2] Chao-Ping Chen, József Sándor. Inequality chains for Wilker, Huygens and Lazarević type inequalities. *Journal of Mathematical Inequalities*, 2013.
- [3] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volkmann. *Recent Advances in Geometric Inequalities*. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [4] Ling Zhu. A new simple proof of Wilker's inequality. *Mathematical Inequalities & Applications*, 8(4):749–750, 2005.
- [5] D. S. Mitrinović. *Analytic Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970. In cooperation with P. M. Vasić.
- [6] Seyran Ibrahimov, Ahmad Issa. Some new improvements of Huygen's inequality. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 15(1):157–163, 2023.
- [7] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 3rd edition, 1976.
- [8] Zdravko Cvetkovski. *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [9] Zheng-Hang Yang. Some sharp Wilker type inequalities and their applications. 2013. arXiv:1304.5392 [math.CA].
- [10] Јелена Манојловић. Геометријске неједнакости. Скрипта, Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу.

- [11] Александра Петровић. Неједнакости у слици. Master's thesis, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, 2011.
- [12] В. Јанковић, З. Каделбург, П. Младеновић. *Међународне и Балканске математичке олимпијаде 1984–1995*. Материјали за младе математичаре, св. 32. Друштво математичара Србије, Београд, 1996.
- [13] П. Младеновић, Ђ. Кртинић. *Међународне и Балканске математичке олимпијаде 1996–2006*. Материјали за младе математичаре, св. 48. Друштво математичара Србије, Београд, 2007.