

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Ана Милинковић

УВОЂЕЊЕ ПОЈМА ИЗВОДА ФУНКЦИЈЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

мастер рад

Београд, 2026.

Ментор:

проф. др Јована Николић, ванредни професор

Чланови комисије:

проф. др Зоран Каделбург, професор емеритус

проф. др Александра Маринковић, ванредни професор

Датум одбране:

Πορφυρι

Наслов мастер рада: Увођење појма извода функције у средњој школи

Резиме: Овај мастер рад бави се увођењем појма извода функције у настави математике у средњим школама. Извод је један од основних појмова математичке анализе који има значајну примену у математици и природним наукама, а чији су темељи постављени радовима Њутна, Лајбница и Кошија. Циљ рада је да се диференцијални рачун прикаже на начин који је приступачан ученицима, кроз повезивање геометријског приступа, формалне дефиниције извода, примене у физици и употребе савремених рачунарских алата. Посебан нагласак стављен је на визуелизацију и интуитивно разумевање појма извода. Рад показује да се, уз адекватан наставни приступ, сложени математички појмови могу успешно приближити ученицима средње школе.

Кључне речи: извод функције, увођење појма извода, диференцијални рачун, методика наставе математике, диференцирање

Садржај

1	Увод	1
2	Историјски развој диференцијалног рачуна и појма извода	3
3	Увођење појма извода преко геометријског проблема тангенте	5
4	Појам и дефиниција извода функције	12
4.1	Дефиниција извода функције	13
4.2	Леви и десни извод функције	15
4.3	Диференцијабилност функције	19
5	Физичко значење извода и појам тренутне брзине	21
6	Изводи елементарних функција	27
6.1	Извод константне функције	27
6.2	Извод степене функције	28
6.3	Извод корене функције	31
6.4	Извод експоненцијалне функције	34
6.5	Извод логаритамске функције	36
6.6	Извод тригонометријских функција	39
7	Правила диференцирања	44
7.1	Извод производа константе и функције	44
7.2	Извод збира функција	45
7.3	Извод производа функција	46
7.4	Извод количника функција	48
7.5	Извод сложене функције	51
7.6	Извод инверзне функције	53

8	Методичка реализација наставне теме „Извод функције“	62
8.1	Основни подаци о наставној теми	62
8.2	Циљ и задаци обраде теме	62
8.3	Исходи наставне теме	63
8.4	Наставне методе, облици рада и наставна средства	63
8.5	Корелација са другим областима	64
8.6	Методичка реализација наставне теме	65
8.7	Методичка напомена	71
9	Закључак	73
	Литература	74

Глава 1

Увод

Извод функције представља један од важних појмова са којим се ученици сусрећу у настави математике у средњој школи и који захтева постепено увођење и пажљиво објашњење. За многе ученике овај појам на почетку делује веома апстрактно, јер захтева разумевање начина на који се нека величина мења и како се та промена може описати у једној тачки. Често се дешава да ученици усвоје правила за израчунавање извода, али да притом не створе јасну представу о томе шта извод заправо представља и какво је његово значење.

Због тога је начин увођења овог појма од посебног значаја. Пре саме формалне дефиниције важно је ученике постепено довести до идеје извода кроз проблеме који су им блиски и разумљиви. Питања као што су одређивање брзине кретања у одређеном тренутку или описивање нагиба криве у једној тачки представљају природан пут ка разумевању потребе за увођењем овог математичког појма.

Геометријски приступ, кроз посматрање тангенте на графику функције, омогућава ученицима да визуелно уоче везу између извода и нагиба графика у одређеној тачки. Са друге стране, физичко тумачење извода кроз појам тренутне брзине повезује математички садржај са појавама које су ученицима познате из свакодневног живота и других наставних предмета. На тај начин ученици постепено прелазе од конкретних примера ка општијем математичком описивању зависности између величина.

Савремени дигитални алати могу додатно допринети овом процесу. Програми као што је GeoGebra омогућавају динамичко приказивање графика функција, кретања тангенте и промене вредности извода. На тај начин уче-

ГЛАВА 1. УВОД

ници лакше повезују графички приказ са математичким записом и постепено долазе до разумевања значења овог појма.

Глава 2

Историјски развој диференцијалног рачуна и појма извода

Развој идеје извода одвијао се постепено кроз покушаје математичара да реше конкретне проблеме у геометрији, физици и другим областима. Било је потребно пронаћи начин да се прецизније опишу појаве у којима једна величина зависи од друге и да се реше проблеми које дотадашње математичке методе нису могле да обухвате.

Значајан корак у развоју ових идеја направио је Пјер де Ферма¹. Он се бавио проблемима одређивања тангенти и проналажења максималних и минималних вредности величина. Иако његови поступци нису представљали извод у савременом смислу, у њима су се појавиле идеје које ће касније бити основа за развој диференцијалног рачуна.

У другој половини XVII века Исак Њутн² и Готфрид Вилхелм Лајбниц³ независно један од другог поставили су темеље диференцијалног и интегралног рачуна. Њутн је своје идеје развијао кроз проучавање кретања и физичких величина које се мењају током времена, док је Лајбниц проблем посматрао са геометријског становишта. Њихов рад представљао је основу за даљи развој математичке анализе.

Током XVIII века методе диференцијалног рачуна наставиле су да се ра-

¹Пјер де Ферма (1607--1665), француски математичар.

²Исак Њутн (1643--1727), енглески математичар и физичар.

³Готфрид Вилхелм Лајбниц (1646--1716), немачки математичар и филозоф.

ГЛАВА 2. ИСТОРИЈСКИ РАЗВОЈ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА И ПОЈМА ИЗВОДА

звјају и примењују у различитим областима математике и природних наука. Ипак, основни појмови још увек нису имали потпуно строгу математичку основу. У том периоду често су коришћене идеје бесконачно малих величина, али њихово математичко значење није било строго одређено као што је то данас случај.

Потреба за строгим заснивањем математичке анализе посебно је дошла до изражаја током XIX века. Огистен-Луј Коши⁴ дао је велики допринос строгом заснивању математичке анализе и прецизнијем одређивању њених основних појмова, међу којима су гранична вредност, непрекидност и извод. Његов приступ представљао је важан корак ка савременом разумевању ових појмова.

Историјски развој извода показује да овај појам није настао као готово правило за рачунање, већ као резултат потребе да се опишу и реше различити проблеми у којима се величине мењају и међусобно зависе. Управо ова чињеница има значај и у настави, јер ученицима омогућава да разумеју да извод није само формула коју треба научити, већ математички појам који има своју сврху и значење.

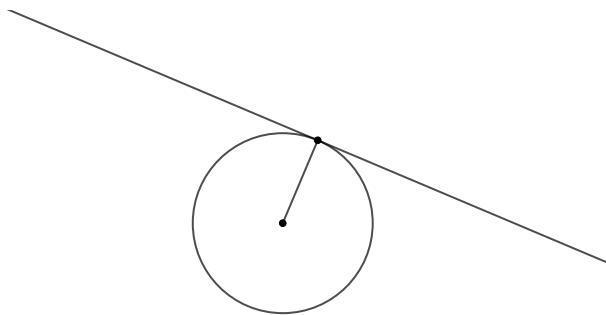
⁴Огистен-Луј Коши (1789--1857), француски математичар.

Глава 3

Увођење појма извода преко геометријског проблема тангенте

Након што смо у претходном делу видели како се извод развијао кроз историју, сада ћемо посматрати проблем из угла наставе математике. Један од природних начина да се ученици уведу у појам извода јесте преко геометријског питања: како дефинисати и одредити тангенту на криву у једној њеној тачки?

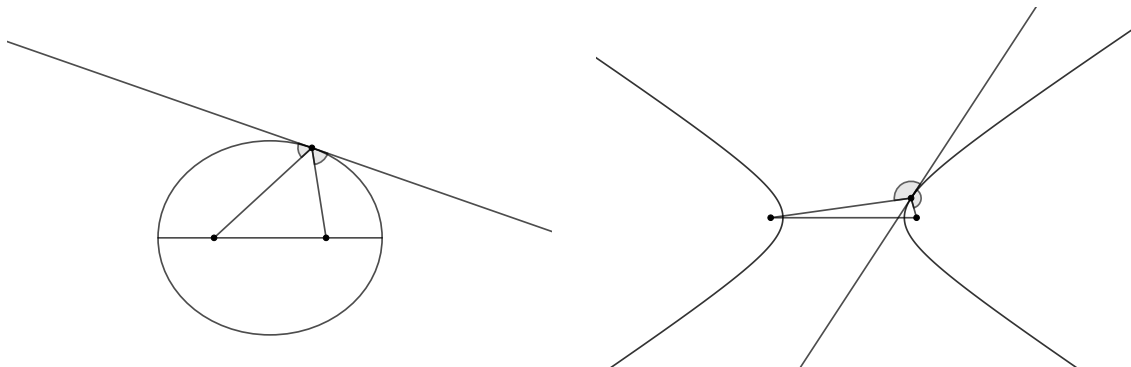
Код неких познатих кривих овај проблем је једноставно решити. На пример, код кружнице је познато да је тангента у датој тачки нормална на полупречник који спаја ту тачку са центром кружнице.



Слика 3.1: Конструкција тангенте на кружницу

ГЛАВА 3. УВОЂЕЊЕ ПОЈМА ИЗВОДА ПРЕКО ГЕОМЕТРИЈСКОГ ПРОБЛЕМА ТАНГЕНТЕ

Сличне геометријске конструкције постоје и код неких других кривих, као што су елипса и хипербола.



Слика 3.2: Тангента на елипсу и хиперболу

Међутим, када посматрамо произвољну криву, није довољно само познавати њен облик. Потребан је општи поступак који би нам омогућио да одредимо правац тангенте у било којој тачки.

Развојем аналитичке геометрије криве су почеле да се посматрају и као графици функција. Тада се питање о тангенти повезало са питањем како се функција мења у близини неке тачке. Управо та идеја представља пут ка појму извода.

Посматрајмо једноставан пример функције

$$y = f(x),$$

задате формулом

$$f(x) = x^2.$$

Нека је дата тачка

$$E(1, f(1)) = (1, 1)$$

на њеном графику.

Желимо да одредимо нагиб тангенте у тој тачки. За сада не можемо директно да је одредимо, али можемо да посматрамо праве које секу параболу у две блиске тачке.

Изаберимо још једну тачку на графику

$$E_1(x_1, f(x_1)),$$

при чему је у овом примеру

$$f(x_1) = x_1^2.$$

ГЛАВА 3. УВОЂЕЊЕ ПОЈМА ИЗВОДА ПРЕКО ГЕОМЕТРИЈСКОГ ПРОБЛЕМА ТАНГЕНТЕ

Права која пролази кроз тачке E и E_1 назива се сечица параболе. Њен нагиб одређен је количником промене вредности функције и промене аргумента:

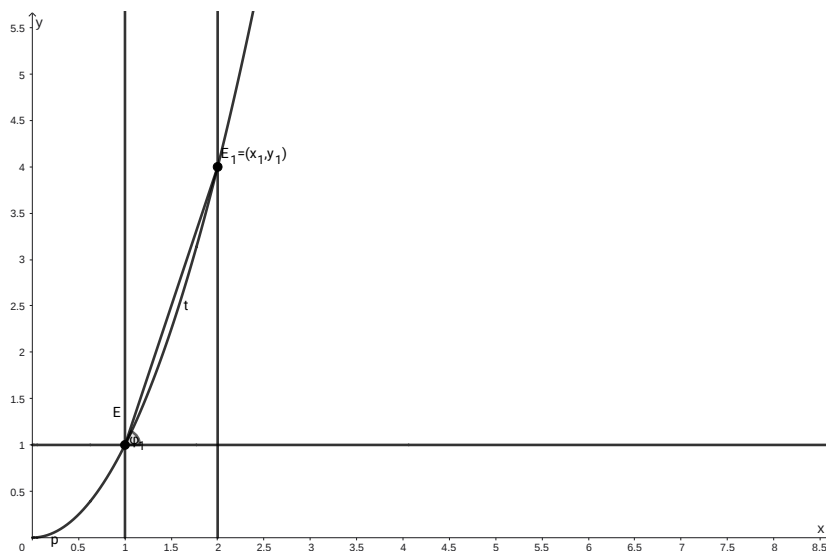
$$\tan \varphi_1 = \frac{f(x_1) - f(1)}{x_1 - 1},$$

где је φ_1 угао који сечица заклапа са позитивним смером x -осе.

Пошто је $f(x_1) = x_1^2$, добијамо

$$\tan \varphi_1 = \frac{x_1^2 - 1}{x_1 - 1}.$$

Овај количник нам показује нагиб сечице која пролази кроз две тачке параболе.



Слика 3.3: Сечица параболе кроз две тачке

Сада ћемо посматрати шта се дешава када се тачка E_1 приближава тачки E .

Ако изаберемо

$$x_1 = 2,$$

добијамо тачку

$$E_1(2, 4),$$

па је нагиб сечице

$$\tan \varphi_1 = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3.$$

ГЛАВА 3. УВОЂЕЊЕ ПОЈМА ИЗВОДА ПРЕКО ГЕОМЕТРИЈСКОГ ПРОБЛЕМА ТАНГЕНТЕ

Ако узмемо ближу тачку,

$$x_1 = 1.5,$$

добијамо

$$E_1(1.5, 2.25),$$

и

$$\tan \varphi_1 = \frac{2.25 - 1}{1.5 - 1} = 2.5.$$

Још ближе тачки E , за

$$x_1 = 1.1,$$

следи

$$E_1(1.1, 1.21),$$

па је

$$\tan \varphi_1 = \frac{1.21 - 1}{1.1 - 1} = 2.1.$$

За

$$x_1 = 1.01$$

добија се

$$E_1(1.01, 1.0201),$$

а нагиб је

$$\tan \varphi_1 = \frac{1.0201 - 1}{1.01 - 1} = 2.01.$$

Видимо да се, како се тачка E_1 приближава тачки E , нагиб сечице све више приближава броју 2.

Табела 3.1: Вредности количника $\tan \varphi_1$ за различите вредности x_1

x_1	$\tan \varphi_1 = \frac{x_1^2 - 1}{x_1 - 1}$
2	3
1.9	2.9
1.5	2.5
1.4	2.4
1.3	2.3
1.2	2.2
1.1	2.1
1.05	2.05
1.01	2.01
1.001	2.001
1.0001	2.0001

ГЛАВА 3. УВОЂЕЊЕ ПОЈМА ИЗВОДА ПРЕКО ГЕОМЕТРИЈСКОГ ПРОБЛЕМА ТАНГЕНТЕ

Истовремено, рећи ћемо да се сечица приближава правој која представља тангенту на параболу у тачки E . Зато нагиб тангенте можемо одредити као граничну вредност:

$$\lim_{x_1 \rightarrow 1} \frac{x_1^2 - 1}{x_1 - 1}.$$

Да бисмо израчунали ову вредност, користимо формулу за разлику квадрата:

$$x_1^2 - 1 = (x_1 - 1)(x_1 + 1).$$

За $x_1 \neq 1$ важи:

$$\frac{x_1^2 - 1}{x_1 - 1} = x_1 + 1.$$

Зато је

$$\lim_{x_1 \rightarrow 1} (x_1 + 1) = 2.$$

Добијени резултат значи да је нагиб тангенте на график функције

$$f(x) = x^2$$

у тачки

$$E(1, 1)$$

једнак 2.

Исти поступак можемо применити и у било којој тачки графика ове функције. Нека је дата тачка

$$E(x_0, f(x_0)),$$

и друга тачка

$$E_1(x_1, f(x_1)).$$

Нагиб сечице између ових тачака је

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

За функцију

$$f(x) = x^2$$

добија се

$$\frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0}.$$

Коришћењем формуле за разлику квадрата:

$$x_1^2 - x_0^2 = (x_1 - x_0)(x_1 + x_0),$$

ГЛАВА 3. УВОЂЕЊЕ ПОЈМА ИЗВОДА ПРЕКО ГЕОМЕТРИЈСКОГ ПРОБЛЕМА ТАНГЕНТЕ

следи

$$\frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = x_1 + x_0.$$

Када се E_1 приближава тачки E , односно када

$$x_1 \rightarrow x_0,$$

добивамо

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} (x_1 + x_0) = 2x_0.$$

Тако видимо да нагиб тангенте није исти у свим тачкама параболе. Он зависи од изабране тачке x_0 , па свакој тачки можемо придружити одговарајућу вредност нагиба. На тај начин функцији

$$f(x) = x^2$$

придружимо нову функцију

$$f'(x) = 2x.$$

Ова функција нам у свакој тачки говори колики је нагиб тангенте на график полазне функције, односно описује начин на који се функција мења.

На пример, у тачки

$$x = \frac{1}{2}$$

нагиб тангенте је

$$f' \left(\frac{1}{2} \right) = 1.$$

То значи да је тангента на параболу у тачки

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

нагнута под углом чији је тангенс једнак 1.

Пошто знамо нагиб тангенте и тачку кроз коју она пролази, њену једначину можемо одредити помоћу формуле

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

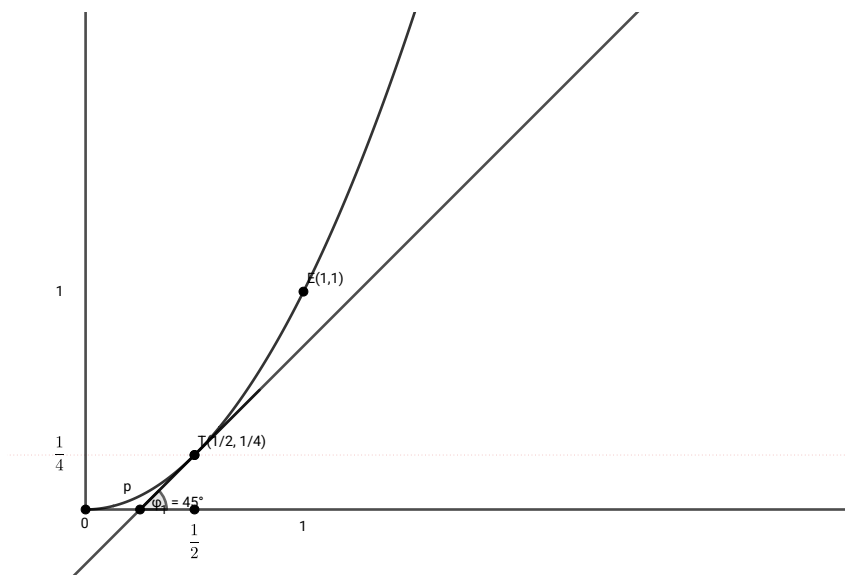
где је k нагиб праве, а (x_0, y_0) тачка кроз коју права пролази. У нашем случају је $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{4}$ и $k = 1$, па добијамо

$$y - \frac{1}{4} = x - \frac{1}{2},$$

ГЛАВА 3. УВОЂЕЊЕ ПОЈМА ИЗВОДА ПРЕКО ГЕОМЕТРИЈСКОГ ПРОБЛЕМА ТАНГЕНТЕ

дакле, једначина тангенте на параболу у тачки $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ је

$$y = x - \frac{1}{4}.$$



Слика 3.4: Тангента на параболу у одређеној тачки

Описани пример показује како се из једног геометријског питања о тангенти долази до новог математичког појма. Кључна идеја је да не посматрамо само промену функције између две тачке, већ шта се дешава када се те две тачке све више приближавају једна другој.

Управо гранична вредност количника

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

доводи нас до формалне дефиниције извода функције у датој тачки.

Глава 4

Појам и дефиниција извода функције

Нека је дата функција

$$y = f(x),$$

и нека је x_0 тачка из области дефинисаности функције f . Нека је Δx прираштај аргумента (у неким уџбеницима се ова величина означава и са h), при чему је

$$\Delta x \neq 0.$$

Тада је нова вредност аргумента

$$x_0 + \Delta x,$$

а одговарајући прираштај функције је

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Количник

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

назива се количник прираштаја. Посматраћемо вредност овог количника када

$$\Delta x \rightarrow 0.$$

На тај начин долазимо до појма извода функције.

4.1 Дефиниција извода функције

Нека је функција f дефинисана у некој околини⁵ тачке x_0 , при чему је x_0 из области дефинисаности функције. Ако постоји коначна гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

онда се та вредност назива извод функције f у тачки x_0 и означава се са

$$f'(x_0).$$

Дакле, извод функције у тачки x_0 дефинисан је формулом

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ако ова гранична вредност не постоји, каже се да функција нема извод у тачки x_0 .

Ако извод постоји у свакој тачки области дефинисаности функције f , онда се свакој вредности x може придружити број $f'(x)$, који представља извод функције у тој тачки.

На тај начин добија се нова функција, која се назива извод функције f . Она се означава са

$$f'(x),$$

а њена вредност у свакој тачки x дата је формулом

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Поред ознаке $f'(x)$, у употреби су и ознаке

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad Df(x).$$

У настави математике најчешће се користи ознака $f'(x)$.

Пример 4.1. Применимо дефиницију извода на функцију

$$f(x) = x^2.$$

Према дефиницији извода,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

⁵Под околином тачке x_0 подразумевамо неки отворени интервал који садржи тачку x_0 .

За дату функцију добијамо

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}.$$

Развијањем квадрата у бројиоцу добија се

$$(x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

па је

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}.$$

Сређивањем израза у бројиоцу добијамо

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}.$$

Пошто је

$$\Delta x \neq 0,$$

можемо скратити са Δx , па следи

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x).$$

Када $\Delta x \rightarrow 0$, добијамо

$$f'(x) = 2x.$$

Дакле, применом дефиниције извода добили смо да је извод функције

$$f(x) = x^2$$

једнак

$$f'(x) = 2x.$$

Овим је показано да дефиниција извода даје исти резултат који је добијен при одређивању коефицијента правца тангенте параболе $y = x^2$. Добијена функција извода омогућава да се у свакој тачки параболе одреди коефицијент правца одговарајуће тангенте.

На пример, за $x = 1$ имамо

$$f'(1) = 2,$$

док за $x = 3$ добијамо

$$f'(3) = 6.$$

То значи да се коефицијент правца тангенте мења у зависности од тачке у којој посматрамо график функције.

4.2 Леви и десни извод функције

Као и код граничних вредности функције, можемо посматрати како се мења вредност израза

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

док се приближавамо тачки x_0 са леве или са десне стране. Због тога се уводе појмови левог и десног извода.

Нека је функција f дефинисана у некој околини тачке x_0 .

Ако постоји гранична вредност

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

она се назива леви извод функције у тачки x_0 .

Ако постоји гранична вредност

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

она се назива десни извод функције у тачки x_0 .

Леви извод описује понашање функције када се тачки x_0 приближавамо са леве стране, а десни извод када јој се приближавамо са десне стране.

Извод функције у тачки x_0 постоји ако постоје леви и десни извод и ако су једнаки:

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Тада је

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Ако леви и десни извод не постоје или нису једнаки, функција нема извод у тачки x_0 .

Пример 4.2. Посматрајмо функцију

$$f(x) = |x|.$$

По дефиницији апсолутне вредности важи

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Испитајмо извод функције у тачки $x_0 = 0$. Према дефиницији извода,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}.$$

Како је $f(0) = 0$, добијамо

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

За $\Delta x < 0$ важи $|\Delta x| = -\Delta x$, па је

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

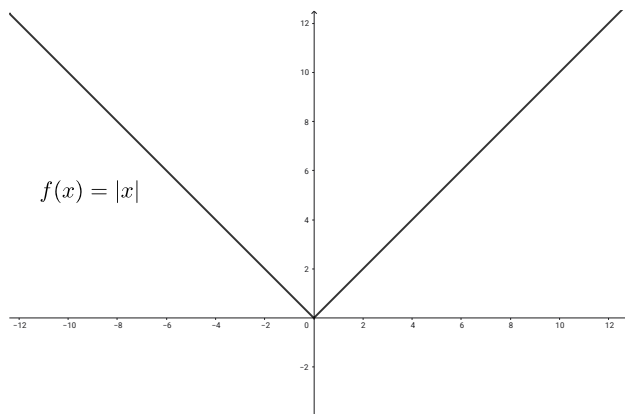
За $\Delta x > 0$ важи $|\Delta x| = \Delta x$, па је

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Пошто су леви и десни лимес различити,

$$-1 \neq 1,$$

гранична вредност која одређује извод не постоји. Зато функција $f(x) = |x|$ нема извод у тачки $x = 0$.



Слика 4.1: График функције $f(x) = |x|$.

График функције $f(x) = |x|$ показује да је функција непрекидна у тачки $x = 0$, јер се график у тој тачки спаја без прекида. Међутим, у тој тачки график има оштар прелом, па се нагиб са леве и десне стране разликује. То је у складу са претходно приказаним резултатом да леви и десни извод нису једнаки, због чега извод функције у тачки $x = 0$ не постоји.

Пример 4.3. Сада ћемо дати пример функције код које леви и десни извод у датој тачки постоје и једнаки су. Посматрајмо функцију

$$f(x) = x|x|.$$

Према дефиницији апсолутне вредности функција се може записати у облику

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Испитајмо постојање извода у тачки $x_0 = 0$. Пошто је

$$f(0) = 0,$$

леви извод је

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x}.$$

За $\Delta x < 0$ важи

$$f(\Delta x) = -(\Delta x)^2,$$

па добијамо

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} (-\Delta x) = 0.$$

Десни извод је

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x}.$$

За $\Delta x > 0$ важи

$$f(\Delta x) = (\Delta x)^2,$$

па је

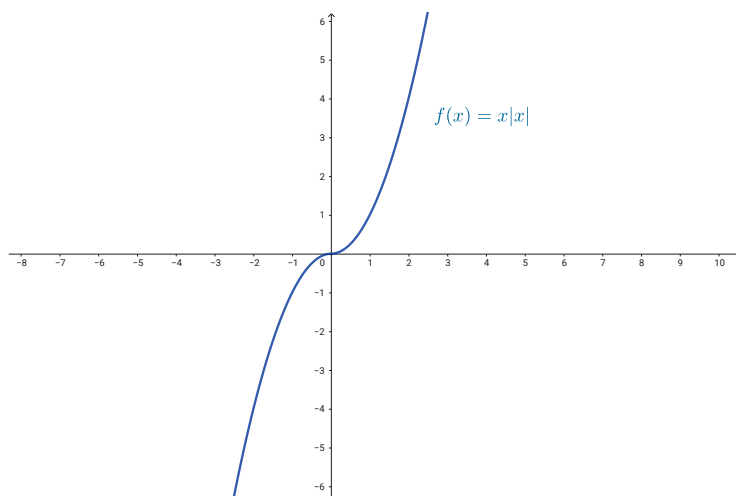
$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \Delta x = 0.$$

Дакле,

$$f'_-(0) = f'_+(0) = 0.$$

Пошто су леви и десни извод једнаки, функција има извод у тачки $x = 0$, и важи

$$f'(0) = 0.$$



Слика 4.2: График функције $f(x) = x|x|$.

График функције показује да се крива са леве и десне стране приближава тачки $O(0,0)$ на исти начин. Иако је функција дата различитим изразима за $x < 0$ и $x \geq 0$, у самој тачки $x = 0$ нема прекида у правцу промене, па извод постоји.

Ово је пример који показује да производ две функције, од којих једна има а друга нема извод у тачки, може имати извод у тој тачки.

Пример 4.4. Посматрајмо функцију

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Ова функција је дефинисана само за вредности

$$x \geq 0.$$

Због тога у тачки $x_0 = 0$ није могуће посматрати приближавање са леве стране, јер функција није дефинисана за негативне вредности аргумента. Можемо разматрати само десни извод, односно понашање функције када се тачки $x = 0$ приближавамо са позитивне стране. Према дефиницији десног извода:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}.$$

Како је

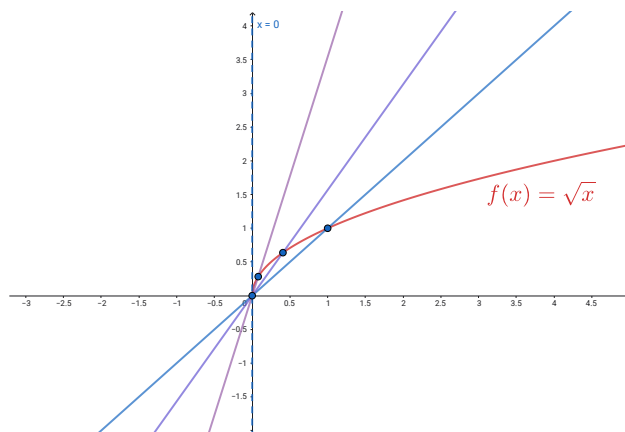
$$f(0) = 0,$$

следи:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x}.$$

Сређивањем добијамо:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}.$$



Слика 4.3: График функције $f(x) = \sqrt{x}$.

На графику се уочава да се сечице кроз две блиске тачке, када се оне приближавају тачки $(0, 0)$, приближавају вертикалном положају. Зато се у овој тачки говори о постојању вертикалне тангенте.

Иако је функција непрекидна у тачки $x = 0$, у тој тачки нема извод у уобичајеном смислу, јер количник прираштаја не тежи коначној вредности.

4.3 Диференцијабилност функције

За функцију f кажемо да је диференцијабилна у тачки x_0 ако у тој тачки постоји њен извод $f'(x_0)$ и ако је он коначан. У строгом заснивању диференцијалног рачуна, појам диференцијабилности се дефинише на другачији начин. Међутим, за функције једне променљиве, постојање извода у тачки x_0 еквивалентно је диференцијабилности функције у тој тачки.

Ако функција има извод у свакој тачки неког интервала, онда кажемо да је диференцијабилна на том интервалу.

Између диференцијабилности и непрекидности постоји важна веза. Ако је функција диференцијабилна у тачки x_0 , онда је она у тој тачки и непрекидна.

Међутим, обрнуто не мора да важи. Постоје непрекидне функције које немају извод у некој тачки. Такав пример је функција

$$f(x) = |x|,$$

која је непрекидна у тачки $x = 0$, али у тој тачки нема извод.

Диференцијабилност у тачки x_0 има и важно геометријско значење. Када је Δx довољно мало, промена вредности функције може се приближно одредити помоћу извода:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Одатле следи

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Ова формула показује да се за вредности x које су близу x_0 , вредност функције може приближно одредити помоћу праве

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ова права је управо тангента на график функције у тачки $(x_0, f(x_0))$, а њен нагиб је једнак $f'(x_0)$. На тај начин се повезују извод и геометријско значење тангенте које смо претходно увели.

Иста идеја важи и за леви и десни извод: са леве, односно десне стране тачке x_0 , график функције можемо посматрати као да се приближава правој чији је нагиб једнак левом, односно десном изводу.

Глава 5

Физичко значење извода и појам тренутне брзине

У претходном поглављу извод је уведен као гранична вредност количника прираштаја и као коефицијент правца тангенте на график функције. Исти математички поступак има и важно физичко значење.

Један од најзначајнијих примера примене извода јесте описивање кретања. У физици често није довољно знати само укупну промену неке величине, већ је потребно одредити брзину којом се та величина мења у одређеном тренутку.

Посматрајмо кретање тела које се креће по некој правој, на пример x -оси, при чему је пређени пут функција времена

$$s = f(t),$$

где је t независна променљива која представља време, а s зависна променљива која представља пређени пут. При томе се претпоставља да је

$$t \geq 0.$$

Поставља се питање којом се брзином тело креће у једном одређеном тренутку.

Код равномерног кретања брзина је стална величина, па се пређени пут мења истом брзином током целог времена. У том случају просечна брзина на било ком временском интервалу једнака је тренутној брзини тела.

Међутим, код неравномерног кретања брзина се мења током времена. На пример, аутомобил приликом поласка повећава брзину, док је приликом кочења смањује. Због тога просечна брзина на неком временском интервалу не описује брзину тела у сваком тренутку тог интервала.

ГЛАВА 5. ФИЗИЧКО ЗНАЧЕЊЕ ИЗВОДА И ПОЈАМ ТРЕНУТНЕ БРЗИНЕ

Посматрајмо временски интервал од t до $t + \Delta t$. Промена пређеног пута на том интервалу износи

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

Промена времена је

$$\Delta t.$$

За

$$\Delta t \neq 0,$$

количник

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

представља просечну брзину тела на посматраном временском интервалу. Међутим, ако се тело креће неравномерно, просечна брзина не даје вредност брзине у сваком појединачном тренутку.

Да бисмо одредили брзину тела у тачно одређеном тренутку, потребно је посматрати просечну брзину на све краћим временским интервалима који садрже тај тренутак. Зато разматрамо граничну вредност

$$\Delta t \rightarrow 0.$$

При томе се не узима вредност $\Delta t = 0$, јер количник промене пута и времена тада није дефинисан, већ се посматра вредност којој тај количник тежи када се временски интервал смањује.

Ако ова гранична вредност постоји, она представља тренутну брзину тела:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Добијени израз има исти облик као дефиниција извода функције. Пошто је пређени пут описан функцијом

$$s = f(t),$$

следи

$$v(t) = s'(t) = f'(t),$$

ако извод постоји у посматраном тренутку.

Дакле, извод функције која описује пређени пут у односу на време представља тренутну брзину кретања тела.

ГЛАВА 5. ФИЗИЧКО ЗНАЧЕЊЕ ИЗВОДА И ПОЈАМ ТРЕНУТНЕ БРЗИНЕ

Пример 5.1. Посматрајмо кретање тела чији је пређени пут описан функцијом

$$s(t) = 3t^2, \quad t \geq 0,$$

где је $s(t)$ пређени пут изражен у метрима, а t време изражено у секундама.

Ова зависност описује неравномерно кретање, јер се брзина промене пута мења са временом, што ће бити показано одређивањем извода ове функције.

На овом примеру упоредићемо просечну брзину на одређеном временском интервалу са тренутном брзином у једном тренутку.

Најпре одредимо просечну брзину тела у временском интервалу од 1 до 2 секунде.

Према дефиницији просечне брзине важи

$$v_{\text{sr}} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1}.$$

Пошто је

$$s(2) = 3 \cdot 2^2 = 12,$$

и

$$s(1) = 3 \cdot 1^2 = 3,$$

добива се

$$v_{\text{sr}} = \frac{12 - 3}{1} = 9 \text{ m/s}.$$

Добијена вредност представља просечну брзину тела током интервала од прве до друге секунде. Она не представља брзину тела у сваком тренутку тог интервала, јер се код неравномерног кретања брзина мења.

За одређивање тренутне брзине користимо везу

$$v(t) = s'(t).$$

Извод ћемо одредити применом дефиниције извода:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

За функцију

$$s(t) = 3t^2$$

добива се

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3(t + \Delta t)^2 - 3t^2}{\Delta t}.$$

ГЛАВА 5. ФИЗИЧКО ЗНАЧЕЊЕ ИЗВОДА И ПОЈАМ ТРЕНУТНЕ БРЗИНЕ

Развијањем квадрата у бројиоцу следи

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) - 3t^2}{\Delta t}.$$

После сређивања добија се

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{6t\Delta t + 3(\Delta t)^2}{\Delta t}.$$

Пошто је

$$\Delta t \neq 0,$$

може се скратити са Δt :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (6t + 3\Delta t).$$

Када

$$\Delta t \rightarrow 0,$$

добија се

$$v(t) = 6t.$$

Добијена функција представља тренутну брзину тела у сваком тренутку у коме извод постоји.

За тренутак

$$t = 2 \text{ s}$$

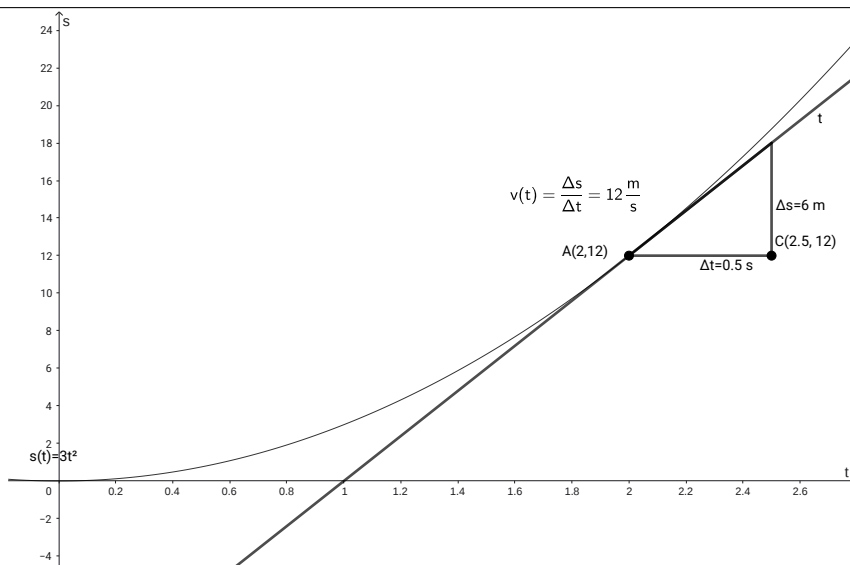
добија се

$$v(2) = 6 \cdot 2 = 12 \text{ m/s}.$$

Дакле, тренутна брзина тела у тренутку $t = 2 \text{ s}$ износи

$$12 \text{ m/s}.$$

ГЛАВА 5. ФИЗИЧКО ЗНАЧЕЊЕ ИЗВОДА И ПОЈАМ ТРЕНУТНЕ БРЗИНЕ



Слика 5.1: Геометријско значење тренутне брзине као нагиба тангенте на графику функције $s(t) = 3t^2$

Уочавамо да се ова вредност разликује од просечне брзине на интервалу од прве до друге секунде, која је износила

$$9 \text{ m/s}.$$

Овај пример показује физички значај извода. Исти математички поступак којим се одређује нагиб тангенте на графику функције омогућава да се одреди брзина промене неке физичке величине.

Пример 5.2. Посматрајмо сада још један пример примене извода у физици — слободан пад тела. Формула за пређени пут при слободном паду, ако тело почиње да пада из стања мировања, јесте

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

где је g убрзање Земљине теже, а t време падања. За одређивање тренутне брзине користимо везу:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

За функцију

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

ГЛАВА 5. ФИЗИЧКО ЗНАЧЕЊЕ ИЗВОДА И ПОЈАМ ТРЕНУТНЕ БРЗИНЕ

добија се

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}.$$

Развијањем квадрата у бројиоцу следи

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}g(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}.$$

После сређивања добија се

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{gt\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}.$$

Пошто је

$$\Delta t \neq 0,$$

може се скратити са Δt :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(gt + \frac{1}{2}g\Delta t \right).$$

Када

$$\Delta t \rightarrow 0,$$

добија се

$$v(t) = gt.$$

Дакле, формула за тренутну брзину при слободном паду

$$v(t) = gt$$

може се извести директно из формуле за пређени пут и дефиниције извода.

Глава 6

Изводи елементарних функција

Одређивање извода помоћу дефиниције засноване на граничној вредности представља први корак у увођењу појма извода. Међутим, примена дефиниције на сваку функцију појединачно често захтева сложенија алгебарска извођења. Због тога су за најважније елементарне функције добијене опште формуле које омогућавају једноставније и ефикасније одређивање извода.

6.1 Извод константне функције

Посебан случај представља константна функција. Нека је дата функција

$$f(x) = C,$$

где је C произвољна константа.

Према дефиницији извода важи

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Пошто вредност константне функције не зависи од променљиве x , имамо

$$f(x + \Delta x) = C$$

и

$$f(x) = C.$$

Заменом ових вредности у дефиницију извода добија се

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x}.$$

Следи

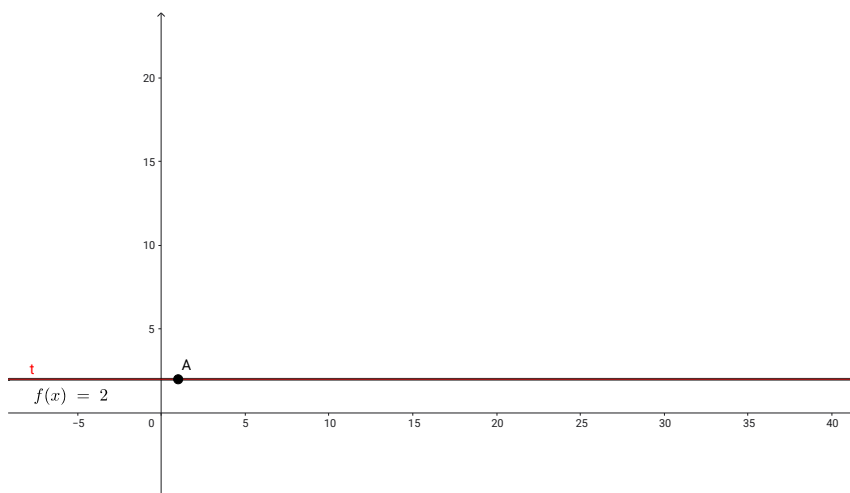
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x}.$$

Пошто је количник једнак нули за свако $\Delta x \neq 0$, добија се

$$f'(x) = 0.$$

Према томе, извод константне функције у свакој тачки њеног домена једнак је нули.

Са геометријског становишта, овај резултат је очекиван јер је график константне функције права паралелна x -оси. Коефицијент правца такве праве једнак је нули, па је и извод константне функције једнак нули.



Слика 6.1: Геометријско значење извода константне функције

6.2 Извод степене функције

Степене функције такође припадају класи елементарних функција. Њихови изводи имају велики значај, јер се многе сложеније функције могу представити помоћу степених функција или њихових композиција.

Посматрајмо општи облик степене функције

$$f(x) = x^n,$$

где је n природан број.

Циљ је да се одреди правило за извод ове функције применом дефиниције извода. Према дефиницији важи

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

За дату функцију добија се

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.$$

За сређивање овог израза користимо биномну формулу. За природан број n важи

$$(x + \Delta x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^k.$$

Развијањем ове суме добија се

$$(x + \Delta x)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n.$$

Уврштавањем овог развоја у дефиницију извода добија се

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.$$

Чланови x^n се поништавају, па следи

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n}{\Delta x}.$$

Издавањем заједничког чиниоца Δx у бројиоцу и скраћивањем добија се

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right).$$

Када

$$\Delta x \rightarrow 0,$$

сви чланови који садрже Δx нестају. Остаје

$$f'(x) = \binom{n}{1} x^{n-1}.$$

Пошто је

$$\binom{n}{1} = n,$$

добија се правило за извод степене функције:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Добијено правило важи за сваки природан број n . У наставку ће бити проширено и на друге облике степених функција.

Визуелизација извода степене функције на примеру кубне функције

Да би се боље разумело значење добијеног правила, посматраћемо пример кубне функције

$$f(x) = x^3.$$

Према дефиницији извода посматрамо количник прираштаја

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

За кубну функцију добија се

$$\frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}.$$

Коришћењем биномне формуле следи

$$(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

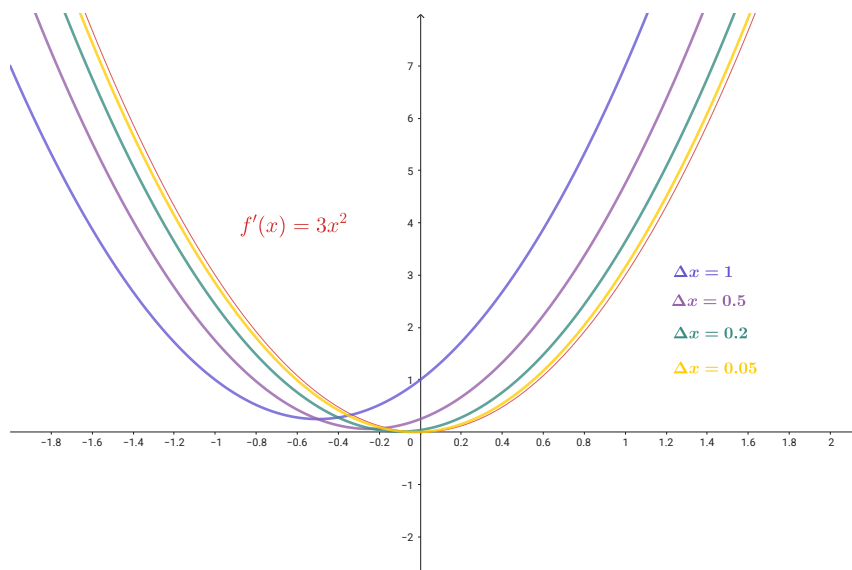
Зато је

$$\frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}.$$

Након скраћивања и издвајања заједничког чиниоца Δx добија се

$$3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Овај израз представља количник прираштаја. За различите вредности Δx добијају се различити нагиби сечица графика функције.



Слика 6.2: Приближавање количника прираштаја функцији $f'(x) = 3x^2$ када Δx тежи нули

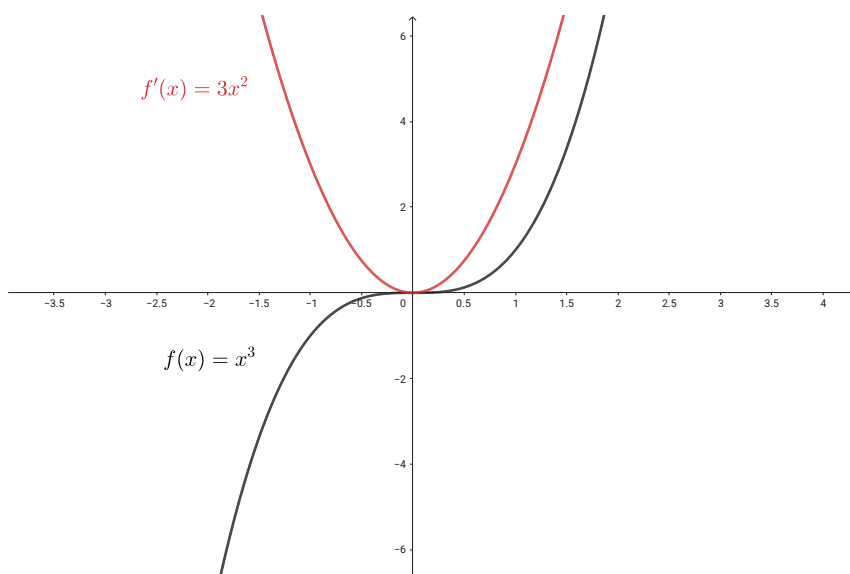
Када се прираштај Δx смањује, друга тачка графика приближава се првој, а нагиб сечице приближава се нагибу тангенте. У граничном случају

$$\Delta x \rightarrow 0,$$

чланови који садрже Δx нестају, па се добија

$$f'(x) = 3x^2.$$

На тај начин добија се изводна функција кубне функције.



Слика 6.3: Графички приказ кубне функције $f(x) = x^3$ и њеног извода $f'(x) = 3x^2$

Слика приказује графике функције $f(x) = x^3$ и њеног извода $f'(x) = 3x^2$. Извод у свакој тачки одређује нагиб тангенте на график функције, па се из њега може закључити како се функција мења.

6.3 Извод корене функције

Корене функције можемо посматрати као инверзне функције одговарајућих степених функција. Квадратни корен се може записати у облику степена са разломљеним изложивоцем:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}.$$

Ипак, корисно је показати како се извод квадратног корена може добити директном применом дефиниције извода, јер се на тај начин уочава веза између већ познатог поступка одређивања извода и нових функција.

Посматрајмо функцију

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0.$$

Према дефиницији извода важи

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

За дату функцију добија се

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Да бисмо упростили овај израз, множимо бројилац и именилац изразом

$$\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}.$$

Тиме се вредност разломка не мења, јер се бројилац и именилац множе истим изразом:

$$\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

У бројиоцу се добија разлика квадрата:

$$(\sqrt{x + \Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2.$$

Према томе,

$$(\sqrt{x + \Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2 = (x + \Delta x) - x = \Delta x.$$

Зато се добијени израз може написати у облику

$$\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}.$$

Пошто је

$$\Delta x \neq 0,$$

можемо скратити са Δx , па добијамо

$$\frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Сада посматрамо граничну вредност када

$$\Delta x \rightarrow 0.$$

Тада се добија

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}},$$

па следи

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Приметимо да је у тачки $x = 0$ функција дефинисана, али у тој тачки нема извод. Наиме, формула

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

важи за $x > 0$, док за $x = 0$ није дефинисана.

Добијени резултат може се добити и применом правила за извод степене функције. Пошто је

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}},$$

из правила

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

следи

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

Како је

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

добија се исти облик извода:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

На овај начин види се да се правило за извод степене функције може применити и на функције са разломљеним изложиоцима, што омогућава једноставније израчунавање извода различитих врста функција.

Визуелизација извода корене функције

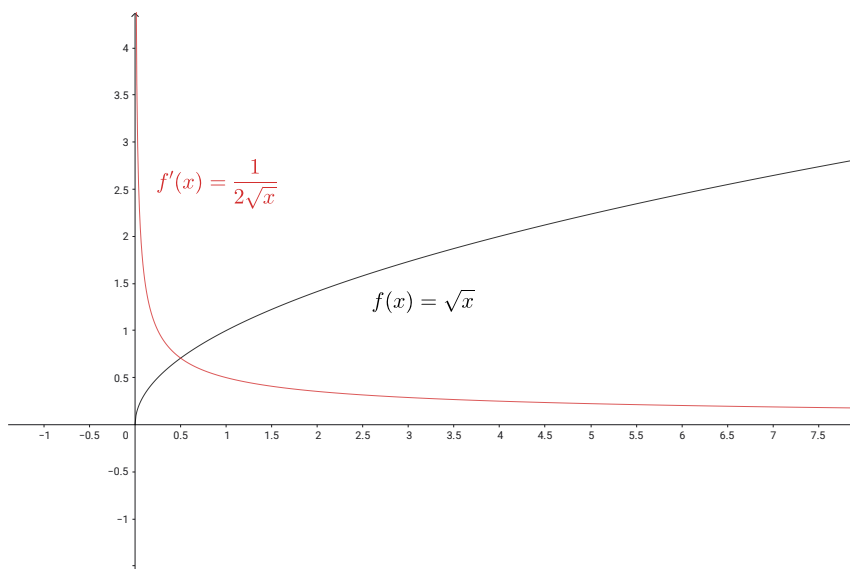
Да би се приказала веза између функције и њеног извода, посматраћемо функцију

$$f(x) = \sqrt{x}$$

и њен извод

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

На истом координатном систему приказани су графици функције и њеног извода.



Слика 6.4: Графички приказ функције $f(x) = \sqrt{x}$ и њеног извода $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Са графика се види да су вредности извода веће у близини координатног почетка, док се са порастом вредности x постепено смањују. То значи да функција $\sqrt{x}$ расте, али све спорије, што одговара све мањем нагибу тангенте.

6.4 Извод експоненцијалне функције

Експоненцијалне функције имају велики значај у математици и њеним применама, јер се користе за описивање појава код којих се величине мењају пропорционално својој тренутној вредности.

Посматрајмо општу експоненцијалну функцију

$$f(x) = a^x,$$

где је

$$a > 0, \quad a \neq 1.$$

Применом дефиниције извода добија се

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}.$$

Коришћењем особине степена експоненцијалне функције,

$$a^{x+\Delta x} = a^x a^{\Delta x},$$

следи

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x}.$$

Издавањем заједничког фактора a^x добија се

$$f'(x) = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

зависи само од основе a и представља природни логаритам основе:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a.$$

Ова гранична вредност успоставља везу између експоненцијалне функције и природног логаритма. Зато је извод експоненцијалне функције

$$f'(x) = a^x \ln a.$$

Визуелизација извода експоненцијалне функције

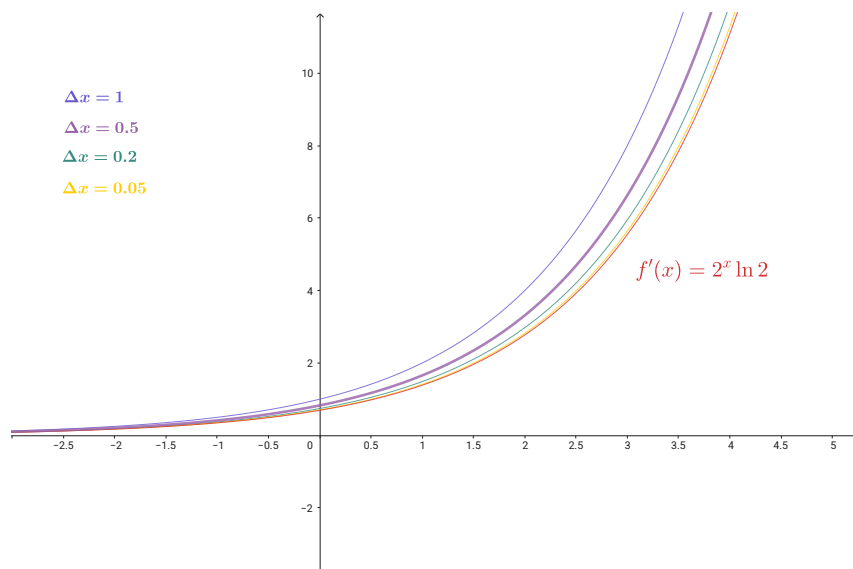
Посматрајмо специјалан случај експоненцијалне функције за вредност основе $a = 2$. Тада је

$$f(x) = 2^x.$$

Количник прираштаја за ову функцију је

$$\frac{2^{x+\Delta x} - 2^x}{\Delta x}.$$

За различите вредности Δx добијају се различите вредности овог количника. Како се Δx смањује, количник прираштаја приближава се изводној функцији, што је приказано на слици.



Слика 6.5: Приближавање количника прираштаја изводној функцији $f'(x) = 2^x \ln 2$ за различите вредности Δx .

Посебно важан случај представља експоненцијална функција са основом природног броја e . Број e је једна од најважнијих математичких константи, позната као Ојлеров број⁶, чија је приближна вредност $e \approx 2,71828$.

$$f(x) = e^x.$$

Пошто је

$$\ln e = 1,$$

из општег правила следи

$$f'(x) = e^x.$$

Експоненцијална функција са основом e има посебно својство да је њен извод једнак самој функцији. Због тог својства она има посебно место у диференцијалном рачуну и бројним применама математике.

6.5 Извод логаритамске функције

Логаритамске функције су инверзне функције експоненцијалних функција. Имају значајну примену у математици, физици и другим областима, јер

⁶Леонард Ојлер (1707--1783), швајцарски математичар, физичар и астроном.

се користе за описивање различитих зависности и појава које се мењају по одређеним законитостима. Посматрајмо функцију

$$f(x) = \ln x, \quad x > 0.$$

Према дефиницији извода важи

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}.$$

Коришћењем својства логаритма

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b},$$

добија се

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x}.$$

Пошто је

$$\frac{x + \Delta x}{x} = 1 + \frac{\Delta x}{x},$$

слиди

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Множењем и дељењем израза са $\frac{1}{x}$ добија се

$$f'(x) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Користимо познату граничну вредност

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + u)}{u} = 1.$$

Увођењем смене

$$u = \frac{\Delta x}{x},$$

и пошто за $\Delta x \rightarrow 0$ важи

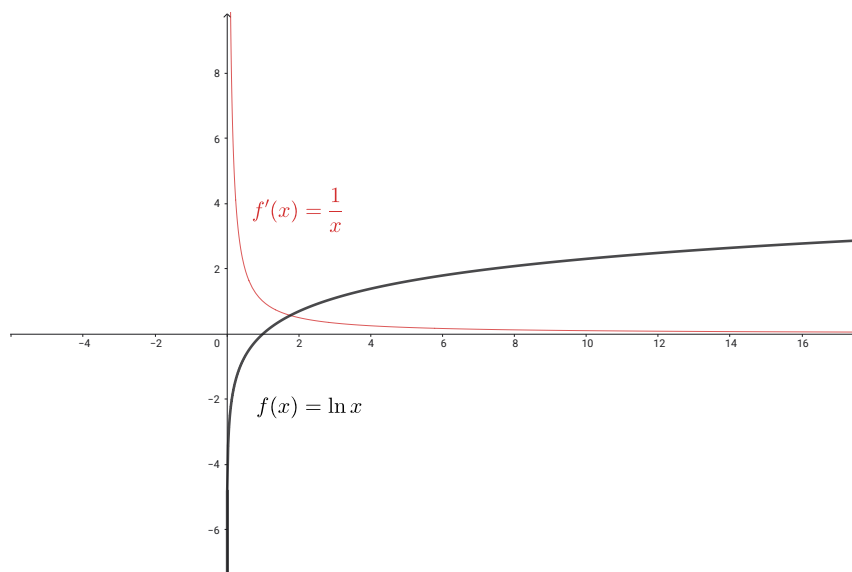
$$\frac{\Delta x}{x} \rightarrow 0,$$

слиди

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot 1,$$

односно

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$



Слика 6.6: Графички приказ функције $f(x) = \ln x$ и њеног извода $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Са графика се уочава да је извод функције $\ln x$ позитиван за свако $x > 0$. Касније ће бити показано да се на основу знака првог извода може испитивати монотоност функције, односно утврђивати интервали на којима функција расте или опада.

Како се вредност извода $\frac{1}{x}$ смањује са порастом x , смањује се и нагиб тангенте на графику функције.

На основу добијеног резултата можемо одредити и извод логаритамске функције са произвољном основом.

Нека је

$$f(x) = \log_a x,$$

где је

$$a > 0, \quad a \neq 1.$$

Према дефиницији извода важи

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}.$$

Коришћењем формуле за промену основе логаритма,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

добивамо

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(x + \Delta x)}{\ln a} - \frac{\ln x}{\ln a}}{\Delta x}.$$

Пошто је $\ln a$ константа, можемо је издвојити из разломка:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}.$$

Из претходно добијеног резултата

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

следи

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x},$$

односно

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

6.6 Извод тригонометријских функција

Тригонометријске функције представљају важну класу елементарних функција. Оне имају значајну примену у описивању периодичних појава које се јављају у физици, техници и природним наукама. Њихови изводи се одређују полазећи од дефиниције извода и коришћењем основних тригонометријских формула.

Извод синусне функције

Посматрајмо функцију

$$f(x) = \sin x.$$

Према дефиницији извода важи

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

За сређивање бројиоца користимо формулу за разлику синуса:

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2}.$$

За

$$A = x + \Delta x, \quad B = x,$$

добија се

$$\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

Уврштавањем у дефиницију извода следи

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Издавањем одговарајућег фактора добија се

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right].$$

Користимо основну граничну вредност

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$$

Такође важи

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x,$$

јер је косинусна функција непрекидна. Зато је

$$f'(x) = \cos x.$$

Према томе,

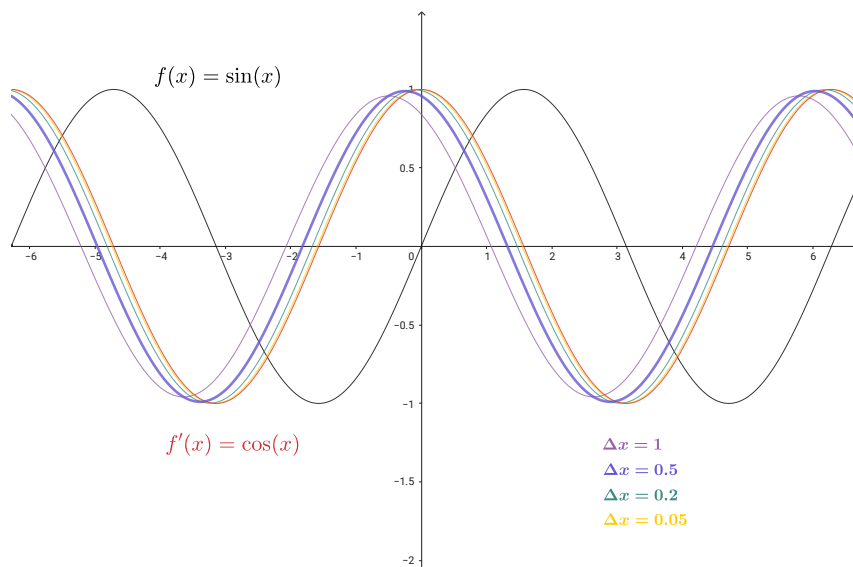
$$(\sin x)' = \cos x.$$

Визуелизација извода синусне функције

За графички приказ извода функције $\sin x$ посматра се количник прираштаја

$$\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Како се Δx приближава нули, график овог количника постепено се приближава графику функције $f'(x) = \cos x$, чиме се илуструје дефиниција извода као граничне вредности.



Слика 6.7: Приближавање количника прираштаја $\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$ изводној функцији $f'(x) = \cos x$.

Извод косинусне функције

Посматрајмо функцију

$$f(x) = \cos x.$$

Према дефиницији извода,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}.$$

За сређивање бројиоца користимо формулу за разлику косинуса:

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2}.$$

За

$$A = x + \Delta x, \quad B = x,$$

добија се

$$\cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

Уврштавањем у дефиницију извода следи

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Сређивањем израза добија се

$$f'(x) = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right].$$

Коришћењем граничне вредности

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$$

и чињенице да је

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \sin x,$$

јер је синусна функција непрекидна, добија се

$$f'(x) = - \sin x.$$

Према томе,

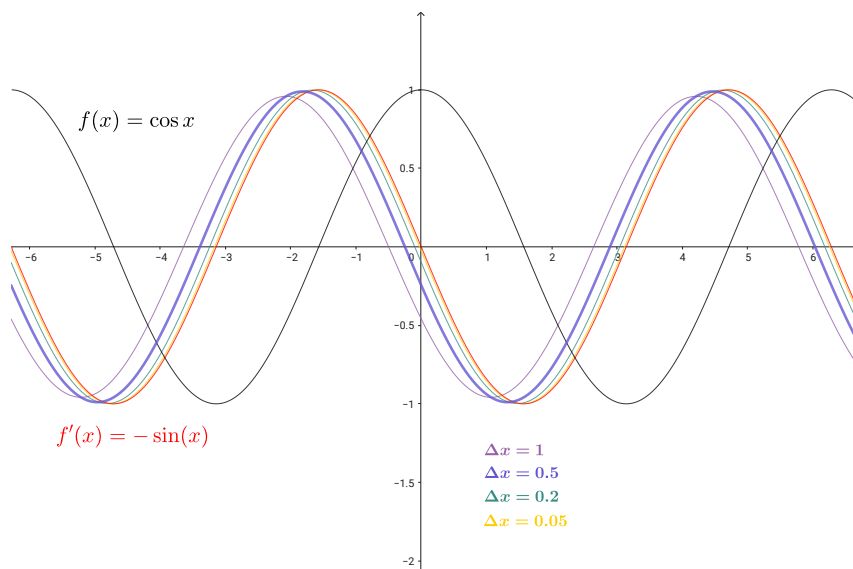
$$(\cos x)' = - \sin x.$$

Визуелизација извода косинусне функције

Количник прираштаја косинусне функције је

$$\frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}.$$

Са смањивањем вредности Δx графици овог израза приближавају се графику функције $f'(x) = - \sin x$.



Слика 6.8: Приближавање количника прираштаја $\frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$ изводној функцији $f'(x) = - \sin x$.

Приметимо да су изводи основних тригонометријских функција поново тригонометријске функције.

Таблица елементарних извода

Основни изводи елементарних функција, заједно са условима њихове дефинисаности, приказани су у следећој табlici:

Функција	Извод и услови
$f(x) = c, \quad c = \text{const.}$	$f'(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$

Глава 7

Правила диференцирања

Након упознавања са изводима елементарних функција, потребно је размотрити како се одређују изводи функција добијених њиховим комбиновањем. За такве функције користе се посебна правила диференцирања која омогућавају да се извод сложенијег израза одреди на основу већ познатих извода.

7.1 Извод производа константе и функције

Нека је c константа, а $f(x)$ диференцијабилна функција. Тада важи:

$$(cf(x))' = cf'(x).$$

Према дефиницији извода важи:

$$(cf(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x}.$$

Издавањем константе c добија се:

$$(cf(x))' = c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Пошто је последњи израз једнак изводу функције $f(x)$, следи:

$$(cf(x))' = cf'(x).$$

Ово правило показује да се константа не мења при диференцирању, већ се само издваја испред извода функције.

Пример 7.1. Одредимо извод функције

$$f(x) = 5x^3.$$

Према правилу за извод производа константе и функције важи

$$(5x^3)' = 5(x^3)'.$$

Пошто је

$$(x^3)' = 3x^2,$$

следи

$$(5x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2.$$

Дакле,

$$(5x^3)' = 15x^2.$$

7.2 Извод збира функција

Нека су $f(x)$ и $g(x)$ две диференцијабилне функције. За њихов збир важи правило:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Према дефиницији извода важи:

$$(f(x) + g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x))}{\Delta x}.$$

Ослобађањем од заграде добија се:

$$(f(x) + g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Пошто су функције $f(x)$ и $g(x)$ диференцијабилне, одговарајући лимеси постоје, па се лимес збира може записати као збир лимеса:

$$(f(x) + g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Зато што су последња два лимеса једнака редом изводима функција $f(x)$ и $g(x)$, следи:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Извод збира се добија тако што се израчуна извод за сваки сабирак посебно, а затим се добијени резултати саберу.

Пример 7.2. Посматрајмо функцију

$$f(x) = x^3 + \sin x.$$

Применом правила за извод збира добија се:

$$f'(x) = (x^3)' + (\sin x)'$$

Познати су изводи:

$$(x^3)' = 3x^2,$$

и

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Зато је:

$$f'(x) = 3x^2 + \cos x.$$

Према томе:

$$(x^3 + \sin x)' = 3x^2 + \cos x.$$

Правило за извод производа константе и функције и правило за извод збира функција заједно се називају својством линеарности извода.

7.3 Извод производа функција

За производ две диференцијабилне функције важи правило:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ово правило се назива и Лајбницовим правилом.

Према дефиницији извода важи:

$$(f(x)g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}.$$

Додавањем и одузимањем члана $f(x + \Delta x)g(x)$ у бројиоцу добија се:

$$(f(x)g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x}.$$

Груписањем чланова добија се:

$$(f(x)g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)(g(x + \Delta x) - g(x)) + g(x)(f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x}.$$

Раздвајањем разломка и применом особина лимеса добијамо:

$$(f(x)g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Пошто је свака диференцијабилна функција непрекидна, при $\Delta x \rightarrow 0$ важи

$$f(x + \Delta x) \rightarrow f(x).$$

па следи:

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Пример 7.3. Одредимо извод функције

$$f(x) = x^2 \ln x.$$

Ову функцију можемо посматрати као производ две функције:

$$u(x) = x^2,$$

и

$$v(x) = \ln x.$$

Према правилу за извод производа:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Изводи функција $u(x)$ и $v(x)$ су:

$$u'(x) = (x^2)' = 2x,$$

и

$$v'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Уврштавањем добијених вредности добија се:

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x}.$$

Пошто је

$$x^2 \frac{1}{x} = x,$$

следи:

$$f'(x) = 2x \ln x + x.$$

7.4 Извод количника функција

Нека су $f(x)$ и $g(x)$ диференцијабилне функције и нека је $g(x) \neq 0$. За њихов количник важи правило:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Према дефиницији извода важи:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}.$$

Сређивањем разлике разломака добија се:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)}.$$

Додавањем и одузимањем члана $f(x)g(x)$ у бројиоцу следи:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)(f(x+\Delta x) - f(x)) - f(x)(g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)}.$$

Раздвајањем и преласком на граничну вредност добијамо:

$$= \frac{g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g^2(x)}.$$

При томе је искоришћено да је функција g диференцијабилна, па самим тим и непрекидна, због чега важи

$$g(x + \Delta x) \rightarrow g(x).$$

Пошто су гранични изрази једнаки изводима функција, добија се:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Пример 7.4. Након увођења правила за извод количника, правило за степену функцију може се проширити и на случај када је изложилац негативан.

Посматрајмо функцију

$$f(x) = x^{-n},$$

где је n природан број. Према особини степена важи

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Зато функцију можемо записати у облику

$$f(x) = \frac{1}{x^n}.$$

Применом правила за извод количника добија се

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2}.$$

Пошто је према претходно добијеном правилу

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

следи

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}.$$

Сређивањем степена добија се

$$f'(x) = -nx^{n-1-2n},$$

односно

$$f'(x) = -nx^{-n-1}.$$

Пример 7.5. Функције тангенс и котангенс могу се представити помоћу синуса и косинуса, па се њихови изводи могу добити применом правила за извод количника.

Тангенсна функција

$$f(x) = \tan x$$

дефинисана је једнакошћу:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

У домену ове функције налазе се тачке $x \in \mathbb{R}$ за које важи

$$\cos x \neq 0.$$

Применом правила за извод количника добија се:

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}.$$

Коришћењем познатих извода:

$$(\sin x)' = \cos x,$$

и

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

следи:

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Према тригонометријском идентитету:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

добија се:

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Котангенсна функција

$$f(x) = \cot x$$

дефинисана је једнакошћу:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

У домену ове функције налазе се тачке $x \in \mathbb{R}$ за које важи

$$\sin x \neq 0.$$

Применом правила за извод количника:

$$(\cot x)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x}.$$

Пошто је:

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

и

$$(\sin x)' = \cos x,$$

следи:

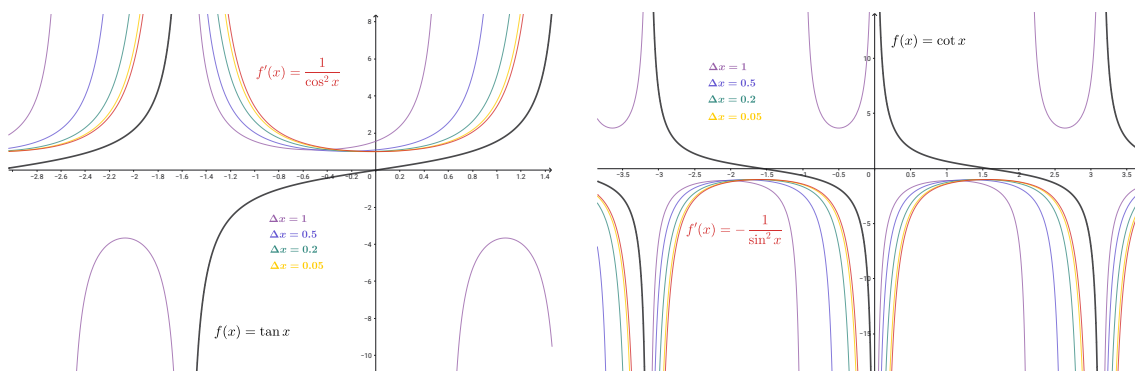
$$(\cot x)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}.$$

Коришћењем идентитета:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

добија се:

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$



Слика 7.1: Визуелизација приближавања количника прираштаја изводним функцијама тангенса и котангенса.

7.5 Извод сложене функције

Сложена функција настаје када је једна функција дата као аргумент друге функције. Ако је

$$f(x) = F(g(x)),$$

тада је $g(x)$ унутрашња функција, а $F(x)$ спољашња функција.

Извод сложене функције одређује се правилом:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x).$$

Ово правило показује да се најпре одређује извод спољашње функције у односу на њен аргумент, а затим се добијени резултат множи изводом унутрашње функције.

За доказ правила посматрајмо сложену функцију

$$f(x) = F(g(x)).$$

Нека је

$$u = g(x).$$

Тада функцију можемо записати у облику

$$f(x) = F(u).$$

Према дефиницији извода функције важи

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Уведимо прираштај унутрашње функције

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x).$$

Тада се количник прираштаја може записати на следећи начин:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta x}.$$

Множењем и дељењем израза са Δu , при чему је $\Delta u \neq 0$, добија се

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Преласком на граничну вредност када

$$\Delta x \rightarrow 0,$$

а самим тим и

$$\Delta u \rightarrow 0,$$

добија се

$$f'(x) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Први лимес представља извод спољашње функције F у тачки u , а други лимес представља извод унутрашње функције g . Зато важи

$$f'(x) = F'(u)g'(x).$$

Пошто је

$$u = g(x),$$

следи

$$f'(x) = F'(g(x))g'(x).$$

Добијено је правило за извод сложене функције.

Пример 7.6. Одредимо извод функције

$$f(x) = \ln(\sin x).$$

Функција је сложена јер је функција $\sin x$ аргумент логаритамске функције.

Нека је:

$$u(x) = \sin x.$$

Тада се функција може записати у облику:

$$f(x) = \ln u.$$

Извод спољашње функције је:

$$(\ln u)' = \frac{1}{u},$$

а извод унутрашње функције је:

$$u'(x) = (\sin x)' = \cos x.$$

Према правилу за извод сложене функције:

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cos x.$$

Сређивањем добијамо:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Како је

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x,$$

следи:

$$f'(x) = \cot x.$$

7.6 Извод инверзне функције

Нека је дата функција

$$y = f(x).$$

Ако је функција f непрекидна и строго монотона на неком интервалу, онда постоји њена инверзна функција која се означава са f^{-1} . Ако је

$$f : D_f \rightarrow E_f,$$

онда је

$$f^{-1} : E_f \rightarrow D_f.$$

Дакле, код инверзне функције област дефинисаности и скуп вредности функције замењују места. За функцију f и њену инверзну функцију важи

$$f(f^{-1}(y)) = y,$$

и

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Нека је функција f диференцијабилна у тачки x_0 и нека важи

$$f'(x_0) \neq 0.$$

Нека је

$$y_0 = f(x_0).$$

Тада је инверзна функција f^{-1} диференцијабилна у тачки y_0 . Покажимо ово. По дефиницији извода имамо

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y}.$$

Означимо прираштај функције f^{-1} са

$$\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0).$$

Тада је

$$f^{-1}(y_0 + \Delta y) = f^{-1}(y_0) + \Delta x,$$

односно, пошто је

$$f^{-1}(y_0) = x_0,$$

добивамо

$$f^{-1}(y_0 + \Delta y) = x_0 + \Delta x.$$

Применом функције f на обе стране последње једнакости следи

$$y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x).$$

Како је

$$y_0 = f(x_0),$$

добива се

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Зато количник прираштаја инверзне функције можемо написати у облику

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}.$$

Множењем бројиоца и имениоца са $\frac{1}{\Delta x}$, где

$$\Delta x \neq 0,$$

добијамо:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}.$$

Преласком на граничну вредност, када

$$\Delta y \rightarrow 0,$$

а због непрекидности инверзне функције такође важи

$$\Delta x \rightarrow 0,$$

следи

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}.$$

Пошто је по дефиницији извода функције f

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

добијамо

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Дакле, извод инверзне функције у тачки $y_0 = f(x_0)$ једнак је реципрочној вредности извода полазне функције у одговарајућој тачки.

Ако се независна променљива инверзне функције означи са x , формула се обично записује у облику

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Пример 7.7. Посматрајмо функцију

$$f(x) = \arcsin x,$$

која је инверзна функција синусној функцији на домену $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Област дефинисаности ове функције је

$$x \in [-1, 1],$$

а њене вредности припадају интервалу

$$f(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Пошто је функција $\arcsin x$ инверзна функцији $\sin x$, важи

$$x = \sin f(x).$$

Диференцирањем обе стране једнакости по x , добија се

$$1 = \cos f(x) \cdot f'(x).$$

Одатле следи

$$f'(x) = \frac{1}{\cos f(x)}.$$

Да бисмо изразили резултат помоћу променљиве x , користимо идентитет

$$\sin^2 f(x) + \cos^2 f(x) = 1.$$

Како је

$$\sin f(x) = x,$$

добија се

$$\cos^2 f(x) = 1 - x^2.$$

Пошто је

$$f(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

косинус аргумената $f(x)$ је ненегативан на том интервалу, па је

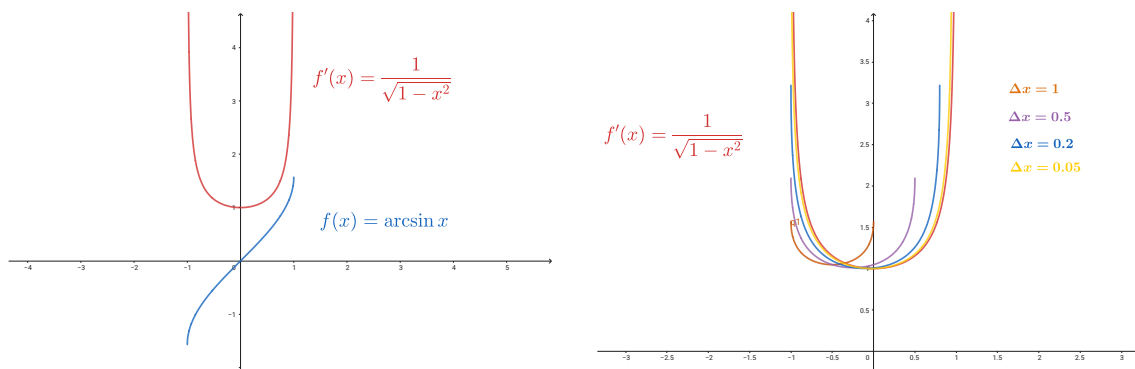
$$\cos f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Зато је

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Приметимо да је функција $\arcsin x$ дефинисана и у тачкама $x = -1$ и $x = 1$, али у тим тачкама нема извод. Добијена формула за извод важи за

$$x \in (-1, 1).$$



Слика 7.2: Визуелизација графика функције $f(x) = \arcsin x$ и њеног извода $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, као и приближавања количника прираштаја графику извода.

Посматрајмо сада функцију

$$f(x) = \arccos x,$$

која је функција инверзна косинусној функцији. Њена област дефинисаности је

$$x \in [-1, 1],$$

а вредности функције припадају интервалу

$$f(x) \in [0, \pi].$$

Пошто је $\arccos x$ инверзна функцији $\cos x$, важи

$$x = \cos f(x).$$

Диференцирањем добијамо

$$1 = -\sin f(x) \cdot f'(x).$$

Одатле следи

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin f(x)}.$$

Користећи идентитет

$$\sin^2 f(x) + \cos^2 f(x) = 1,$$

и чињеницу да је

$$\cos f(x) = x,$$

добија се

$$\sin^2 f(x) = 1 - x^2.$$

Пошто је

$$f(x) \in [0, \pi],$$

синус је ненегативан, па важи

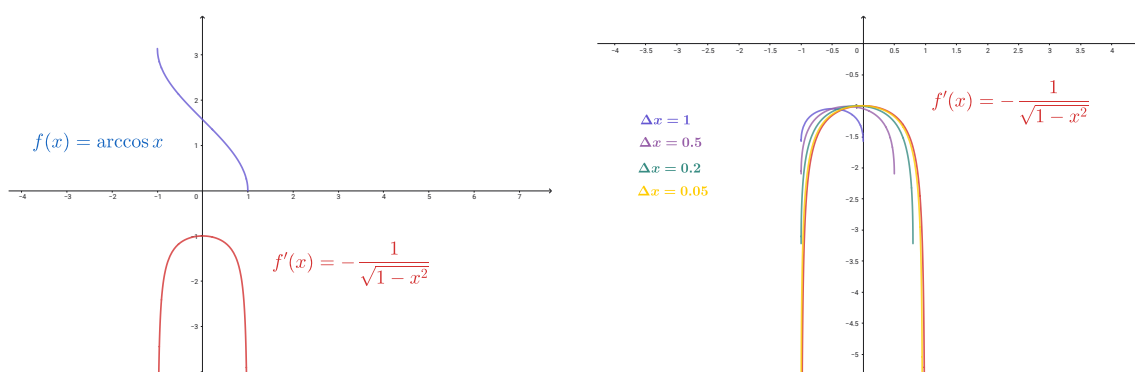
$$\sin f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Према томе,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Приметимо да је функција $\arccos x$ дефинисана и у тачкама $x = -1$ и $x = 1$, али у тим тачкама нема извод. Добијена формула за извод важи за

$$x \in (-1, 1).$$



Слика 7.3: Визуелизација графика функције $f(x) = \arccos x$ и њеног извода $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, као и приближавања количника прираштаја графику извода.

За функцију инверзну тангенсној функцији

$$f(x) = \arctan x,$$

област дефинисаности је

$$x \in \mathbb{R}.$$

Пошто је $\arctan x$ инверзна функцији $\tan x$, важи

$$x = \tan f(x).$$

Диференцирањем се добија

$$1 = \frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x).$$

Одатле следи

$$f'(x) = \cos^2 f(x).$$

Користимо основни тригонометријски идентитет

$$\sin^2 f(x) + \cos^2 f(x) = 1.$$

Дељењем ове једнакости са $\cos^2 f(x)$ добија се

$$\frac{\sin^2 f(x)}{\cos^2 f(x)} + \frac{\cos^2 f(x)}{\cos^2 f(x)} = \frac{1}{\cos^2 f(x)}.$$

Пошто важи

$$\frac{\sin^2 f(x)}{\cos^2 f(x)} = \tan^2(f(x)),$$

и

$$\frac{\cos^2 f(x)}{\cos^2 f(x)} = 1,$$

следи

$$1 + \tan^2(f(x)) = \frac{1}{\cos^2 f(x)}.$$

Одавде се изражава $\cos^2(f(x))$:

$$\cos^2(f(x)) = \frac{1}{1 + \tan^2(f(x))}.$$

Како је

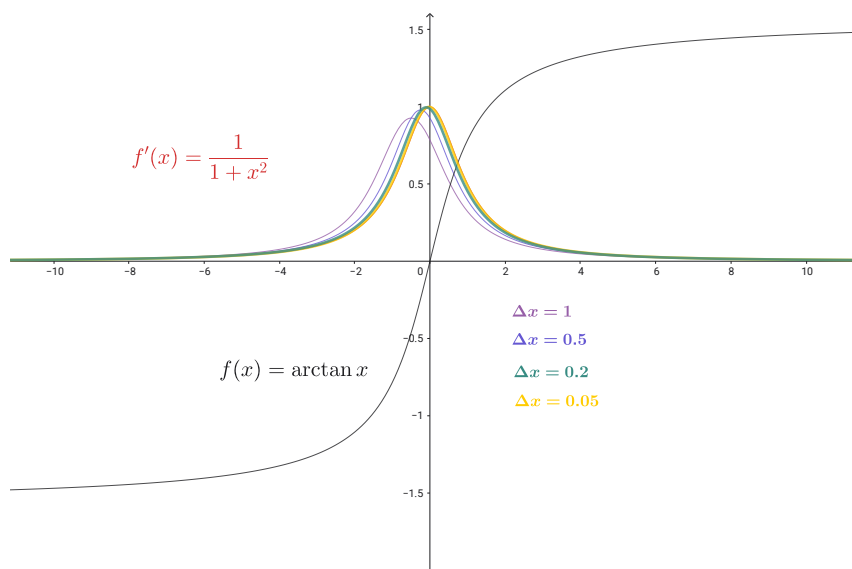
$$\tan(f(x)) = x,$$

добија се

$$\cos^2(f(x)) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Дакле,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$



Слика 7.4: Приближавање количника прираштаја функције $f(x) = \arctan x$ графику њеног извода $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

На крају посматрајмо функцију

$$f(x) = \operatorname{arccot} x.$$

Њена област дефинисаности је

$$x \in \mathbb{R}.$$

Пошто је $\operatorname{arccot} x$ инверзна функцији $\cot x$, важи

$$x = \cot f(x).$$

Диференцирањем добијамо

$$1 = -\frac{1}{\sin^2 f(x)} f'(x).$$

Одатле следи

$$f'(x) = -\sin^2 f(x).$$

Користимо идентитет

$$1 + \cot^2 f(x) = \frac{1}{\sin^2 f(x)},$$

па је

$$\sin^2 f(x) = \frac{1}{1 + \cot^2 f(x)}.$$

Како је

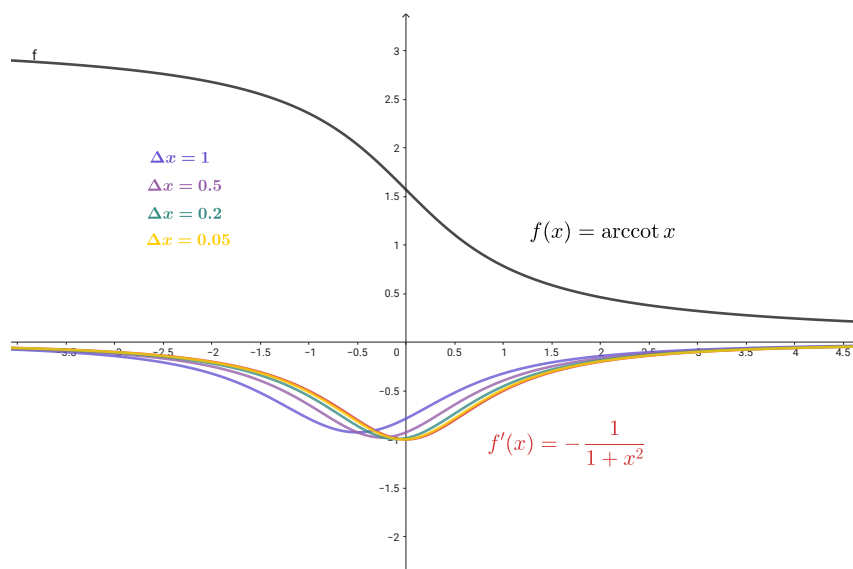
$$\cot f(x) = x,$$

следи

$$\sin^2 f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Према томе,

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$



Слика 7.5: Приближавање количника прираштаја функције $f(x) = \operatorname{arccot} x$ графику њеног извода $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

Добијени резултати проширују таблицу основних извода:

Функција	Извод и услови
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{arccot} x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

Изведена правила, заједно са изводима елементарних функција, представљају основу диференцијалног рачуна и омогућавају ефикасно одређивање извода сложених функција.

Глава 8

Методичка реализација наставне теме „Извод функције“

8.1 Основни подаци о наставној теми

- Наставни предмет: Математика
- Разред: IV разред гимназије
- Наставна област: Диференцијални рачун
- Наставна тема: Извод функције
- Наставни садржај: Увођење појма извода функције
- Тип наставе: Обрада новог наставног садржаја
- Предвиђени број часова: више наставних часова

8.2 Циљ и задаци обраде теме

Циљ обраде теме је да ученици усвоје појам извода функције као величине која описује њену промену у посматраној тачки и разумеју потребу за његовим увођењем. Ученици се упознају са геометријским значењем извода као нагиба тангенте на график функције и аналитичким значењем кроз граничну вредност количника прираштаја.

ГЛАВА 8. МЕТОДИЧКА РЕАЛИЗАЦИЈА НАСТАВНЕ ТЕМЕ „ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ“

Посебан значај има повезивање интуитивног разумевања извода са његовом формалном дефиницијом, као и упознавање са условима постојања извода, појмом диференцијабилности и основним правилима диференцирања која се примењују при одређивању извода сложенијих функција.

8.3 Исходи наставне теме

По завршетку обраде наставне теме ученик ће бити у стању да:

- објасни потребу за увођењем извода и повеже га са проблемима одређивања тангенте и тренутне брзине;
- наведе и протумачи дефиницију извода функције као граничне вредности количника прираштаја;
- повеже геометријско значење извода са коефицијентом правца тангенте на график функције;
- разликује појмове непрекидности и диференцијабилности и примени услове за испитивање постојања извода у тачки;
- примењује основне формуле за изводе елементарних функција и правила диференцирања при одређивању извода сложенијих функција;
- објасни физичко значење извода и повеже га са појмом тренутне брзине и другим величинама које описују промену.

8.4 Наставне методе, облици рада и наставна средства

У реализацији наставне теме примењују се различите наставне методе које омогућавају постепено увођење новог појма и повезивање интуитивног, графичког и формалног приступа.

Користе се следеће наставне методе:

- метода разговора, кроз усмеравање ученика ка уочавању проблема који доводе до увођења извода;

ГЛАВА 8. МЕТОДИЧКА РЕАЛИЗАЦИЈА НАСТАВНЕ ТЕМЕ „ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ“

- метода усменог излагања, при формалном дефинисању појмова и увођењу правила;
- метода демонстрације, применом графичких приказа и визуелизације промене нагиба сечице и тангенте;
- метода истраживачког учења, кроз анализу примера и уочавање закључака о постојању и примени извода.

Од облика рада примењују се:

- фронтални рад, при увођењу нових појмова и систематизацији садржаја;
- индивидуални рад ученика, при решавању задатака и провери усвојености знања.

Наставна средства која се користе током реализације наставне теме су:

- школска табла;
- презентација;
- математички софтвер за графички приказ функција и визуелизацију геометријског значења извода;
- збирка задатака.

8.5 Корелација са другим областима

Наставна тема се ослања на претходно усвојена знања из области функција, графика функција, граничних вредности и алгебарских операција. Ова знања представљају основу за разумевање извода као граничне вредности количника прираштаја.

Посебан значај има корелација са физиком, где се извод повезује са појмом тренутне брзине и брзине промене физичких величина. На тај начин ученици уочавају да извод није само формални математички поступак, већ средство за описивање појава које се мењају.

Појам извода има примену и у другим областима, као што су природне науке, техника, економија и информатика, где се користи за анализу промена и оптимизацију различитих процеса.

8.6 Методичка реализација наставне теме

Мотивација за увођење појма извода

Увођење појма извода представља важан корак у развоју математичког мишљења ученика, јер се први пут уводи величина која описује промену функције у једној тачки. Са методичког становишта, важно је да ученици пре формалне дефиниције уоче потребу за оваквим појмом.

Уводни део наставне теме може започети кратким освртом на проблеме који су довели до развоја диференцијалног рачуна, пре свега проблем одређивања тангенте на график функције и одређивања тренутне брзине кретања.

Као мотивациони пример разматра се функција $f(x) = x^2$. Ученици посматрају нагиб сечице која пролази кроз две тачке графика и анализирају њен положај када се једна тачка приближава другој. На тај начин се постепено долази до идеје да се нагиб тангенте може описати као гранична вредност количника прираштаја.

Оваквим приступом ученици најпре формирају интуитивну представу о изводу, а затим се прелази на његово аналитичко дефинисање.

Увођење појма и дефиниције извода

Након мотивационог дела приступа се постепеном формализовању појма извода. Полази се од функције

$$y = f(x),$$

и анализира се промена вредности функције при промени аргумента. Уводи се прираштај аргумента Δx и одговарајући прираштај функције:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Количник прираштаја

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

представља просечну промену функције на посматраном интервалу и геометријски одговара коефицијенту правца сечице графика функције.

Посматрањем граничног случаја када се прираштај аргумента приближава нули добија се извод функције у тачки:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

ГЛАВА 8. МЕТОДИЧКА РЕАЛИЗАЦИЈА НАСТАВНЕ ТЕМЕ „ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ“

Уколико ова гранична вредност постоји у свакој тачки интервала, извод се посматра као нова функција:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Поред ознаке $f'(x)$ користе се и ознаке:

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad Df(x).$$

Директна примена дефиниције извода приказује се на једноставном примеру функције $f(x) = x^2$, како би ученици разумели начин добијања извода и повезали формалну дефиницију са поступком рачунања.

Испитивање постојања извода и диференцијабилност

Након усвајања дефиниције извода разматра се питање да ли извод постоји у свакој тачки области дефинисаности функције. Ученицима се указује да се при приближавању посматраној тачки функција може различито понашати са леве и десне стране, због чега се уводе једностранни изводи.

Леви извод дефинише се као:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

а десни извод као:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Извод у тачки x_0 постоји ако постоје оба једностранна извода и ако су њихове вредности једнаке:

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

У настави се овај услов илуструје примерима функција $f(x) = |x|$, $f(x) = x|x|$ и $f(x) = \sqrt{x}$. Функција $|x|$ показује да непрекидност није довољан услов за постојање извода, док функција $x|x|$ представља пример функције која је извод у тачки упркос томе што је дефинисана различитим изразима са леве и десне стране те тачке. Функција $f(x) = \sqrt{x}$ показује да у тачки $x = 0$ извод не постоји, јер десни једностранни извод није коначан, већ је бесконачан, док леви једностранни извод није могуће разматрати пошто функција није дефинисана за $x < 0$.

ГЛАВА 8. МЕТОДИЧКА РЕАЛИЗАЦИЈА НАСТАВНЕ ТЕМЕ „ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ“

На основу уведеног појма извода дефинише се диференцијабилност функције. Функција је диференцијабилна у тачки ако у њој постоји извод. Важи:

$$\text{диференцијабилност} \Rightarrow \text{непрекидност}.$$

Обрнута импликација није увек тачна, што показује пример функције $f(x) = |x|$.

Физичко значење извода

Након формалног увођења појма извода ученицима се представља његово физичко значење кроз проблем одређивања тренутне брзине. На тај начин се показује да извод представља општу меру промене једне величине у односу на другу.

Ако је кретање тела описано функцијом пута

$$s = f(t),$$

где је s пређени пут, а t време, средња брзина на временском интервалу дата је количником:

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Када се временски интервал смањује и тежи нули, добија се тренутна брзина:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Пошто овај израз представља извод функције пута, следи:

$$v(t) = s'(t).$$

У настави се ова веза илуструје примером кретања описаног функцијом $s(t) = 3t^2$, при чему ученици разликују средњу брзину на интервалу од тренутне брзине у одређеном тренутку. На овај начин повезују апстрактни математички појам са конкретном физичком применом.

Изводи елементарних функција и значај табеле извода

Након што ученици усвоје појам извода и поступак његовог одређивања применом дефиниције, приступа се увођењу извода основних елементарних

ГЛАВА 8. МЕТОДИЧКА РЕАЛИЗАЦИЈА НАСТАВНЕ ТЕМЕ „ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ“

функција. На овом нивоу важно је да ученици разумеју да су добијене формуле резултат претходно дефинисаног појма извода, а не независна правила која се механички памте.

Изводи елементарних функција могу се добити директном применом дефиниције извода, али би такав поступак при одређивању извода сложенијих функција био непрактичан и временски захтеван. Због тога се добијени резултати систематизују у табели извода.

Табела извода представља основно средство за даљи рад, јер омогућава брзо препознавање извода познатих функција и примену правила диференцирања код сложенијих израза. Њена улога није само у памћењу формула, већ у развијању способности ученика да одаберу одговарајући поступак при одређивању извода.

$f(x)$	$f'(x)$	D_f
C	0	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$
a^x	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Правила диференцирања

Након усвајања извода елементарних функција приступа се увођењу правила диференцирања. Њихова улога је да ученицима омогуће одређивање извода функција које су добијене комбиновањем већ познатих функција, без поновног враћања на дефиницију извода.

ГЛАВА 8. МЕТОДИЧКА РЕАЛИЗАЦИЈА НАСТАВНЕ ТЕМЕ „ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ“

Ученицима се указује да су ова правила заснована на дефиницији извода, али се у даљем раду користе као готови резултати. На тај начин пажња се усмерава на препознавање облика функције и избор одговарајућег правила, а не на понављање истих аналитичких поступака.

Ако су функције f и g диференцијабилне, важе следећа правила:

$$(cf(x))' = cf'(x),$$

где је c константа.

За збир функција:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

За производ функција:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

За количник функција, уз услов:

$$g(x) \neq 0,$$

важи:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Применом ових правила ученици прелазе од одређивања извода једноставних функција ка решавању сложенијих примера.

Сложена и инверзна функција

Након усвајања основних правила диференцирања уводи се правило за одређивање извода сложене функције. Ово правило омогућава рад са функцијама које су добијене композицијом две или више функција.

За функцију облика

$$f(x) = F(g(x)),$$

где је $g(x)$ унутрашња, а $F(x)$ спољашња функција, важи:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x).$$

При примени овог правила ученици најпре препознају унутрашњу и спољашњу функцију, затим одређују њихове изводе и добијене резултате повезују множењем.

ГЛАВА 8. МЕТОДИЧКА РЕАЛИЗАЦИЈА НАСТАВНЕ ТЕМЕ „ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ“

За увођење извода инверзне функције полази се од функције која је непрекидна и строго монотона на посматраном интервалу и која има инверзну функцију. Ако постоји извод функције f у тачки x_0 и важи:

$$f'(x_0) \neq 0,$$

онда је њена инверзна функција диференцијабилна у одговарајућој тачки и важи:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Ово правило омогућава одређивање извода инверзних функција без директне примене дефиниције извода. У настави се најчешће примењује код тригонометријских инверзних функција, као што су $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ и $\operatorname{arccot} x$.

Систематизација и провера разумевања

Након обраде наставне теме врши се систематизација усвојених појмова и повезивање различитих поступака одређивања извода. Ученици обнављају дефиницију извода као граничне вредности количника прираштаја, геометријско и физичко значење извода, услове постојања извода, појам диференцијабилности, као и правила која се примењују при диференцирању сложенијих функција.

У циљу провере остварености постављених наставних циљева и утврђивања степена разумевања обрађених појмова, ученицима се задају задаци који обухватају различите аспекте наставне теме: примену дефиниције извода, испитивање диференцијабилности и примену правила диференцирања.

1. Одредити извод функције

$$f(x) = \cos x.$$

Задатак има за циљ да ученици повежу добијање формула за извод са дефиницијом извода и поступцима који су претходно разматрани код елементарних функција. Добија се:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

2. Испитати диференцијабилност функције

$$f(x) = |x - 1|$$

у тачки

$$x_0 = 1.$$

Овим задатком проверава се разумевање услова постојања извода. Испитују се леви и десни извод и закључује да функција није диференцијабилна у посматраној тачки, јер:

$$f'_-(1) \neq f'_+(1).$$

Следи:

$$f'(1) \text{ не постоји.}$$

3. Одредити извод функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}.$$

Овим задатком проверава се примена правила количника и повезивање више основних правила диференцирања. Добија се:

$$f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2 + 1)e^x}{e^{2x}}.$$

Одабрани задаци обухватају различите нивое примене знања и омогућавају проверу разумевања основних појмова и поступака у вези са изводом функције. Кроз њих ученици повезују дефиницију извода, услове диференцијабилности и правила диференцирања, чиме се заокружује обрада наставне теме.

8.7 Методичка напомена

Током увежбавања наставник треба да обрати пажњу на типичне грешке које се јављају при примени правила диференцирања, као што су изостављање извода унутрашње функције код сложених функција, грешке у знаку код тригонометријских функција и неправилна примена правила за производ и количник. Анализом ових грешака ученици лакше уочавају суштину поступка и развијају способност правилне примене правила диференцирања, уместо њиховог механичког памћења.

ГЛАВА 8. МЕТОДИЧКА РЕАЛИЗАЦИЈА НАСТАВНЕ ТЕМЕ „ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ“

Задаци за самосталан рад бирају се тако да ученици примене поступке обрађене током наставне теме на новим, али сродним примерима. На пример, у току наставе детаљно је изведена формула за извод функције $\sin x$ применом дефиниције извода, док је извођење формуле за извод функције $\cos x$ остављено ученицима за домаћи задатак, уз напомену да се поступак спроводи аналогно.

На тај начин проверава се разумевање појма извода, диференцијабилности, основних правила диференцирања и њихове примене при одређивању извода сложенијих функција.

Глава 9

Закључак

Извод функције представља један од основних појмова математичке анализе и има значајну улогу у даљем развоју математичког мишљења ученика.

У овом раду размотрен је појам извода функције са теоријског и методичког аспекта.

У теоријском делу рада приказано је увођење појма извода функције преко граничне вредности количника прираштаја, као и његово даље развијање кроз правила диференцирања. На тај начин показано је како се од основне дефиниције извода долази до поступака који омогућавају одређивање извода различитих функција.

Методички део рада посвећен је начину увођења и обраде овог појма у настави математике. Истакнут је значај постепеног увођења нових садржаја, избора одговарајућих примера и повезивања различитих начина разумевања извода, како би ученици лакше усвојили и применили научена правила.

Оваквим приступом ученицима се омогућава да разумеју суштину овог математичког појма, развију способност повезивања математичких идеја и стечена знања самостално примењују у новим ситуацијама.

Литература

- [1] Richard Courant, Herbert Robbins и Ian Stewart. *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. New York, Oxford: Oxford University Press, 1996.
- [2] Otto Toeplitz. *The Calculus: A Genetic Approach*. Chicago, London: The University of Chicago Press, 2007.
- [3] Душан Аднађевић и Зоран Каделбург. *Математичка анализа I*. 10. издање. Београд: Универзитет у Београду – Математички факултет и Круг, 2012.
- [4] Зоран Каделбург. „Две стотине година од првог издања Кошијевог уџбеника ‘Курс анализе’”. У: *Настава математике* LXVI.3--4 (2021), стр. 57–64.
- [5] Зоран Каделбург, Владимир Мићић, Срђан Огњановић и Соња Чукић. *Анализа са алгебром 3: уџбеник са збирком задатака за трећи разред Математичке гимназије*. Београд: Круг, 2021.
- [6] Круг издавачка кућа. *Припреме за реализацију наставе математике за четврти разред гимназије*. URL: <https://www.krugizdavackakuca.rs/images/Pripreme/Pripreme%204M.pdf>.
- [7] Милутин Обрадовић и Душан Георгијевић. *Математика са збирком задатака за 4. разред средње школе*. Београд: Завод за уџбенике, 2011.
- [8] Ђурђица Такачи и Марјетица Самарџијевић. „Визуелни приступ дефиницији извода функције”. У: *Настава математике* LI.1--2 (2006), стр. 19–28.

Биографија аутора

Ана Милинковић рођена је 1992. године у Ужицу, где је завршила основно и средње образовање. Након тога уписала је Математички факултет Универзитета у Београду, на којем је завршила основне академске студије математике, смер Професор математике и рачунарства.