

Математички факултет
Универзитет у Београду



Јелена Илић

C^0 -контактна топологија

- мастер рад -

Београд, септембар 2026. године

Ментор:

др Душан Јоксимовић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Игор Уљаревић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Јована Николић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Садржај

Предговор	3
Захвалница	7
1 Основни појмови контактне геометрије	11
2 Површи у контактної геометрији	23
2.1 Карактеристичне фолијације	24
2.2 Конвексне и предлагранжеве површи	28
3 Инваријанта облика	35
3.1 Симплектичка инваријанта облика	36
3.2 Контактна инваријанта облика	42
4 C^0-ригидност у контактної топологији: преглед резултата и потенцијални правци истраживања	55
4.1 Доказ теореме Ељашберг - Громова помоћу инваријанте облика	56
4.2 Допринос тезе и будући правци истраживања	59
4.2.1 Контрапример за доказ става 6.11. у [18]	59
4.2.2 C^0 -ригидност Лежандрових чворова и инваријанта облика	61
4.2.3 Нови доказ теореме о C^0 -ригидности Ељашберга и Громова помоћу СРИ скупова	65
Литература	69

Предговор

Контактна топологија је област математике која се бави изучавањем контактних многострукости – многострукости на којима је задата максимално неинтеграбилна дистрибуција – и представља актуелну област истраживања због примена у разним областима математике: теорији фолијација, теорији парцијалних диференцијалних једначина, суб-Римановој геометрији, као и у физици: термодинамика и геометријска оптика. Група симетрија контактне многострукости су дифеоморфизми те многострукости који чувају контактну структуру (зовемо их још и *контактоморфизмима* или *контактним дифеоморфизмима*).

C^0 -контактна топологија је релативно млада подобласт контактне топологије која се бави изучавањем „неглатких објеката и феномена” у контактної топологији. Историјски гледано, резултат који се сматра зачетком ове области је теорема Ељашберга¹ и Громова² о C^0 -ригидности групе контактних дифеоморфизама, која каже да је група контактних дифеоморфизама затворена у групи свих дифеоморфизама у односу на C^0 -топологију (то јест компактно-отворену топологију).

Резултат теореме Ељашберг–Громова се подразумевао још од средине 1970-их. Формално објављени докази појавили су се релативно скоро у радовима Милера³ и Шпата⁴ [20] и Милера [18].⁵ Оба доказа користе технику *инваријанте облика*⁶ коју је увео Ељашберг у раду [6]. Грубо речено, контактна инваријанта облика памти одређене информације о кохомологији Лагражевих подмногострукости у симплектизацији дате контактне многострукости.

¹ Yakov Eliashberg, амерички математичар руско-јеврејског порекла.

² Mikhail Gromov, француски математичар руско-јеврејског порекла.

³ Stefan Müller, немачки математичар.

⁴ Peter Spaeth, амерички математичар.

⁵ Доказ из овог рада треба узети са резервом јер постоји потенцијална грешка. Видети подсекцију 4.2.1.

⁶ Енгл: shape invariant.

Теорема Ељашберга и Громова природно мотивише дефиницију групе контактних хомеоморфизама као затворења групе контактних дифеоморфизама у групи свих хомеоморфизама у односу на C^0 -топологију. Централни проблем у области је разумети колико контактне геометрије контактни хомеоморфизми „памте”. Овај проблем данас је тема интензивног истраживања (видети [18, 20, 27, 25, 1, 24, 4, 21, 23, 5, 26]) и многе његове инстанце су и даље отворени проблеми. Ми ћемо се у овој тези посебно осврнути на проблем C^0 -ригидности специјалних класа подмногострукости у контактної геометрији. Специјално:

Питање (C^0 -ригидност Лежандрових чворова): *Нека је $\Lambda \subset (M^3, \xi)$ Лежандров чвор⁷ и φ контактни хомеоморфизам. Ако је чвор $\varphi(\Lambda)$ гладак, да ли је он уједно и Лежандров?*

Одговор на ово питање је потврдан и резултат је радова [4, 27, 24].

Циљ ове тезе је формално заснивање инваријанте облика и приказ њених примена у C^0 -контактної топологији.

Теза је структурирана на следећи начин:

У првој глави уводимо основне појмове контактне геометрије.

У другој глави разматрамо површи у тродимензионалној контактної геометрији, при чему издвајамо класе подмногострукости које су битне за дефиницију контактне инваријанте облика.

У трећој глави ћемо формално увести контактну инваријанту облика, дати преглед примера и њених основних својстава.

У четвртој глави изложићемо примене инваријате облика у C^0 -контактної топологији. Као прву примену, доказаћемо теорему Ељашберг-Громова пратећи [20]. Доказ у овом раду се заснива на Громовљевој алтернативи, која каже да је C^0 -затворење групе контактних дифеоморфизама или сама та група (ригидност), или садржи компоненту повезаности идентитета у групи свих дифеоморфизама у односу на C^0 -топологију (флексибилност). Милер и Шпат доказују ригидно разрешење алтернативе користећи инваријанту облика.

У самосталном раду [18] Милер даје алтернативни доказ теореме Ељашберг-Громова који не користи Громовљеву алтернативу, већ се само заснива на карактеризацији контактоморфизама помоћу инваријанте облика. Испоставља се да у доказу главне теореме постоји проблем на који ћемо указати у подсекцији 4.2.1. У овом делу рада такође разматрамо питање C^0 -ригидности одређених класа подмногострукости и излажемо идеје за потенцијалну примену технике инваријанте облика као алата за решавање тог питања.

⁷ Чвор $\gamma : S^1 \rightarrow (M, \xi)$ је Лежандров ако је у свакој својој тачки тангентан на контактну структуру ξ .

На самом крају, даћемо доказ C^0 -ригидности групе контактних дифеоморфизама у димензији 3 који не користи Громовљеву алтернативу. Идеја доказа је дати нову карактеризацију контактоморфизама користећи резултате из [27]. Овај доказ представља и један од оригиналних доприноса ове тезе.

Захвалница

Желим да се захвалим свом ментору, Душану Јоксимовићу, на следећем: што није узимао у обзир, штавише, што је игнорисао моје негодовање – када нисам желела да држим предавање на семинару у термину који би он одредио; што није узимао у обзир моје жеље – када сам желела сама да изаберам тему коју бих излагала на том истом семинару. Желим да му се захвалим што је промишљено и пажљиво бирао теме које ми је наменио да држим на семинару, јер сам кроз припрему самих предавања разјаснила концепте који су ми били неопходни за разумевање неких питања која излажемо у овој тези.

Желим да му се захвалим што ми је помагао приликом писања ове тезе и својим сугестијама побољшао њену структуру, као и сам текст. Желим да му кажем да сам у протеклих годину дана рада са њим, гледајући га како приступа математици и која питања поставља, и сама успела да реализујем жељу да променим свој приступ математици. За ту жељу је заслужан професор Дарко Милинковић, коме ћу упутити пар речи мало касније. Желим да му кажем (поново упућено ментору) да ми је неизмерно драго што сам видела да му је важно да ова теза има и оригиналан допринос. Желим да кажем да ми је значило да током писања тезе уђем у истраживачку математику. И да се захвалим што организује горепоменути семинар са циљем да унапреди науку на нашем факултету.

Желим да се захвалим Филипу Броћићу који је на том семинару држао предавања из теорије конвексних хиперповрши, која су мени била од великог значаја за саму тезу. Желим да се захвалим Вукашину Стојисављевићу који нам је помогао око контрапримера који дајемо у овој тези. Желим да се захвалим професору Дарку Милинковићу што је истрајао са жељом да ми објасни да са мојим пређашњим приступом математици нећу далеко догурати. И да кажем да сам гледајући њега, његове резултате, као и људе из наше групе – групе симплектичара – схватила да желим да будем добра попут њих. То је неминовно значило промену приступа математици, што није праволинијски процес, али у којем ми је мој ментор (вероватно несвесно) јако помогао. Желим да се захвалим свим људима из наше групе што годинама уназад организују конференцију из Симплектичке топологије, на којој сам видела колико квалитетних људи има наша група, при чему су (скоро) сви бивши студенти нашег факултета и тренутно имају позиције широм света. Превасходно мислим на математички квалитетне људе, у чији сам се квалитет највише уверила посматрајући их на који начин дискутују током самих предавања на конференцији

и посматрајући која питања постављају. И пожелела сам да будем попут њих. Још једна опаска о конференцији – желим да се захвалим организаторима што су прошле године позвали Јашу Ељашберга (човека чијом се контактном инваријантом бавим у овој тези).

Желим да се захвалим Јелени Катић на много чему, и то ћу урадити уживо.

На крају, желим да се захвалим мојим родитељима и сестри која ми је својим неприсуством створила услове за рад да ову тезу и напишем.

1 Основни појмови контактне геометрије

Контактна структура на многострукости непарне димензије је максимално неинтеграбилна дистрибуција кодимензије један. Да бисмо формално дефинисали овај појам, потребне су нам следеће дефиниције.

Дефиниција 1.1. Нека је M глатка многострукост димензије n . *Дистрибуција* ξ димензије k на многострукости M је глатко сечење

$$\xi : M \rightarrow \text{Gr}(k, TM),$$

при чему је број $n - k$ *кодимензија* те дистрибуције.

Свака дистрибуција кодимензије један се локално може видети као језгро неке диференцијалне 1-форме. Међутим, ово својство у општем случају не важи глобално. Дистрибуције које су глобално задате језгром 1-форме називамо *кооријентабилним* и у наставку рада подразумевамо да су све дистрибуције са којима радимо такве. Приметимо да 1-форма чије језгро задаје контактну структуру није јединствена. Свака 1-форма која се од те разликује до на множење скаларом – глатком функцијом која је у свакој тачки различита од нуле – такође задаје исту контактну структуру.

Међу дистрибуцијама издвајамо класу *интеграбилних дистрибуција*. Да бисмо дефинисали овај појам, најпре нам је потребна дефиниција интегралне подмногострукости.

Дефиниција 1.2. Нека је M многострукост димензије n и ξ глатка дистрибуција димензије k на њој. Подмногострукост $N \subset M$ димензије k је *интегрална у односу на ξ* ако за свако $x \in N$ важи $T_x N = \xi_x$.

Дефиниција 1.3. Нека је ξ глатка дистрибуција димензије k задата на многострукости M димензије n . Кажемо да је ξ *интеграбилна* ако за сваку тачку $x \in M$ постоји интегрална многострукост N_x која је садржи.

У димензији три геометријска интерпретација интеграбилности је следећа: ако је унапред свакој тачки еуклидског простора $\mathbb{R}^3$ додељена равна, та дистрибуција је интеграбилна ако можемо простор да изделимо на међусобно дисјунктне површи, тако да те површи у свакој својој тачки тангирају дате равни.

Дефиниција 1.4. Нека је ξ глатка дистрибуција димензије k задата на многострукости M димензије n . Кажемо да је ξ *инволутивна* ако је простор сечења $\Gamma(\xi)$ Лијева подалгебра алгебре $\mathcal{X}(M)$.

Везу између интеграбилности (која је геометријско својство) и инволутивности (која је алгебарско својство) нам даје Фробенијусова теорема.

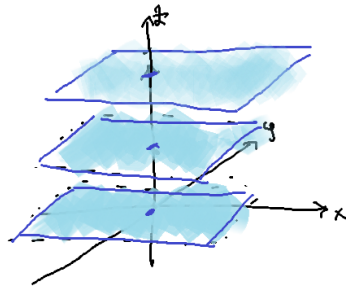
Теорема 1.5. Нека је ξ дистрибуција димензије k задата на многострукости M димензије n . Тада је следеће еквивалентно:

1. ξ је интеграбилна;
2. ξ је инволутивна.

Интеграбилна дистрибуција задаје *фолијацију* амбијенталне многострукости.

Неформално говорећи, *фолијација* димензије k је релација еквиваленције на амбијенталној многострукости у односу на коју су класе еквиваленције повезане имерзоване подмногострукости димензије k . Те подмногострукости разлиставају амбијенталну многострукост, при чему се захтева да то разлиставање локално изгледа као разлиставање простора $\mathbb{R}^n$ на косете $\{x + \mathbb{R}^k : x \in \mathbb{R}^n\}$ ¹.

Пример 1.6. На слици испод је приказано разлиставање простора $\mathbb{R}^3$ на косете $x + \mathbb{R}^2$.



Слика 1.1. разлиставање простора $\mathbb{R}^3$

Један од начина да формално уведемо појам фолијација је помоћу *атласа фолијације*.

Атлас фолијације кодимензије k (при чему је $0 \leq k \leq n$) на многострукости M^n је атлас

$$(\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k)_{i \in I}$$

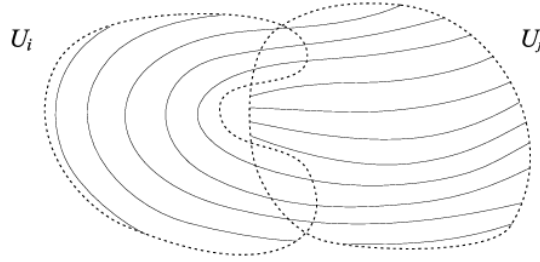
на M такав да функције преласка φ_{ij} локално имају облик

$$\varphi_{ij}(x, y) = (g_{ij}(x, y), h_{ij}(y)),$$

у односу на декомпозицију $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$.

¹ На овом месту смо поистоветили $\mathbb{R}^k$ са одговарајућим подскупом $\{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) : x_i \in \mathbb{R}\}$ еуклидског простора $\mathbb{R}^n$.

Карте атласа фолијације називамо *картама фолијације*.



Слика 1.2. карте фолијације

Свака карта фолијације U_i представља дисјунктну унију *плочица*², које су дефинисане као компоненте повезаности подмногострукости $\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^{n-k} \times \{y\})$, за $y \in \mathbb{R}^k$. Ове плочице се глобално надовезују у *листо*ве, при чему су они повезане имерзоване подмногострукости димензије $n - k$ у M .

Дефиниција 1.7. *Фолијација кодимензије k на многострукости M је максимални атлас фолијације на M кодимензије k .*

Контактне структуре су у суштој супротности са фолијацијама у односу на појам интегралности. Фолијације можемо да видимо као разлистивање амбијенталне многострукости на интегралне подмногострукости. Док су, са друге стране, контактне структуре максимално неинтеграбилне. Геометријска интерпретација максималне неинтеграбилности у димензији три је следећа: ако је дистрибуција максимално неинтеграбилна, не постоји површ у простору која у свакој својој тачки тангира ту дистрибуцију. Штавише, како год изабрали површ у простору и мали отворени скуп на њој, постоји тачка тог скупа у којој површ није тангентна на контактну структуру.

Појам максималне неинтеграбилности формално уводимо алгебарски. Пре формалне дефиниције, наводимо пример који служи као њена мотивација.

Пример 1.8. Ако је дистрибуција ξ задата језгром 1-форме α , тада је она инволутивна ако и само ако је $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Ово следи директно из идентитета

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]). \quad \star$$

Из Фробенијусове теореме и примера 1.8 следи да је кооријентабилна дистрибуција интегрална ако и само ако важи $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$. Њему потпуно супротан услов је да у свакој тачки многострукости важи $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$, што мотивише следећу дефиницију максималне неинтеграбилности:

² Енгл: plaque.

Дефиниција 1.9. Дистрибуција задата језгром 1-форме α на многострукости димензије $2n + 1$ је *максимално неинтеграбилна* ако је у свакој тачки многострукости испуњен услов:

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0.$$

Дефиниција 1.10. Контактна структура $\xi = \ker \alpha$ на многострукости M^{2n+1} је глатка дистрибуција кодимензије 1 која је максимално неинтеграбилна, то јест, 1-форма α задовољава услов

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0.$$

Контактна многострукост је уређен пар (M, ξ) , док је 1-форма α *контактна форма*.

Услов $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ називамо *контактним условом*.

Напомена 1.11. Из контактнoг услова непосредно следи да је за свако $x \in M$ форма $(d\alpha)_x$ симплектичка на ξ_x . ★

Пример 1.12. Стандардна контактна структура ξ_{std} на $\mathbb{R}^{2n+1}$ са стандардним координатама $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)$ задата је језгром 1-форме:

$$\alpha_{std} = dz - \sum_{j=1}^n x_j dy_j. \quad \star$$

Претходни пример представља посебан случај 1-џет раслојења.

Простор $\mathbb{R}^{2n+1}$ можемо да идентификујемо са $T^*\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Додатно, на $\mathbb{R}^{2n}$ Лиувилова 1-форма λ има облик

$$\lambda = \sum_{j=1}^n x_j dy_j,$$

на контактна форма из примера 1.12 има запис $\alpha = dz - \lambda$.

Дефиниција 1.13. Симплектизација контактне многострукости

$$(M, \xi = \ker \alpha)$$

је тачна симплектичка многострукост

$$(M \times \mathbb{R}^+, d(t\pi^*\alpha))^3.$$

Пример 1.12 се природно уопштава на произвољну глатку многострукост L : на простору $T^*L \times \mathbb{R}$ контактна структура ξ_{jet} се задаје језгром 1-форме $dz - \lambda$, где је λ Лиувилова форма на котангентном раслојењу T^*L .

Велика класа примера контактних многострукости добија се на следећи начин (за доказ видети став 1.4.5 у [8]):

³ Пресликавање $\pi : M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow M$ је пројекција на прву координату.

Теорема 1.14. Нека је Y Лиувилово векторско поље⁴ на симплектичкој многострукости (W, ω) . Тада важи следеће: ако је M хиперповрш трансверзална на Y , рестрикција форме $i_Y \omega$ на M је контактна форма.

Пример 1.15. Контактна многострукост $(ST^*T^n, \xi = \ker \alpha_{can})$ се добија на овај начин. 1- форма α_{can} је задата са

$$\alpha_{can} = \lambda|_{ST^*T^n},$$

где је λ Лиувилова форма на котангентном раслојењу T^*T^n . ★

Пример 1.16. Симплектизација контактне многострукости из примера 1.15 је изоморфна са

$$(T^*T^n \setminus \{0\}, d\lambda).$$

Када уводимо нови објекат – у нашем случају контактне многострукости – природно се поставља питање: шта су морфизми између њих? Морфизми у контактної категорији су пресликавања која чувају контактну структуру. У наставку ћемо се највише бавити изоморфизмима у тој категорији, које сада и формално дефинишемо.

Дефиниција 1.17. Нека су $(M_1, \xi_1 = \ker \alpha_1)$ и $(M_2, \xi_2 = \ker \alpha_2)$ две контактне многострукости истих димензија. Дифеоморфизам $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ је *контактоморфизам* ако чува контактну структуру, то јест, ако важи $T\varphi(\xi_1) = \xi_2$.

Услов да је пресликавање контактоморфизам може се реформулисати на језику 1-форми. Наиме, дифеоморфизам φ је контактоморфизам ако и само ако постоји глатка функција $f : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ различита од нуле у свакој тачки, тако да важи

$$\varphi^* \alpha_2 = f \alpha_1.$$

Један од примера контактоморфизама је дилатација простора.

Пример 1.18. Пресликавање

$$\varphi_s : (\mathbb{R}^{2n-1}, \xi_{std}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{2n-1}, \xi_{std})$$

задато са

$$\varphi_s(x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, z) = (sx_1, sy_1, \dots, sx_{n-1}, sy_{n-1}, s^2 z)$$

је контактоморфизам. ★

Векторска поља на контактної многострукости која генеришу једнопараметарску фамилију дифеоморфизама сачињену од контактоморфизама називамо *контактним векторским пољима*.

Пример контактної векторског поља је *Ребово векторско поље* које дефинишемо као јединствено векторско поље које задовољава:

1. $\alpha(R_\alpha) = 1$;
2. $i_{d\alpha}(R_\alpha, \cdot) = 0$.

⁴ Подсетник: векторско поље Y на симплектичкој многострукости (W, ω) је Лиувилово ако важи $\mathcal{L}_Y \omega = \omega$.

Важно је напоменути да је Ребово векторско поље појам везан за контактну форму, као и да се динамика Ребових поља придружених различитим контактним формама које задају исту контактну структуру може доста разликовати.

Пример 1.19. У примеру 1.12, Ребово векторско поље придружено 1-форми:

$$\alpha = dz - \sum_{j=1}^n x_j dy_j$$

је $\frac{\partial}{\partial z}$.

★

Пример 1.20. У примеру 1.15 је Ребово векторско поље $R_{\alpha_{can}}$ придружено контактної форми α_{can} локално задато са:

$$R_{\alpha_{can}} = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial}{\partial q_j}.$$

★

Две контактне многострукости (M_1, ξ_1) и (M_2, ξ_2) су *контактоморфне* ако постоји контактоморфизам $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ између њих. Као и у симплектичком случају важи да су сваке две контактне многострукости локално исте. Прецизније, важи Дарбуова теорема (за доказ видети теорему 2.5.1 у [8]).

Теорема 1.21. (Дарбуова теорема) *Нека је (M^{2n+1}, ξ) контактна многострукост димензије. Тада свака тачка многострукости M има околину контактоморфну околини координатног почетка у $\mathbb{R}^{2n+1}$ са стандардном контактном структуром ξ_{std} .*

Дарбуова теорема нам каже како контактна многострукост изгледа локално. Ако тачку посматрамо као подмногострукост димензије нула, природно се поставља питање да ли постоје неке класе подмногострукости нетривијалне димензије које имају околину на којој знамо како изгледа контактна структура. Одговор на то питање је потврдан, при чему издвајамо две класе подмногострукости са овим својством: *изотропне* и *контактне* подмногострукости.

Дефиниција 1.22. Нека је $(M^{2n+1}, \xi = \ker \alpha)$ контактна многострукост. Подмногострукост $L \subset M$ је *изотропна* ако је $TL \subset \xi$.

Изотропне подмногострукости тангирају контактну структуру у свакој својој тачки. Приметимо, међутим, да то није у контрадикцији са максималном неинтеграбилношћу контактне структуре. Наиме, услов максималне неинтеграбилности искључује постојање хиперповрши које би у свакој тачки тангирале контактну дистрибуцију. Са друге стране, постојање подмногострукости нижих димензија са овим својством је допуштено.

Ипак, испоставља се да постоји горње ограничење за димензију ових подмногострукости. Аргумент је ствар линеарне алгебре и чињенице да је форма $(d\alpha)_x$ симплектичка на простору ξ_x .

Став 1.23. *Нека је (M^{2n+1}, ξ) контактна многострукост димензије $2n+1$ и $L \subset (M, \xi)$ изотропна подмногострукост. Тада је $\dim L \leq n$.*

Доказ: Нека је $i : L \rightarrow M$ инклузија и α контактна форма која задаје контактну структуру ξ . Како је L изотропна подмногострукост, по дефиницији важи $i^*\alpha = 0$, а самим тим је и $i^*(d\alpha) = d(i^*\alpha) = 0$.

Из претходног закључујемо да је за сваку тачку $x \in L$ потпростор $T_x i(T_x L)$ изотропан потпростор симплектичког векторског простора $(\xi_x, d\alpha_x)$.⁵ Будући да за произвољан потпростор $U \subset \xi_x$ важи теорема о збиру димензија:

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim \xi_x = 2n,$$

из инклузије $T_x i(T_x L) \subset (T_x i(T_x L))^\perp$ директно закључујемо да је $\dim L \leq n$. $\square$

Дефиниција 1.24. Изотропна подмногострукост максималне могуће димензије назива се *Лежандровом*.

Лежандрове подмногострукости природно налазимо унутар 1-цет раслојења $(T^*L \times \mathbb{R}, \xi_{\text{jet}} = \ker(dz - \lambda))$.

Пример 1.25. Свака глатка функција $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ одређује једну Лежандрову подмногострукост. Придруживање

$$F : L \rightarrow T^*L \times \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x, df_x, f(x))$$

пресликава многострукост L на њој дифеоморфну Лежандрову подмногострукост у 1-цет раслојењу. $\star$

Уколико изаберемо тривијалну функцију $f \equiv 0$, из примера 1.25 видимо да се свака многострукост L може видети као нулто сечење одговарајућег цет раслојења. Та чињеница, у комбинацији са следећом теоремом, даје локални модел за околине затворених Лежандрових подмногострукости.

Теорема 1.26. Нека су L_1 и L_2 две међусобно дифеоморфне затворене Лежандрове подмногострукости унутар контактних многострукости (M_1, ξ_1) и (M_2, ξ_2) . Тада постоје околине подмногострукости L_1 и L_2 које су контактоморфне.

Напомена 1.27. У овом раду се претежно бавимо контактном геометријом у димензији три. Стога су за нас најзначајније затворене Лежандрове подмногострукости *Лежандрови чворови*. То су чворови који су у свакој својој тачки тангентни на контактну структуру.

Посматрајмо простор $S^1 \times \mathbb{R}^2$ са контактном структуром:

$$\xi = \ker(\cos \theta dx - \sin \theta dy).$$

Чвор $K = S^1 \times \{0\} \subset (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi)$ је Лежандров. Према теорему 1.26, Лежандров чвор L унутар тродимензионалне контактне многострукости има околину која је контактоморфна отвореној околини чвора K у простору $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi)$. Према томе, овај простор је локални модел за околине Лежандрових чворова. $\star$

Друга важна класа коју смо најавили јесу контактне подмногострукости.

⁵ Подсетник: Потпростор U симплектичког векторског простора (V, ω) назива се *изотропним* ако важи инклузија $U \subset U^\perp$.

Дефиниција 1.28. Нека је (M, ξ) контактна многострукост. Подмногострукост $M' \subset M$ са контактном структуром ξ' је *контактна подмногострукост* у (M, ξ) ако је $TM' \cap \xi|_{M'} = \xi'$.

Ова класа подмногострукости је у суштој супротности са класом Лежандрових подмногострукости у следећем смислу: рестрикција контактне структуре амбијенталне многострукости на Лежандрове подмногострукости даје максимално интеграбилну дистрибуцију, док рестрикција те исте контактне структуре на контактне подмногострукости даје контактну структуру (која је максимално неинтеграбилна).

Слично као у случају Лежандрових подмногострукости, постоје околине контактних подмногострукости на којима знамо како изгледа контактна структура.

Напомена 1.29. Трансверзални чворови су чворови који су у свакој својој тачки трансверзални на контактну структуру, и они су специјалан пример контактних подмногострукости.

Посматрајмо простор $S^1 \times \mathbb{R}^{2n-2}$ са контактном структуром:

$$\xi = \ker \left(dz + \sum_{j=1}^{n-1} (x_j dy_j - y_j dx_j) \right).$$

Чвор $K = S^1 \times \{0\} \subset (S^1 \times \mathbb{R}^{2n-2}, \xi)$ је пример трансверзалног чвора. Као последица теореме 2.5.15 у [8], сваки трансверзални чвор T унутар произвољне контактне многострукости димензије $2n - 1$ има околину која је контактоморфна отвореној околини чвора K у простору $(S^1 \times \mathbb{R}^{2n-2}, \xi)$, при чему се T тим контактоморфизмом пресликава на K .

Према томе, контактна многострукост $(S^1 \times \mathbb{R}^{2n-2}, \xi)$ нам даје локални модел за околине трансверзалних чворова. ★

На крају ове главе ћемо доказати следећи резултат:

Теорема 1.30. Нека је (M^{2n-1}, ξ) контактна многострукост димензије $2n-1$ и $T \subset (M^{2n-1}, \xi)$ трансверзални чвор. Тада постоје отворена околина U тог чвора и отворен подскуп $A \subset S^{n-1}$ јединичне сфере, такви да су одговарајуће контактне многострукости $(U \setminus T, \xi)$ и $(T^n \times A, \xi_{\text{can}} = \ker \alpha_{\text{can}})$ изоморфне.

Следеће тврђење, које ће нам бити важно у четвртој глави рада, је директна последица теореме 1.30.

Последица 1.31. За произвољну контактну многострукост (M^{2n-1}, ξ) постоје отворен скуп $U \subset M$ и отворен подскуп $A \subset S^{n-1}$ јединичне сфере такви да су многострукости (U, ξ) и $(T^n \times A, \xi_{\text{can}})$ контактоморфне.

Доказ теореме 1.30 дајемо у случају $n = 2$.

Доказ:

Прво дајемо скицу самог доказа:

1. Из напомене 1.29 следи да чвор T има отворену околину $U \subset M$ која је контактоморфна некој отвореној околини V чвора

$$K = S^1 \times \{0\}$$

унутар простора

$$(S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi = \ker(dz + r^2 d\theta)),$$

при чему тај контактоморфизам чвор T слика на $S^1 \times \{0\}$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је скуп V облика

$$V = \{(z, \theta, r) \mid r < \varepsilon\}$$

за неко $\varepsilon > 0$.

2. Нека је

$$\mathcal{O} = \{(z, \theta, r) \in S^1 \times \mathbb{R}^2 \mid r > 0\}.$$

Конструираемо пресликавање

$$\varphi : \mathcal{O} \rightarrow T^2 \times S^1$$

које је контактоморфизам на слику, при чему φ скуп $V \setminus K$ слика на скуп облика $T^2 \times A$ за неки отворен подскуп $A \subset S^1$.

3. Из првог корака важи:

$$(U \setminus T, \xi) \cong (V \setminus K, \xi = \ker(dz + r^2 d\theta)).$$

Из другог корака важи:

$$(V \setminus K, \xi = \ker(dz + r^2 d\theta)) \cong (T^2 \times A, \xi_{\text{can}} = \ker \alpha_{\text{can}}).$$

Тврђење јасно следи.

Дакле, проблем смо свели на конструкцију пресликавања φ .

Дефинишемо функцију $h : \mathcal{O} \rightarrow (0, 1)$ са:

$$h(z, \theta, r) = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + r^4}}.$$

Пресликавање $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow T^2 \times S^1$ дефинисано са:

$$\varphi(z, \theta, r) = (z, \theta, h(r)^2, (h(r) \cdot r)^2)$$

је контактоморфизам на своју слику.

Слика пресликавања φ је скуп $T^2 \times J$, где је J отворени лук кружнице у првом квадранту дефинисан са:

$$J = \left\{ e^{i\theta} \mid \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}.$$

То непосредно следи из:

$$\lim_{r \rightarrow 0} (h(r)^2, (h(r) \cdot r)^2) = (1, 0),$$

и

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} (h(r)^2, (h(r) \cdot r)^2) = (0, 1).$$

Пресликавање φ је глатко и има глатак инверз $\psi : T^2 \times J \rightarrow \mathcal{O}$ дефинисан са:

$$\psi(z, \theta, a_1, a_2) = \left(z, \theta, \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \right),$$

па је φ дифеоморфизам.

Директним рачуном добијамо следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned} \varphi^*(a_1 dz + a_2 d\theta) &= h(r)^2 dz + (h(r) \cdot r)^2 d\theta \\ &= h(r)^2 dz + h(r)^2 \cdot r^2 d\theta \\ &= h(r)^2 (dz + r^2 d\theta), \end{aligned}$$

одакле, с обзиром на то да је φ дифеоморфизам, следи да је оно и контактоморфизам.

□

Напомена 1.32. Можемо прецизније да опишемо скуп A , што ће нам бити корисно касније у раду. Наиме, $V \setminus K$ је отворен и повезан скуп, па и његова слика при контактоморфизму φ има иста својства. Одатле следи да A мора бити отворен и повезан скуп јединичне кружнице. Прецизније, A мора бити отворен лук у S^1 . Штавише, како је

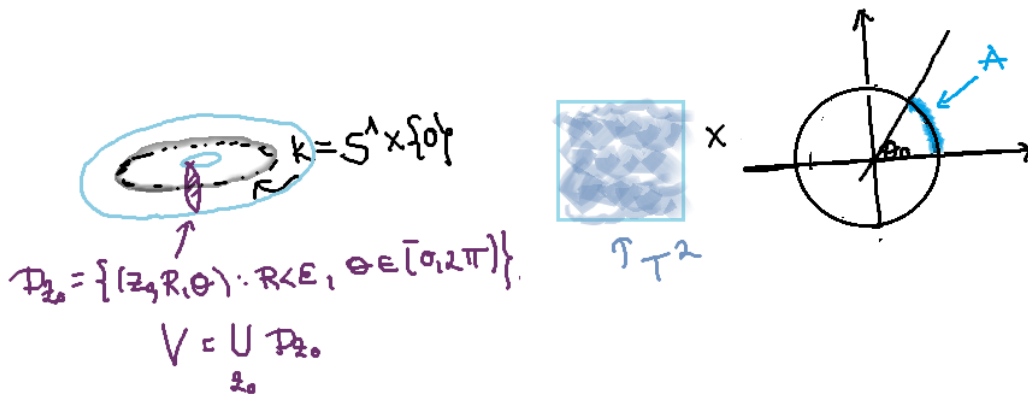
$$\lim_{r \rightarrow 0} (h(r)^2, (h(r) \cdot r)^2) = (1, 0),$$

узимајући у обзир изглед скупа $V \setminus K$ закључујемо да је скуп A облика

$$A = \{e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \theta_0)\},$$

за неко $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$,

★



Слика 1.3. контактоморфизам φ пресликава $V \setminus K$ на $T^2 \times A$

Напомена 1.33. У вишим димензијама доказ остаје у суштини исти; разлика се јавља једино у начину на који се дефинишу скуп $\mathcal{O}$, функција h и контактоморфизам φ .

Скуп $\mathcal{O} \subset S^1 \times \mathbb{R}^{2n-2}$ дефинишемо на следећи начин:

$$\mathcal{O} = \{(z, r_1, \dots, r_{n-1}, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \mid r_i > 0\}.$$

Конструкција функције h и контактоморфизма φ се природно проширује на више димензије.

Функција $h : \mathcal{O} \rightarrow (0, 1)$ је дата са

$$h(z, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}, r_1, \dots, r_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \sum_{i=1}^{n-1} r_i^4}},$$

док пресликавање $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow T^n \times S^{n-1}$ дефинишемо са

$$\begin{aligned} \varphi(z, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}, r_1, \dots, r_{n-1}) = & (z, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}, h(r)^2, \\ & (h(r) \cdot r_1)^2, \dots, (h(r) \cdot r_{n-1})^2). \end{aligned}$$

★

2 Површи у контактної геометрії

У овој глави користимо следеће ознаке:

- $(M, \xi = \ker \alpha)$ - тродимензионална контактна многострукост, при чему је контактна структура ξ кооријентисана 1-формом α ;
- Σ - затворена оријентисана површ;
- ω_Σ - форма оријентације на површи Σ ;
- $i : \Sigma \rightarrow M$ - улагање површи Σ у многострукост M .

Лежандрови и трансверзални чворови, који су редом специјални примери изотропних, односно контактних подмногострукости у (M, ξ) , имају околине на којима знамо како контактна структура изгледа. Површи у димензији три представљају још једну важну класу подмногострукости из истог разлога. Наиме, информације о понашању контактне структуре у довољно малој околини површи могу се добити из трага који контактна структура оставља на самој површи. Жируова теорема о локалној реконструкцији (чију формулацију дајемо касније - видети теорему 2.9) каже да, уколико две контактне структуре остављају исти траг на површи, оне морају бити изотопне у некој њеној околини.

Штавише, можемо издвојити класу површи (класу конвексних површи) такву да се понашање контактне структуре у њеној околини може ишчитати из класе изотопије коначног скупа кружница, што је непосредна последица Жируове теореме о реализацији (видети теорему 4.8.11 у [8]).

У секцији 2.1 формализујемо појам трага контактне структуре на површи. Након тога, у секцији 2.2 уводимо класу конвексних површи, заједно са још једном, њој дисјунктним класом – класом предлагранжевих површи. Класа предлагранжевих површи је важна јер помоћу ње у наредној глави дефинишемо модификовану контактну инваријанту облика.

2.1 Карактеристичне фолијације

Траг контактне структуре на површи формализујемо појмом *карактеристичних фолијација*. Карактеристичне фолијације представљају посебан случај сингуларних фолијација, па најпре уводимо тај појам.

Интеграбилна дистрибуција индукује фолијацију многострукости на подмногострукости мањих димензија.

Пример 2.1. Векторско поље X на површи Σ које нема сингуларних тачака задаје максимално интеграбилну дистрибуцију, која индукује једнодимензионалну фолијацију на тој површи. Листови фолијације су интегралне криве векторског поља X . ★

Приметимо да интегралне криве векторског поља које има нуле на површи (означимо са S скуп нула тог векторског поља) индукују једнодимензионалну фолијацију многострукости $\Sigma \setminus S$. Ту фолијацију називамо *сингуларном фолијацијом* површи Σ и означавамо је са $\mathcal{F}_\Sigma$. Сингуларну фолијацију површи можемо дуално да видимо као језгро 1-форме на Σ .

Наиме, придруживање

$$\mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \Omega^1(\Sigma), \quad X \mapsto i_X \omega_\Sigma,$$

је изоморфизам, па непосредно следи да сингуларну фолијацију генерисану векторским пољем X можемо видети као језгро 1-форме $i_X \omega_\Sigma$.

Дефиниција 2.2. Нека су:

- (1) Σ затворена оријентисана површ;
- (2) $\beta \in \Omega^1(\Sigma)$ произвољна 1-форма на Σ .

Уређен пар (Σ, β) називамо *сингуларном фолијацијом*¹ површи Σ .

Дефиниција 2.3. Сингуларна фолијација (Σ, β) је *карактеристична* ако постоје:

- (1) $(M, \xi = \ker \alpha)$ – контактна многострукост димензије три, при чему је ξ кооријентисано са α ;
- (2) $i : \Sigma \rightarrow M$ – улагање,

тако да важи $\beta = i^* \alpha$.

За карактеристичну фолијацију $(\Sigma, i^* \alpha)$ ћемо користити ознаку $\mathcal{F}_\Sigma$.

Дефиниција 2.4. Скуп *сингуларних тачака* карактеристичне фолијације $\mathcal{F}_\Sigma$, у ознаци $\text{Crit}(\mathcal{F}_\Sigma)$, дефинише се са:

$$\text{Crit}(\mathcal{F}_\Sigma) := \{p \in \Sigma : (i^* \alpha)_p = 0\}.$$

¹ На скупу $\Omega^1(\Sigma)$ можемо да уведемо релацију еквиваленције са: $\beta \sim \gamma$ ако и само ако постоји строго позитивна функција $f \in \Omega^0(\Sigma)$ таква да је $\beta = f \gamma$. Формално, сингуларна фолијација се дефинише као уређен пар $(\Sigma, [\beta])$, где је $[\beta]$ класа у односу на претходно дефинисану релацију еквиваленције. Међутим, ми ћемо радити са конкретним представницима класа.

Напомена 2.5. Карактеристичну фолијацију $(\Sigma, i^*\alpha)$ дуално можемо да видимо као једнодимензионалну регуларну фолијацију многострукости $\Sigma \setminus \text{Crit}(\mathcal{F}_\Sigma)$ индуковану векторским пољем X :

$$i_X \omega_\Sigma = i^* \alpha.$$

Приметимо да за свако $p \in \Sigma$ важи $X_p \in T_p \Sigma \cap \xi_p$.²

Геометријски гледано, карактеристична фолијација површи је пресек тангентног раслојења површи и контактне дистрибуције:

$$\mathcal{F}_\Sigma = T\Sigma \cap \xi. \quad \star$$

Сингуларна фолијација (Σ, β) не мора увек бити карактеристична. Наредни став даје потребан и довољан услов под којим се сингуларна фолијација може реализовати као таква.

Став 2.6. Сингуларна фолијација (Σ, β) је карактеристична ако и само ако постоје

$$u \in \Omega^0(\Sigma) \quad \text{и} \quad \gamma \in \Omega^1(\Sigma),$$

такве да важи:

$$u d\beta + \beta \wedge \gamma > 0.$$

Доказ:

$(\Rightarrow)$: Претпоставимо да је сингуларна фолијација (Σ, β) карактеристична.

По дефиницији постоје контактна многострукост $(M, \xi = \ker \alpha)$ и улагање $i : \Sigma \rightarrow M$ такви да важи:

$$\beta = i^* \alpha.$$

Нека су:

(1) X – глатко векторско поље на Σ задато са:

$$i_X \omega_\Sigma = i^* \alpha;$$

(2) J – скоро комплексна структура на Σ компатибилна са формом ω_Σ ;

(3) γ – диференцијална 1-форма задата са:

$$\gamma := i_{JX}(\omega_\Sigma).$$

Непосредним рачуном добија се да важи

$$\beta \wedge \gamma \geq 0,$$

при чему је

$$\beta_p = 0 \quad \text{ако и само ако} \quad X_p = 0.$$

За сваку тачку скупа $\{p \in \Sigma : \beta_p = 0\}$, као последица контактнoг услова важи $(d\beta)_p \neq 0$. Функцију u дефинишемо тако да узима вредност 1 на околини позитивних сингуларитета и вредност -1 на околини негативних.

² На овом месту, као и у наставку рада, поистовећујемо површ Σ са њеном сликом $i(\Sigma)$.

($\Leftarrow$) : Нека су $u \in \Omega^0(\Sigma)$ и $\gamma \in \Omega^1(\Sigma)$ такве да важи:

$$ud\beta + \beta \wedge \gamma > 0. \quad (1)$$

На простору $\Sigma \times \mathbb{R}$ дефинишимо 1-форму α са:

$$\alpha = \beta - t\gamma + udt + tdu.$$

Из услова (1) следи да је контактни услов $\alpha \wedge d\alpha > 0$ задовољен на $\Sigma \times \{0\}$, а самим тиме је задовољен и на $\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ за довољно мало $\varepsilon > 0$.

Многострукост M , контактну структуру ξ и улагање $i : \Sigma \rightarrow M$ дефинишемо редом са:

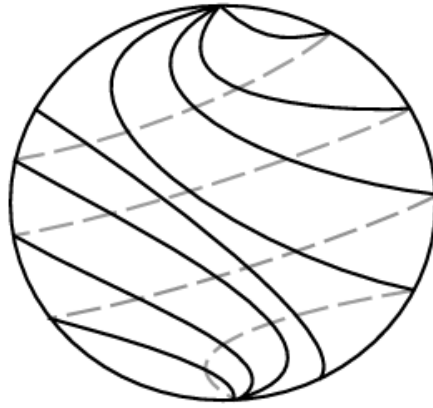
- (1) $M : = \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$;
- (2) $\xi : = \ker \alpha$;
- (3) $i(p) : = (p, 0)$.

□

Пример 2.7. На слици испод приказана је карактеристична фолијација јединичне сфере:

$$\Sigma = S^2 \subset (\mathbb{R}^3, \xi_2 = \ker(dz + x dy - y dx)),$$

индукована контактном структуром ξ_2 . Сингуларне тачке ове фолијације су северни и јужни пол.



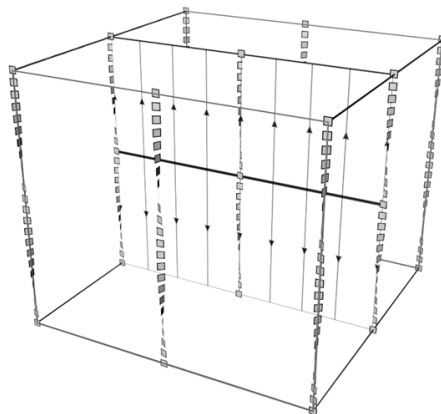
Слика 2.1. карактеристична фолијација сфере индукована контактном структуром ξ_2

★

Пример 2.8. На слици испод приказана је карактеристична фолијација торуса:

$$\Sigma := \{x = x_0\} \subset (T^3, \xi = \ker(\cos(z) dx - \sin(z) dy)).$$

Сингуларни скуп ове фолијације представља унију двеју дисјунктних кружница на висинама $z = 0$ и $z = \pi$.



Слика 2.2. карактеристична фолијација торуса индукована контактном структуром ξ ; аутор слике је Patrick Massot (izvor: [13])

Сада дајемо прецизну формулацију Жируове теореме о локалној реконструкцији.

Теорема 2.9. (Жируова теорема о локалној реконструкцији) *Нека су ξ и ξ' две позитивне контактне структуре које индукују исте карактеристичне фолијације на затвореној уложеној површи Σ . Тада постоји околина површи Σ на којој су ξ и ξ' изотопне (изотопијом која глобално чува Σ).*

Дакле, уколико две контактне структуре индукују исту карактеристичну фолијацију на површи, тада постоји довољно мала околина те површи на којој су те контактне структуре изотопне. Штавише, у неким случајевима се понашање контактне структуре у околини површи може ишчитати из класе изотопије коначног скупа кружница. Тај скуп кружница је појам везан за сингуларну фолијацију површи и његову формалну дефиницију дајемо у наставку.

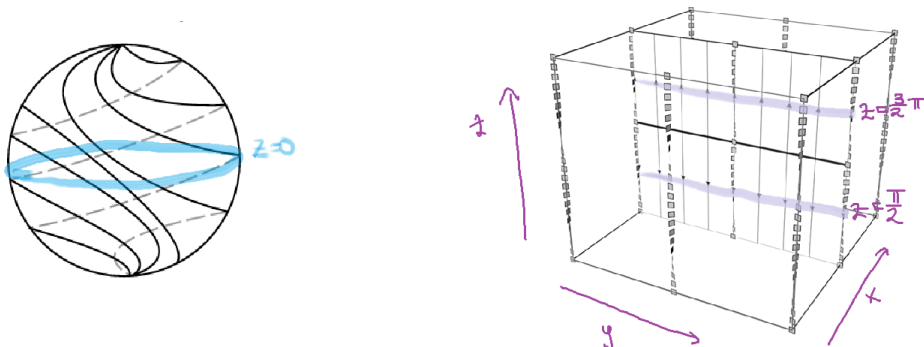
Дефиниција 2.10. Нека је $\mathcal{F}_\Sigma$ сингуларна фолијација површи Σ . Скуп кружница Γ је *деобни скуп* те фолијације ако важи:

1. Γ је трансверзалан на $\mathcal{F}_\Sigma$;
2. Постоји форма запремине Ω_Σ на Σ и векторско поље $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ које задаје $\mathcal{F}_\Sigma$ тако да:
 - $\mathcal{L}_X \Omega_\Sigma \neq 0$ на $\Sigma \setminus \Gamma$,
 - $\Sigma \setminus \Gamma = \Sigma_+ \sqcup \Sigma_-$, при чему је

$$\Sigma_\pm = \{x \in \Sigma : \pm \operatorname{div}_{\Omega_\Sigma} X > 0\},$$

а векторско поље X дуж Γ показује трансверзално из Σ_+ у Σ_- .

Пример 2.11. Деобни скупови у примерима 2.7 и 2.8 су редом екватор $z = 0$ и унија двеју кружница: $\cos z = 0$.



Слика 2.3. примери деобних скупов карактеристичне фолијације

★

Претходно приказане карактеристичне фолијације сфере и торуса имају одговарајуће деобне скупове. Међутим, у општем случају, за сингуларну фолијацију (Σ, β) површи Σ непразан деобни скуп не мора да постоји. Питање егзистенције таквог скупа може се реформулисати на више еквивалентних начина, што је описано у следећој теорему.

Теорема 2.12. Нека је (Σ, β) сингуларна фолијација. Тада су следећи услови еквивалентни:

- (1) за сингуларну фолијацију (Σ, β) постоји непразан деобни скуп;
- (2) фолијација (Σ, β) је карактеристична и постоји контактено векторско поље које је трансверзално на Σ ;
- (3) постоји глатка функција $u \in \Omega^0(\Sigma)$ са својством да важи:

$$u d\beta + du \wedge \beta > 0.$$

2.2 Конвексне и предлагранжеве површи

Дефиниција 2.13. Нека је (Σ, β) сингуларна фолијација површи Σ . Кажемо да је површ Σ *конвексна* ако та сингуларна фолијација испуњава било који од еквивалентних услова теореме 2.12.

Напомена 2.14. Конвексност је појам везан за контактну структуру амбијенталне многострукости. Прецизније, уколико сингуларна фолијација (Σ, β) допушта непразан деобни скуп, на основу теореме 2.12 закључујемо да је та фолијација карактеристична. Стога, постоје тродимензионална контактна многострукост $(M, \xi = \ker \alpha)$ и улагање $i : \Sigma \rightarrow M$ такво да важи $\beta = i^* \alpha$.

Сходно томе, када кажемо да је Σ конвексна површ, подразумевамо конвексност у односу на контактну структуру ξ добијену на претходно описан начин и кажемо да је површ ξ -конвексна.

Пример 2.15. Сфера и дводимензионални торус у примерима 2.7 и 2.8 су конвексне површи. ★

Специфичност димензије три лежи у томе да је конвексност генеричко својство површи.

Теорема 2.16. *Затворена површ у тродимензионалној контактної многострукости (M, ξ) је C^∞ -близу површи која је ξ -конвексна.*

Иако су конвексне површи у димензији три генеричке, велику класу површи које то нису добијамо као последицу става:

Став 2.17. *Карактеристична фолијација конвексне површи не може бити задата језгром затворене 1-форме.*

Доказ:

Претпоставимо супротно; прецизније, нека је $d\beta = 0$. Тада на основу ставке (3) теореме 2.12 постоји глатка функција $u \in \Omega^0(\Sigma)$ таква да важи:

$$ud\beta + du \wedge \beta > 0.$$

Из претпоставке $d\beta = 0$ следи да је

$$du \wedge \beta > 0,$$

што је немогуће. Наиме, површ Σ је затворена, па функција u достиже минимум и максимум на њој, те постоји тачка $p \in \Sigma$ где је $(du)_p = 0$.

□

Класу површи чија је карактеристична фолијација задата језгром затворене 1-форме називамо *предлагранжесвим површима*.

Дефиниција 2.18. Улагање $i : \Sigma \rightarrow (M, \xi = \ker \alpha)$ је *предлагранжесво* ако важи:

- (1) $i : \Sigma \rightarrow M$ је трансверзално на контактну структуру ξ ;
- (2) постоји строго позитивна функција $f \in \Omega^0(\Sigma)$ таква да је $d(f i^* \alpha) = 0$.

Дефиниција 2.19. Површ $C \subset M$ је *предлагранжесва* ако важи:

- (1) TC је трансверзално на $\xi|_C$;
- (2) дистрибуција $\xi|_C \cap TC \subset TC$ може да се зада језгром затворене 1-форме.

Напомена 2.20. Предлагранжесво улагање пресликава површ Σ на предлагранжесву површ у M . ★

Пример 2.21. Торус дефинисан са:

$$\Sigma := T^2 \times \{0\}$$

је предлагранжесва површ у контактної многострукости:

$$(T^2 \times \mathbb{R}, \xi = \ker(d\theta + z d\varphi)).$$

★

Пример 2.22. За произвољну тачку $a = (a_1, a_2)$ кружнице $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, торус:

$$\Sigma := T^2 \times \{a\}$$

је предлагранжева површ у:

$$(ST^*T^n, \xi_{can} = \ker \alpha_{can}). \quad \star$$

Класе конвексних и предлагранжевих површи су међусобно дисјунктне што је директна последица става 2.17. Конвексне површи су пандан инфинитезимально раздвојивим подмногострукостима у симплектичкој геометрији, док су предлагранжеве површи пандан Лагранжевим подмногострукостима.

Став 2.23. Површ $\Sigma \subset M$ је предлагранжева ако и само ако постоји Лагранжева површ $L \subset M \times \mathbb{R}^+$ са својством да је рестрикција:

$$\pi|_L: L \rightarrow \Sigma$$

природне пројекције дифеоморфизам.

Доказ:

Нека су $i: \Sigma \hookrightarrow M$ и $j: L \hookrightarrow M \times \mathbb{R}^+$ редом канонске инклузије.

($\Rightarrow$):

Ако је површ Σ предлагранжева, тада постоји строго позитивна функција $f \in \Omega^0(\Sigma)$ таква да важи:

$$d(f i^* \alpha) = 0.$$

Тада је подмногострукост L у симплектизацији дефинисана са:

$$L = \{(q, f(q)) : q \in \Sigma\} \subset M \times \mathbb{R}^+,$$

Лагранжева површ, при чему је рестрикција природне пројекције $\pi|_L: L \rightarrow \Sigma$ дифеоморфизам.

($\Leftarrow$):

Претпоставимо да постоји Лагранжева површ $L \subset M \times \mathbb{R}^+$ таква да је рестрикција $\pi|_L: L \rightarrow \Sigma$ дифеоморфизам. L је Лагранжева, те важи:

$$j^*(d(t \pi^* \alpha)) = 0, \quad (2)$$

одакле узимајући у обзир да важи $\pi \circ j = i \circ \pi|_L$ следи:

$$d((\pi_2 \circ j) \cdot (\pi|_L)^*(i^* \alpha)) = 0. \quad (3)$$

Дефинишемо функцију $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ са:

$$f(q) := (\pi_2 \circ j \circ (\pi|_L)^{-1})(q). \quad (4)$$

Из ове дефиниције директно следи идентитет $\pi_2 \circ j = f \circ \pi|_L$. Сменом овог идентитета у (4) добијамо:

$$d((\pi|_L)^*(f i^* \alpha)) = 0. \quad (5)$$

Самим тиме је и $(\pi|_L)^*(d(f i^* \alpha)) = 0$, а како је $\pi|_L$ дифеоморфизам, $(\pi|_L)^*$ је изоморфизам на нивоу форми, па важи

$$d(f i^* \alpha) = 0, \quad (6)$$

одакле следи да је Σ предлагранжева површ.

□

Геометријски гледано, разлика између конвексних и предлагранжевих површи је следећа: за конвексне површи постоји контактнo векторско које је трансверзално на њих, док за предлагранжеве површи постоји контактна форма α' , при чему је $\xi = \ker \alpha'$, таква да је та површ инваријантна у односу на ток Ребовог векторског поља $R_{\alpha'}$.

Док је геометријска интерпретација у случају конвексних површи последица теореме 2.12, геометријска интерпретација у случају предлагранжевих површи оправдана је ставом у наставку. За доказ видети став 4.6 у [18].

Став 2.24. *Нека је $C \subset M$ затворена и повезана површ у (M, ξ) трансверзална на $\xi|_C$. Тада је C предлагранжева ако и само ако важи:*

- (1) пресек $\xi|_C \cap TC$ је Лагранжево подраслојење у $\xi|_C$;
- (2) постоји контактна форма α' која дефинише структуру ξ тако да важи:

$$TC = (\xi|_C \cap TC) \oplus \langle R_{\alpha'} \rangle.$$

Пример 2.25. Посматрајмо $M = S^1 \times \mathbb{R}^2$ модел за околину трансверзалног чвора са контактном структуром:

$$\xi = \ker(d\theta + r^2 d\varphi).$$

Фамилија торуса дефинисана са

$$P_\varepsilon := \{(\theta, r, \varphi) \in S^1 \times \mathbb{R}^2 \mid r = \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

је предлагранжева и разлистава отворен скуп

$$(S^1 \times \mathbb{R}^2) \setminus (S^1 \times \{0\}).$$

Штавише, ова фамилија је инваријантна у односу на ротације које генерише Ребово векторско поље $R_{\alpha'} = \frac{\partial}{\partial \theta}$. ★

У симплектичкој геометрији је ситуација следећа: подмногострукост је или Лагранжева, или се од себе може раздвојити бесконачно малим Хамилтоновим дифеоморфизмом. Прецизније, ово друго је могуће урадити уз додатне тополошке претпоставке. За више детаља видети [12].

У контактнoј геометрији издвајамо конвексне и предлагранжеве површи. Конвексним површима у симплектичкој геометрији одговарају инфинитезимално раздвојиве подмногострукости, док предлагранжевим одговарају Лагранжеве подмногострукости. Међутим, у контактнoј геометрији постоји велики број површи које нису ни конвексне, ни предлагранжеве. У наставку наводимо пример површи која не припада ниједној од ове две класе.

Пример 2.26. Нека је на $M = T^2 \times \mathbb{R}$ контактна структура задата 1-формом

$$\alpha = d\theta + z d\varphi.$$

Дефинишемо улагање $i_0 : T^2 \rightarrow M$ са

$$i_0(\varphi, \theta) = (\varphi, \theta, f(\theta)), \quad f(\theta) = 1 - \cos \theta,$$

а његову слику означимо са

$$T_0 = i_0(T^2).$$

Торус T_0 је пример торуса који није ни предлагранжев, ни конвексан.

Најпре ћемо показати да T_0 није предлагранжев. У ту сврху довољно је да покажемо да не постоји строго позитивна глатка функција

$$\mu : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

таква да важи

$$d(\mu i_0^* \alpha) = 0.$$

Торус T_0 није предлагранжев: Претпоставимо супротно, то јест, да је T_0 предлагранжев. Тада постоји строго позитивна функција

$$\mu : T^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mu(\varphi, \theta) > 0,$$

таква да је $d(\mu i_0^* \alpha) = 0$. (један форму $i_0^* \alpha$ ћемо означавати са β)

Из услова затворености $d(\mu \beta) = 0$ следи

$$\left(-\frac{\partial \mu}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \theta}(f \cdot \mu) \right) d\theta \wedge d\varphi = 0,$$

одакле закључујемо да је

$$\frac{\partial \mu}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \theta}(f \cdot \mu).$$

Интеграцијом по φ на интервалу $[0, 2\pi]$, добијамо

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta}(f(\theta) \cdot \mu(\varphi, \theta)) d\varphi.$$

Лева страна једнакости изнад је једнака нули, па важи

$$0 = \frac{d}{d\theta} \left(f(\theta) \int_0^{2\pi} \mu(\varphi, \theta) d\varphi \right),$$

одакле следи да израз

$$f(\theta) \int_0^{2\pi} \mu(\varphi, \theta) d\varphi$$

не зависи од θ .

За $\theta = 0$ је $f(0) = 1 - \cos(0) = 0$, па следи да тај израз за све $\theta \in [0, 2\pi)$ мора бити једнак нули.

Међутим, по претпоставци је μ строго позитивна функција, па је њен интеграл строго позитиван за свако θ . Специјално, за $\theta = \frac{\pi}{2}$ вредност израза

$$f(\theta) \int_0^{2\pi} \mu(\varphi, \theta) d\varphi$$

је строго позитивна. Тиме добијамо контрадикцију, одакле следи да торус T_0 не може бити предлагранжев.

Торус T_0 није конвексан: Претпоставимо супротно, то јест, да је торус T_0 конвексан. Карактеристична фолијација на њему задата је језгром 1-форме

$$i_0^* \alpha = d\theta + (1 - \cos \theta) d\varphi.$$

Рестрикција форме $i_0^* \alpha$ на кружницу $\theta = 0$, која представља лист ове карактеристичне фолијације, је 1- форма $d\theta$.

Уколико је торус T_0 конвексан, на основу теореме 2.12 постоји глатка функција $u : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ таква да важи

$$u d(i_0^* \alpha) + i_0^* \alpha \wedge du > 0.$$

Будући да је $d(i_0^* \alpha) = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$, на кругу $\theta = 0$ горњи услов се своди на

$$d\theta \wedge du > 0.$$

Међутим, због компактности торуса T^2 , глатка функција u има критичну тачку на њему, што повлачи да услов $d\theta \wedge du > 0$ не може да важи дуж целог круга. Према томе, торус T_0 није конвексан. ★

3 Инваријанта облика

У симплектичкој геометрији постоји више инваријанти које представљају опструкцију за симплектичка улагања. Између осталог, пример такве инваријанте јесу симплектички капацитети. Међутим, до 1991. године у контактної геометрији нису биле познате инваријанте које представљају опструкцију за контактна улагања. Ељашберг те године у [6], инспирисан Сикорављево¹м ригидношћу Лагранжевих торуса, уводи *симплектичку*² и *контактну*³ инваријанту облика које, редом, представљају опструкције за симплектичка и контактна улагања.

Симплектичка инваријанта облика садржи неке информације о Лагранжевим улагањима одређеног кохомолошког типа, док контактна инваријанта облика садржи исти тип информација о Лагранжевим улагањима у симплектизацију.

Проблем израчунавања ових двају инваријанти је тежак, па постоји тек неколицина резултата који омогућавају њихово конкретно израчунавање. Један од најважнијих резултата тог типа је теорема Сикорава, коју доказујемо у наставку рада. За детаље видети теорему 3.10.

Осим теореме Сикорава, у наставку главе приказани су примери у којима је могуће експлицитно израчунати симплектичку, односно контактну инваријанту облика (видети примере 3.9 и 3.18). На тим примерима илуструјемо на који начин геометријски можемо да видимо ове инваријанте, као и које информације о Лагранжевим улагањима одређеног кохомолошког типа те инваријанте садрже.

Симплектичка и контактна инваријанта облика се чувају при C^0 -лимесима, те се природно поставља питање да ли коришћењем технике инваријанте облика можемо дати алтернативни доказ C^0 -ригидности одређених класа подмногострукости. Но, о томе више говоримо у четвртој глави рада.

За почетак, формално уводимо појам симплектичке инваријанте облика.

¹ Jean-Claude Sikorav, француски математичар.

² Енгл. symplectic shape invariant.

³ Енгл. contact shape invariant.

3.1 Симплектичка инваријанта облика

Нека је $(W, \omega = d\lambda)$ тачна симплектичка многострукост димензије $2n$, L затворена повезана многострукост димензије n и $\tau : H_{dR}^1(W) \rightarrow H_{dR}^1(L)$ хомоморфизам.

Дефиниција 3.1. (λ, L, τ) - симплектичка инваријанта облика је скуп

$$I(W, \lambda, L, \tau) = \{ [i^* \lambda] \in H_{dR}^1(L) \mid i : L \rightarrow W \text{ је Лагранжево улагање} \\ \text{такво да је } i^* = \tau \}.$$

Претходна дефиниција зависи од избора примитивне форме λ . За различите изборе примитивне форме λ добијамо инваријанте облика које се разликују до на трансляцију кохмолешком класом из $H_{dR}^1(L)$, што доказујемо у наредном ставу.

Став 3.2. Нека је $\lambda' = \lambda + \theta$ друга примитивна форма за ω . Тада важи:

$$I(W, \lambda', L, \tau) = I(W, \lambda, L, \tau) + \tau[\theta].$$

Доказ: За свако Лагранжево улагање $i : L \rightarrow W$ такво да је

$$i^* = \tau : H_{dR}^1(W) \rightarrow H_{dR}^1(L),$$

важи:

$$[i^* \lambda'] = [i^* \lambda] + [i^* \theta] = [i^* \lambda] + \tau[\theta],$$

при чему друга једнакост важи због затворености форме θ . □

Дефиниција 3.3. Нека су (W_1, ω_1) и (W_2, ω_2) тачне симплектичке многострукости исте димензије, $\varphi : W_1 \rightarrow W_2$ улагање и нека су $U \subset W_1$ и $V \subset W_2$ отворени подскупови за које важи:

1. затворење $\overline{U} \subset W_1$ је компактан скуп;
2. $\varphi(\overline{U}) \subset V$.

Кажемо да улагање φ чува облик пара (U, V) ако за сваку затворену повезану многострукост L димензије n и сваки хомоморфизам $\tau : H_{dR}^1(U) \rightarrow H_{dR}^1(L)$ важи инклузија

$$I(U, L, \tau) \subset I(V, L, \tau \circ \varphi^*).$$

За улагање φ кажемо да чува инваријанту облика уколико чува облик пара (U, V) за све отворене подскупове $U \subset W_1$ и $V \subset W_2$ који испуњавају наведене услове.

Симплектичка улагања чувају инваријанту облика, што је последица теореме у наставку. За доказ видети став 2.20 у [18].

Теорема 3.4. Нека су $(W_1, \omega_1 = d\lambda_1)$ и $(W_2, \omega_2 = d\lambda_2)$ тачне симплектичке многострукости истих димензија и $\varphi: W_1 \rightarrow W_2$ симплектичко улагање такво да важи $\varphi^*\lambda_2 = \lambda_1$. Тада важи инклузија:

$$I(W_1, \lambda_1, L, \tau) \subset I(W_2, \lambda_2, L, \tau \circ \varphi^*).$$

Уколико је φ симплектоморфизам, тада важи једнакост:

$$I(W_1, \lambda_1, L, \tau) = I(W_2, \lambda_2, L, \tau \circ \varphi^*).$$

Напомена 3.5. Доказ теореме 3.4 је директна последица чињенице да симплектичка улагања чувају Лагранжеве подмногострукости. $\star$

Став 3.6. Нека су (W_1, ω_1) и (W_2, ω_2) тачне симплектичке многострукости исте димензије и нека низ улагања

$$\varphi_k: W_1 \rightarrow W_2$$

која чувају инваријанту облика конвергира у C^0 -топологији ка улагању

$$\varphi: W_1 \rightarrow W_2.$$

Тада φ такође чува инваријанту облика.

Доказ: Нека су $U \subset W_1$ и $V \subset W_2$ отворени скупови такви да важи:

1. $\overline{U} \subset W_1$ је компактан;
2. $\varphi(\overline{U}) \subset V$.

Из C^0 -конвергенције следи да је за довољно велико k пресликавање φ_k хомотопно са φ , као и да важи $\varphi_k(\overline{U}) \subset V$.

Како φ_k чува облик, по дефиницији важи:

$$I(U, L, \tau) \subset I(V, L, \tau \circ \varphi_k^*).$$

С обзиром на то да хомотопна пресликавања индукују исте хомоморфизме на кохомологији, из горње инклузије директно следи да улагање φ чува облик пара (U, V) , а самим тиме и инваријанту облика. $\square$

Напомена 3.7. Симплектичко улагање $\varphi: W_1 \rightarrow W_2$ чува облика пара (U, V) независно од компактности затворења $\overline{U}$. Међутим, тај услов компактности у дефиницији 3.3 обезбеђује да се инваријанта облика чува при C^0 -лимесима.

Група симплектичких хомеоморфизама дефинише се као затворење групе симплектоморфизама $\text{Symp}(W, \omega)$ у групи свих хомеоморфизама $\text{Homeo}(W)$ у односу на C^0 -топологију:

$$\text{Sympleo}(W) := \overline{\text{Symp}(W, \omega)}^{C^0} \subseteq \text{Homeo}(W).$$

Дефиницију 3.3 можемо на потпуно исти начин да проширимо и на хомеоморфизме $\varphi \in \text{Homeo}(W)$. Претходни став важи и уколико претпоставимо да низ симплектоморфизама φ_k конвергира у C^0 -топологији ка хомеоморфизму $\varphi \in \text{Homeo}(W)$, а тврђење се доказује на исти начин.

Одатле следи да симплектички хомеоморфизми чувају симплектичку инваријанту облика, што је и главни разлог зашто нам је ова инваријанта важна у контексту C^0 -симплектичке топологије. $\star$

Напомена 3.8. У наставку секције подразумевамо да је $L = T^n$, а инваријанту облика

$$I(W, \lambda, T^n, \tau) \subset H_{dR}^1(T^n)$$

краће означавамо са $I(W, \lambda, \tau)$.

Кохомолошке класе $[dq_1], [dq_2], \dots, [dq_n]$ чине базу простора $H_{dR}^1(T^n)$, при чему је придруживање

$$[\omega] = a_1[dq_1] + \dots + a_n[dq_n] \mapsto (a_1, \dots, a_n), \quad a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k} \omega$$

изоморфизам прве де Рамове кохомологије торуса и простора $\mathbb{R}^n$, где су γ_i генераторне петље ⁴ торуса T^n .

Овим придруживањем се инваријанта облика $I(W, \lambda, \tau)$ природно идентификује са подскупом еуклидског простора $\mathbb{R}^n$. ★

Кажемо да Лагранжево улагање $j : T^n \rightarrow (W, \omega = d\lambda)$ реализује кохомолошку класу $(a_1, \dots, a_n)$ ако при идентификацији из напомене 3.8 важи:

$$[j^* \lambda] = (a_1, \dots, a_n).$$

Пример 3.9. У овом примеру ћемо показати да важи:

$$I(\mathbb{R}^4, \lambda, 0) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

при чему је:

$$\lambda = \frac{1}{2}(x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2)$$

примитивна форма стандардне симплектичке форме:

$$\omega_0 = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$$

на простору $\mathbb{R}^4$.

Да бисмо доказали да тачка $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ припада инваријанти облика $I(\mathbb{R}^4, \lambda, 0)$, довољно је да конструишемо Лагранжево улагање торуса које реализује ту класу и на првој де Рамовој кохомологији индукује тривијално пресликавање. Како је $\mathbb{R}^4$ контрактибилан, овај други услов је испуњен за свако улагање.

Најпре конструишемо фамилију Лагранжевих улагања торуса у $\mathbb{R}^4$ која реализују кохомолошке класе (a, b) са строго позитивним координатама. Потом, користећи ту фамилију улагања и аутоморфизме торуса који су индуковани матрицама из групе $GL(2, \mathbb{Z})$, реализујемо и преостале класе из скупа $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. На крају објашњавамо због чега класа $(0, 0)$ не припада инваријанти облика $I(\mathbb{R}^4, \lambda, 0)$.

⁴ Генераторне петље торуса T^n дефинишемо као

$$\gamma_k : S^1 \rightarrow T^n, \quad \gamma_k(e^{2\pi it}) = (1, \dots, 1, e^{2\pi it}, 1, \dots, 1), \quad t \in [0, 1],$$

где се $e^{2\pi it}$ налази на k -том месту.

Корак 1.

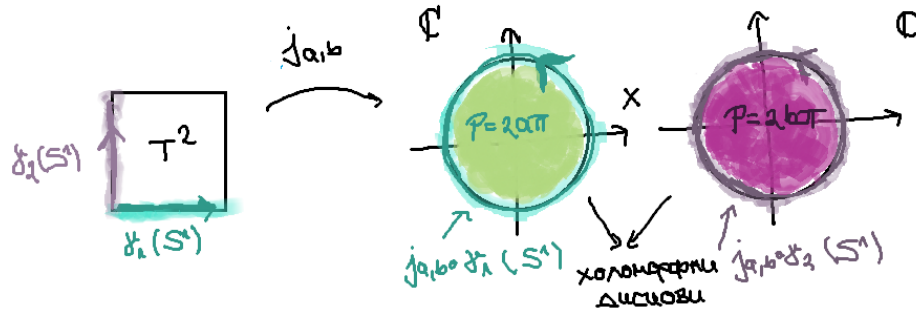
За строго позитивне координате $a > 0$ и $b > 0$, дефинишемо улагање:

$$j_{a,b}: S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

на следећи начин:

$$j_{a,b}(e^{2\pi it}, e^{2\pi is}) = (\sqrt{2a} \cos(2\pi t), \sqrt{2a} \sin(2\pi t), \sqrt{2b} \cos(2\pi s), \sqrt{2b} \sin(2\pi s)).$$

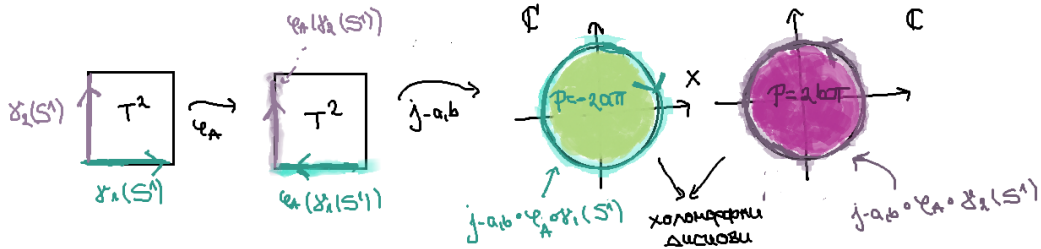
Ово Лагранжево улагање реализује класу која одговара тачки (a, b) , при чему генераторне петље торуса слика на границе холоморфних дискова чије су површине редом једнаке $2\pi a$ и $2\pi b$.

**Корак 2.**

Класу облика (a, b) када је $a < 0$ и $b > 0$ реализујемо Лагранжевим улагањем $j_{-a,b} \circ \varphi_A$, где је:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Геометријски гледано, ово Лагранжево улагање слика генераторне петље торуса на границе холоморфних дискова површина $-2\pi a$ и $2\pi b$. Негативан знак координате a указује да пресликавање $j_{-a,b} \circ \varphi_A$ које реализује класу (a, b) мења оријентацију одговарајуће генераторне петље торуса.



Класе облика $(a, 0)$ за које је $a > 0$ реализујемо Лагранжевим улагањем $j_{a,0} \circ \varphi_A$, где је:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ова Лагранжева улагања одговарајућу генераторну петљу торуса сликају на петљу која не може бити граница холоморфног диска.

Све преостале класе из скупа $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, укључујући класе облика $(0, b)$ за $b > 0$ или $b < 0$, као и класе код којих су обе координате негативне, реализују се на потпуно исти начин, избором одговарајуће матрице из групе $GL(2, \mathbb{Z})$.

Корак 3.

Класа $(0, 0)$ не припада инваријанти облика $I(\mathbb{R}^4, \lambda, 0)$ јер не постоји тачно Лагранжево улагање затворене многострукости у $\mathbb{R}^4$ са стандардном симплектичком формом (видети [10]). ★

Сам назив симплектичке инваријанте облика није случајан. Иако је овај појам уведен алгебарски, ова инваријанта памти информације о Лагранжевим улагањима одређеног облика, при чему је тај облик диктиран условом на де Рамовој кохомологији. Простор $\mathbb{R}^4$ је контрактибилан, те је у претходном примеру поменути кохомолошки услов био аутоматски испуњен. Међутим, ако бисмо посматрали Лагранжева улагања торуса у неку другу симплектичку многострукост која није контрактибилна, захтев да та улагања индукују тривијално пресликавање на кохомологији постаје ограничење. Геометрија иза Лагранжевих улагања која задовољавају овај алгебарски услов огледа се у томе што та пресликавања шаљу петље торуса у контрактибилне петље амбијенталне симплектичке многострукости.

Симплектичку инваријанту облика можемо посматрати као подскуп равни који садржи информације о Лагранжевим улагањима одређеног облика. Претходни пример илуструје да та инваријанта садржи информације о површинама холоморфних дискова чије су границе генераторне петље торуса. Наравно, у општем случају не можемо говорити о геометријској интерпретацији на овај начин.

Ретки су примери у којима можемо прецизно да одредимо инваријанту облика и притом да за сваку класу тог скупа експлицитно конструишемо Лагранжево улагање које је реализује. Теорема Сикорава представља једини познати резултат који омогућава експлицитно израчунавање инваријанте облика отвореног скупа симплектичке многострукости у димензијама већим од два.

Теорема 3.10. (Сикорав) *Нека је A отворен и повезан подскуп простора $\mathbb{R}^n$. Тада је $I(T^n \times A, \lambda_{\text{can}}, \iota_a^*) = A$, где је $a \in A$ произвољан елемент скупа A .*

Доказ: Нека је $x \in A$ произвољан елемент. Из повезаности скупа A следи да су пресликавања ι_x и ι_a хомотопна, па стога индукују исто пресликавање на де Рамовој кохомологији. Улагање ι_x је Лагранжево, и важи

$$[\iota_x^* \lambda_{\text{can}}] = x,$$

што имплицира да је

$$A \subset I(T^n \times A, \lambda_{\text{can}}, \iota_a^*).$$

Нека је

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in I(T^n \times A, \lambda_{\text{can}}, \iota_a^*).$$

По дефиницији постоји Лагранжево улагање

$$\iota: T^n \rightarrow T^n \times A$$

такво да важи

$$[\iota^* \lambda_{\text{can}}] = x, \quad \iota^* = \iota_a^* \text{ на } H_{dR}^1(T^n \times A).$$

Симплектоморфизам

$$\sigma: T^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow T^n \times \mathbb{R}^n, \quad \sigma(q, p) = (q, p - x),$$

задовољава

$$\sigma^* \lambda_{\text{can}} = \lambda_{\text{can}} - \sum_{k=1}^n x_k dq_k.$$

Пошто је форма $\sum_{k=1}^n x_k dq_k$ затворена и $\iota^* = \iota_a^*$, следи да је улагање $\sigma \circ \iota$ тачно, па по теореме Громова $\sigma \circ \iota(T^n)$ сече нулто сечење котангентног раслоја торуса. Дакле, постоји $q \in T^n$ такво да

$$\pi_2 \circ \iota(q) = x,$$

па $x \in \pi_2 \circ \iota(T^n) \subset \pi_2(T^n \times A) \subset A$. Тиме је доказано

$$I(T^n \times A, \lambda_{\text{can}}, \iota_a^*) \subset A.$$

□

Ова теорема такође даје делимичан одговор на питање који све подскупови равни могу да се реализују као инваријанта облика за погодно изабрану тачну симплектичку многострукост W и погодно изабран хомоморфизам τ .

Наиме, сада је јасно да се сви отворени и повезани подскупови равни могу реализовати на тај начин. Није тешко показати да је инваријанта облика отворен скуп, те треба размотрити да ли се могу реализовати отворени скупови који имају више од једне компоненте повезаности. Међутим, у наставку рада се нећемо освртати поново на ово питање и продубљивати дискусију на ту тему.

Симплектичка инваријанта облика може да буде празан скуп, што је садржано у исказу теореме 3.11. У наставку дајемо скицу доказа те теореме, као и коментар о геометрији иза формулације саме теореме.

Теорема 3.11. *Нека је $\iota: T^n \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ улагање које није Лагранжево. Тада постоји цеваста околина N торуса $\iota(T^n)$ која не допушта Лагранжево улагање $j: T^n \rightarrow N$ такво да је пресликавање $j_*: H_1(T^n, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(N, \mathbb{R})$ инјективно. Специјално, скуп $I(N, T^n, \iota^*)$ је празан.*

Скица доказа:

1. Бирамо цевасту околину N торуса $\iota(T^n)$.
2. За изабрано N не постоји Лагранжево улагање

$$j: T^n \rightarrow N$$

такво да је

$$j_*: H_1(T^n, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(N, \mathbb{R})$$

инјективно.

3. Скуп $I(N, T^n, \iota^*)$ је празан.

Корак 1. Улагање ι није Лагранжево, па из теореме 1 у [12] следи да постоји отворена цеваста околина торуса $\iota(T^n)$ која не може од себе да се раздвоји бесконачно малим Хамилтоновим дифеоморфизмом. За N бирамо такву околину.

Корак 2. Претпоставимо супротно: нека је $j: T^n \rightarrow N$ Лагранжево улагање које индукује инјективно пресликавање на $H_1(T^n, \mathbb{R})$. Из инјективности хомоморфизма j_* следи да инклузија

$$l: j(T^n) \hookrightarrow N$$

индукује инјективно пресликавање на нивоу фундаменталних група. Даље, користећи инјективност хомоморфизма l_* , из дугог тачног низа хомотопских група пара $(N, j(T^n))$ следи да је $\pi_2(N, j(T^n)) = 0$. Из претходног се може закључити да се $j(T^n)$ не може од себе раздвојити Хамилтоновим дифеоморфизмом, што је у контрадикцији са избором цевасте околине N у првом кораку.

Корак 3. Претпоставимо да је скуп $I(N, T^n, \iota^*)$ непразан, то јест, да постоји Лагранжево улагање $j: T^n \rightarrow N$ такво да је $j^* = \iota^*$ на $H_{dR}^1(N)$. Из једнакости индукованих пресликавања на кохомологији следи једнакост индукованих хомоморфизама $j_* = \iota_*$ на $H_1(T^n, \mathbb{R})$. Торус $\iota(T^n)$ је ретракт своје цевасте околине N , одакле следи да је хомоморфизам ι_* инјективно пресликавање. Самим тиме је и j_* инјективно, што је у контрадикцији са кораком 2, те закључујемо да скуп $I(N, T^n, \iota^*)$ мора бити празан.

□

Геометрија иза формулације теореме 3.11 је следећа: ако је торус $T_0 = \iota(T^2)$ реализован улагањем које није Лагранжево, тада постоји довољно мала цеваста околина тог торуса која не допушта Лагранжеве торусе истог облика, при чему је тај облик диктиран условом на де Рамовој кохомологији. Дакле, N не допушта Лагранжеве торусе тог конкретног облика, али то не значи да у тој отвореној околини уопште нема Лагранжевих торуса. Напротив, у околини N постоји бесконачно много Лагранжевих торуса, при чему је њихова егзистенција гарантована Дарбуовом теоремом (видети теорему 1.21).

3.2 Контактна инваријанта облика

Нека је $(M, \xi = \ker \alpha)$ контактна многострукост димензије $2n - 1$, L затворена повезана многострукост димензије n и $\tau: H_{dR}^1(M) \rightarrow H_{dR}^1(L)$ хомоморфизам.

Дефиниција 3.12. (L, τ) — *контактна инваријанта облика* је скуп $I_C(M, L, \tau)$ који дефинишемо као пројективизацију симплектичке инваријанте облика

$$I(M \times \mathbb{R}^+, L, t\pi^*\alpha, \tau),$$

при чему је $(M \times \mathbb{R}^+, d(t\pi^*\alpha))$ симплектизација контактне многострукости M , где под пројективизацијом подразумевамо поистовећивање кохомолошких класа које се разликују до на множење позитивним скаларом.

Напомена 3.13. Дефиниција контактне инваријанте облика не зависи од избора контактне форме α .

Наиме, ако је $\alpha_1 = f \alpha$ контактна форма која задаје исту контактну структуру ξ (при чему је f строго позитивна функција), пресликавање

$$\varphi: (M \times \mathbb{R}^+, d(t \pi^* \alpha)) \rightarrow (M \times \mathbb{R}^+, d(t \pi^* \alpha_1)), \quad \varphi: (x, t) \mapsto \left(x, \frac{t}{f(x)}\right)$$

је симплектоморфизам изотопан идентичком пресликавању за који важи $\varphi^*(t \pi^* \alpha_1) = t \pi^* \alpha$. Из теореме 3.4 следи једнакост симплектичких инваријанти облика

$$I(M \times \mathbb{R}^+, L, t \pi^* \alpha, \tau) = I(M \times \mathbb{R}^+, L, t \pi^* \alpha_1, \tau),$$

што имплицира једнакост њихових пројективизација, па контактна инваријанта облика не зависи од избора форме α . $\star$

Као и у симплектичком случају, можемо да дефинишемо шта значи да улагање чува контактну инваријанту облика. Дефиниција је слична дефиницији 3.3, с разликом у томе што уместо симплектичких посматрамо контактне многострукости, а уместо симплектичке инваријанте облика посматрамо контактну.

Контактна улагања чувају контактну инваријанту облика, што је последица теореме у наставку. За доказ видети став 5.3 у [18].

Теорема 3.14. *Нека су $(M_1, \xi_1 = \ker \alpha_1)$ и $(M_2, \xi_2 = \ker \alpha_2)$ две контактне многострукости исте димензије и $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ контактено улагање. Тада важи инклузија*

$$I_C(M_1, L, \tau) \subset I_C(M_2, L, \tau \circ \varphi^*).$$

Уколико је φ контактоморфизам, тада важи једнакост

$$I_C(M_1, L, \tau) = I_C(M_2, L, \tau \circ \varphi^*).$$

Додатно, на потпуно исти начин као у симплектичком случају, показује се да контактни хомеоморфизми чувају контактну инваријанту облика, због чега је она битна у контексту C^0 -контактне топологије. У наставку дефинишемо још једну контактну инваријанту.

Дефиниција 3.15. (L, τ) — модификована контактна инваријанта облика је скуп

$$\tilde{I}_C(M, L, \tau) \subset H^1(L, \mathbb{R})/\mathbb{R}^+,$$

који одговара пројективизацији скупа класа

$$\left\{ [f i^* \alpha] \mid i: L \rightarrow M \text{ је предлагранжево улагање такво да је } i^* = \tau \text{ на } H_{dR}^1(L), f > 0, d(f i^* \alpha) = 0 \right\}.$$

Модификована контактна инваријанта облика се попут претходно дефинисане контактне инваријанте облика чува при контактоморфизмима.

Теорема 3.16. *Нека су $(M_1, \xi_1 = \ker \alpha_1)$ и $(M_2, \xi_2 = \ker \alpha_2)$ две контактне многострукости исте димензије и $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ контактено улагање. Тада важи инклузија*

$$\tilde{I}_C(M_1, L, \tau) \subset \tilde{I}_C(M_2, L, \tau \circ \varphi^*).$$

Уколико је φ контактоморфизам, тада важи једнакост

$$\tilde{I}_C(M_1, L, \tau) = \tilde{I}_C(M_2, L, \tau \circ \varphi^*).$$

Доказ: Пресликавање $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ је контактнo улагање, те постоји глатка строго позитивна функција $f: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ таква да важи $\varphi^* \alpha_2 = f \alpha_1$.

Нека је $i: L \rightarrow M_1$ предлагранжево улагање и $h > 0$ функција таква да важи $d(h i^* \alpha_1) = 0$. Улагање $\varphi \circ i: L \rightarrow M_2$ је такође предлагранжево, при чему важи

$$\left[\frac{h}{f \circ i} (\varphi \circ i)^* \alpha_2 \right] = [h i^* \alpha_1],$$

одакле директно следи инклузија $\tilde{I}_C(M_1, L, \tau) \subset \tilde{I}_C(M_2, L, \tau \circ \varphi^*)$. $\square$

Веза између двеју уведених контактних инваријанти је описана у наредном ставу.

Став 3.17. За сваку контактну многострукост $(M, \xi = \ker \alpha)$ и све L, τ важи

$$\tilde{I}_C(M, L, \tau) \subset I_C(M, L, \tau).$$

Доказ: Нека је $[f i^* \alpha]$ произвољна класа реализована предлагранжевим улагањем $i: L \rightarrow M$ за које важи $i^* = \tau: H_{dR}^1(M) \rightarrow H_{dR}^1(L)$.

Улагање $\hat{i}$ дефинисано са

$$\hat{i}: L \rightarrow M \times \mathbb{R}^+, \quad q \mapsto (i(q), f(q))$$

је Лагранжево и за њега важи $\hat{i}^* = \tau: H_{dR}^1(M \times \mathbb{R}^+) \rightarrow H_{dR}^1(L)$. Важи једнакост

$$[\hat{i}^*(t \pi^* \alpha)] = [f i^* \alpha].$$

С обзиром на то да класа са леве стране ове једнакости по дефиницији припада симплектичкој инваријанти облика $I(M \times \mathbb{R}^+, L, t \pi^* \alpha, \tau)$ тврђење је доказано. $\square$

Инклузија у претходном ставу може да буде строга. Модификована контактна инваријанта облика никада не садржи пројективизацију тривијалне класе. Међутим, постоје случајеви у којима пројективизација тривијалне класе припада контактнoј инваријанти облика. То значи да постоји тачно Лагранжево улагање у симплектизацију које задовољава задати услов на де Рамовој кохомологији. Флор је доказао да затворена тачна Лагранжева подмногострукост у симплектичкој многострукости која је ограничена у бесконачности не може да се раздвоји од себе Хамилтоновом изотопијом. Милер у [18] (видети напомену 5.1) користи тај резултат како би доказао да координатни почетак не може да припада контактнoј инваријанти облика. Међутим, овај аргумент не може да се примени када амбијентална симплектичка многострукост одговара симплектизацији неке контактне многострукости, што је случај који разматрамо.

Димитроглоу-Ризел⁵ је у [3] (видети теорему 1.1) конструисао тачно Лагранжево улагање 2-торуса у симплектизацију тродимензионалне контактне многострукости. То улагање реализује тривијалну класу чија пројективизација припада одговарајућој контактної инваријанти облика.

Штавише, случајеви у којима је инклузија строга нису изоловани. Димитроглоу-Ризел је доказао следећи резултат:

Теорема. *За произвољну уврнуту⁶ контактну многострукост $(M, \xi = \ker \alpha)$ димензије три постоји тачно Лагранжево улагање торуса у симплектизацију $(M \times \mathbb{R}^+, d(t\pi^*\alpha))$.*

За разлику од контактне инваријанте облика, пројективизација тривијалне класе не може да припада модификованој контактної инваријанти облика. Ако би то био случај, постојало би предлагранжево улагање $j : L \rightarrow M$ које реализује тривијалну класу, што имплицира да је $j^*\alpha = df$ за неку функцију $f \in \Omega^0(L)$. Међутим, то није могуће јер диференцијал df има нулу на торусу, док карактеристична фолијација индукована предлагранжевим улагањем нема сингуларитета.

У наставку секције подразумевамо да је $L = T^2$, осим ако другачије није наглашено. Циљ нам је да покажемо на који начин геометријски можемо да видимо контактну и модификовану контактну инваријанту облика. Симплектичку инваријанту облика смо у случају $L = T^2$ поистоветили са подскупом равни $\mathbb{R}^2$ (видети напомену 3.8). Специјално, скуп $I(M \times \mathbb{R}^+, T^2, t\pi^*\alpha, \tau)$ можемо да видимо као подскуп равни $\mathbb{R}^2$, при чему тај скуп има следећу особину:

ако класа (a, b) припада скупу $I(M \times \mathbb{R}^+, T^2, t\pi^*\alpha, \tau)$, тада је и цео зрак $\{s \cdot (a, b) \mid s > 0\}$ садржан у њему.

То произилази из чињенице да је фамилија пресликавања $\{\sigma_s\}_{s>0}$, дефинисана са:

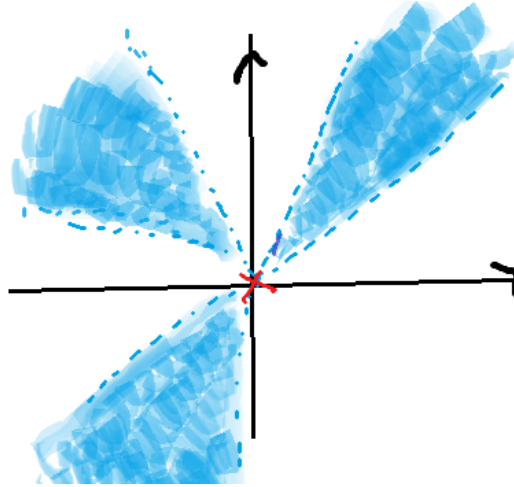
$$\sigma_s : M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow M \times \mathbb{R}^+, \quad \sigma_s(p, t) := (p, st),$$

фамилија конформалних симплектоморфизама. Уколико Лагранжево улагање $i : T^2 \rightarrow M \times \mathbb{R}^+$ реализује класу (a, b) , тада Лагранжево улагање $\sigma_s \circ i$ реализује класу $s \cdot (a, b)$.

⁵ Georgios Dimitroglou Rizell, шведски математичар.

⁶ Енгл: overtwisted.

Дакле, скуп $I(M \times \mathbb{R}^+, T^2, t\pi^*\alpha, \tau)$ може имати облик приказан на слици испод.

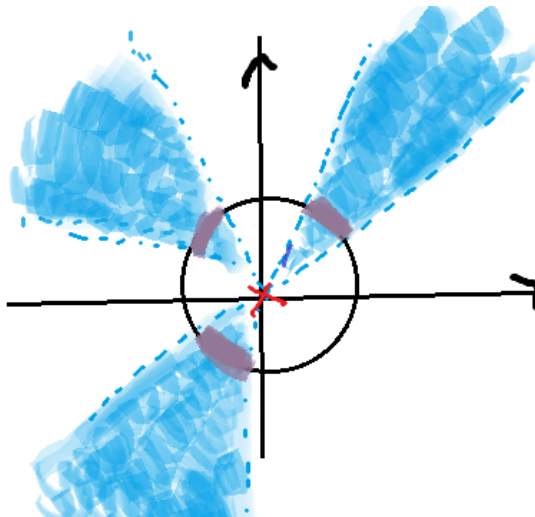


Контактна инваријанта облика је по дефиницији пројективизација скупа

$$I(M \times \mathbb{R}^+, T^2, t\pi^*\alpha, \tau)$$

. Стога, ако тај скуп не садржи координатни почетак, ову инваријанту природно можемо да видимо као подскуп јединичне кружнице S^1 у равни:

$$(H_{dR}^1(T^2) \setminus \{(0, 0)\})/\mathbb{R}^+ = S^1.$$



Слика 3.1. пример изгледа скупа контактне инваријанте облика у равни (задебљани љубичасти лукови на слици)

Иако контактна инваријанта облика може представљати унију координатног почетка и делова кружнице, модификована контактна инваријанта је искључиво подскуп јединичне кружнице.

Такође, контактна инваријанта облика садржи информације о Лагранжевим улагањима у симплектизацију, док, са друге стране, модификована контактна инваријанта облика садржи информације о предлагранжевим улагањима торуса у контактну многострукост M .

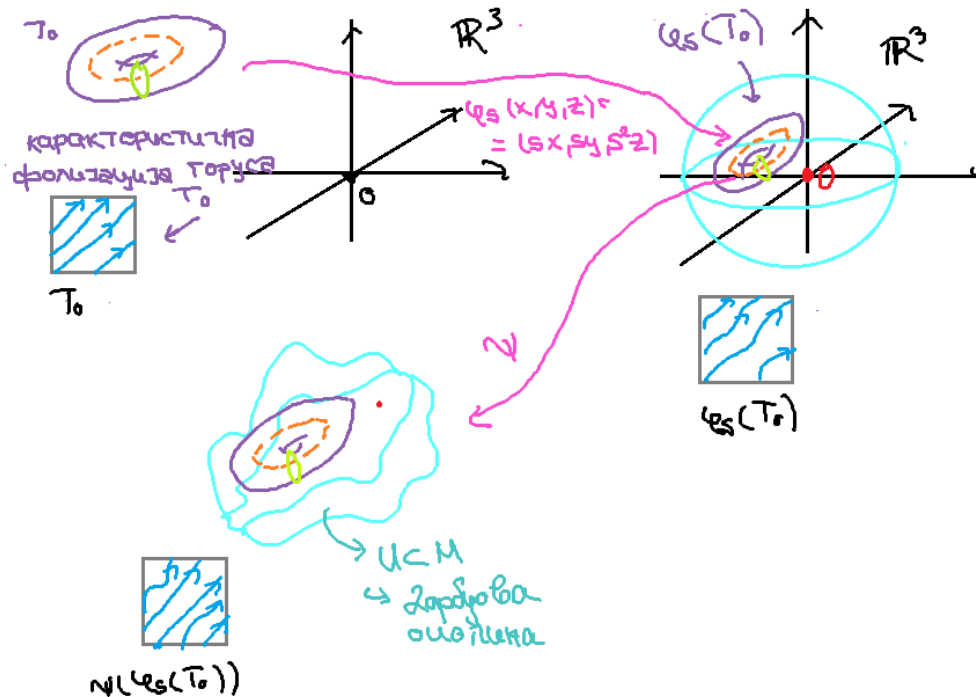
Модификована контактна инваријанта облика садржи информацију о карактеристичној фолијацији коју контактна структура амбијенталне многострукости индукује на предлагранжевом торусу. Те фолијације су глатко конјуговане линеарним фолијацијама торуса, па свакој можемо да придружимо нагиб $\theta \in [0, 2\pi)$ одговарајуће линеарне фолијације.

Пример 3.18. Доказаћемо да за контактну многострукост (M, ξ) димензије 3 важи $\tilde{I}_C(M, 0)^7 = S^1$.

Да бисмо доказали да је $\tilde{I}_C(M, 0) = S^1$, довољно је да докажемо да је $\tilde{I}_C(\mathbb{R}^3, 0) = S^1$. Заиста, ако то важи, за произвољан нагиб $\theta \in [0, 2\pi)$ постоји предлагранжев торус у $\mathbb{R}^3$ чија је карактеристична фолијација конјугована линеарној фолијацији нагиба θ .

Дилатација $\varphi_s(x, y, z) = (sx, sy, s^2z)$ нам омогућава да за довољно мало $s > 0$ овај торус сабијемо унутар произвољно мале околине координатног почетка, без нарушавања његовог облика и типа фолијације.

С друге стране, Дарбуова теорема гарантује да свака тачка из M има отворену околину U која је контактоморфна некој отвореној околини нуле у $\mathbb{R}^3$. Будући да овај локални контактоморфизам чува облик, али и топологију фолијације, постојање описаног торуса унутар околине нуле обезбеђује и егзистенцију одговарајућег предлагранжевог торуса унутар подскупа $U \subset M$.



⁷ У овом примеру подразумевамо да је $L = T^2$ и стога га изостављамо из записа инваријанте облика.

Тиме је доказано да једнакост $\tilde{I}_C(\mathbb{R}^3, 0) = S^1$ повлачи резултат који желимо да докажемо.

Докажимо сада да важи $\tilde{I}_C(\mathbb{R}^3, 0) = S^1$. То ћемо урадити у следећа два корака:

1. доказаћемо да постоји $\theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ тако да је лук кружнице $A = \{e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \theta_0)\}$ садржан у $\tilde{I}_C(\mathbb{R}^3, 0)$,
2. користећи претходни корак и аутоморфизме торуса који су индуковани целобројним инвертибилним матрицама, показаћемо да се и преостале тачке кружнице налазе у $\tilde{I}_C(\mathbb{R}^3, 0)$.

Корак 1. Из последице 1.31 и напомене 1.32 следи да постоје отворени скуп $U \subset \mathbb{R}^3$ и отворени лук јединичне кружнице

$$A = \{e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \theta_0)\} \subset S^1$$

такви да су многострукости (U, ξ_{std}) и $(T^2 \times A, \xi = \ker \alpha_{can})$ контактоморфне. Означимо са

$$\varphi: T^2 \times A \rightarrow U$$

тај контактоморфизам.

Фиксирајмо тачку $a \in A$. За свако $a' \in A$ улагање

$$\iota_{a'}: T^2 \rightarrow T^2 \times A, \quad \iota_{a'}(q) = (q, a')$$

је предлагранжево, реализује класу a' и на $H_{dR}^1(T^2 \times A)$ индукује хомоморфизам $\iota_{a'}^* = \iota_a^*$, па важи:

$$A \subset \tilde{I}_C(T^2 \times A, \iota_a^*).$$

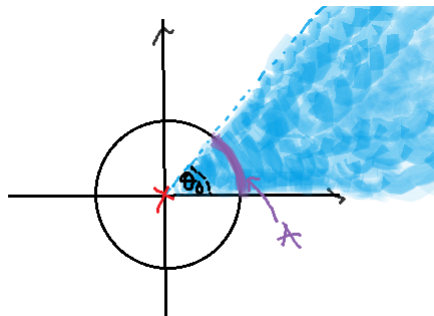
Из теореме 3.16 следи:

$$\tilde{I}_C(T^2 \times A, \iota_a^*) = \tilde{I}_C(U, \iota_a^* \circ \varphi^*) \subset \tilde{I}_C(\mathbb{R}^3, 0),$$

те је:

$$A \subset \tilde{I}_C(\mathbb{R}^3, 0).$$

За сада знамо да постоје предлагранжева улагања торуса у $\mathbb{R}^3$ која реализују класе из A . Једноставно се види да за свако $a \in A$ и $s > 0$ постоји предлагранжево улагање које реализује класу $s \cdot a$. Осенчимо тај регион у равни.



Корак 2.

Да бисмо доказали да се остатак кружнице (део ван лука A) налази у овој инваријанти облика, покажемо да целу пробушену раван $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ можемо да осенчимо, одакле пројективизацијом директно добијамо једнакост

$$\tilde{I}_C(\mathbb{R}^3, 0) = S^1.$$

Да бисмо проширили осенчену област, примењујемо следећи поступак:

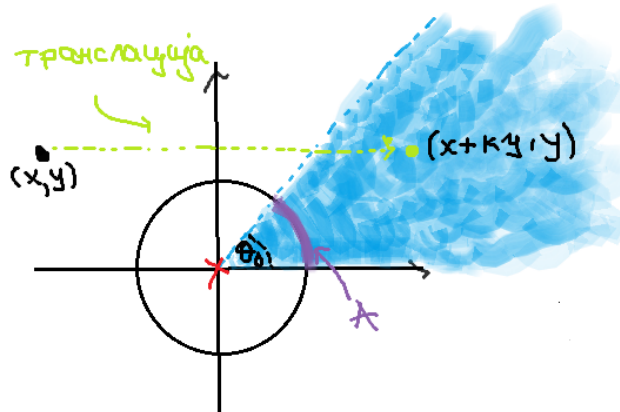
- изаберемо тачку $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ која се не налази у тренутно осенченом региону;
- за изабрану тачку нађемо матрицу $B \in GL(2, \mathbb{Z})$ која ту тачку слика у осенчену област;
- ажурирамо осенчени регион додавањем реализоване класе (x, y) .

Да бисмо оправдали овај поступак, објаснимо како постојање целобројне матрице B (инвертибилне над $\mathbb{Z}$) која слика (x, y) у осенчени регион гарантује да се (x, y) може реализовати предлагранжевим улагањем. Како се класа $B \cdot (x, y)^T$ налази у осенченом региону, постоји предлагранжево улагање ι које реализује ту класу. Матрица B (а самим тиме и њена транспонована матрица B^T) је инвертибилна над $\mathbb{Z}$, па је пресликавање $\varphi_{(B^T)^{-1}}$ аутоморфизам торуса. Једноставним рачуном се покаже да је композиција $\iota \circ \varphi_{(B^T)^{-1}}$ предлагранжево улагање које реализује класу (x, y) .

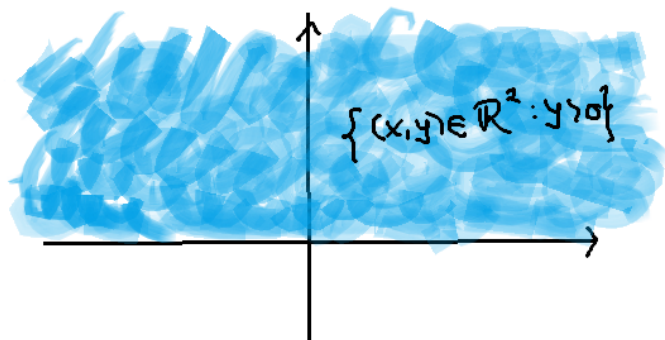
Према томе, цео проблем је сведен на проналажење погодних целобројних матрица инвертибилних над $\mathbb{Z}$.

Реализација класе (x, y) за $y > 0$.

За довољно велико $k \in \mathbb{N}$ тачка $(x + ky, y)^T$ упада у осенчени регион, при чему је линеарна трансформација која $(x, y)^T$ шаље у $(x + ky, y)^T$ дата множењем матрицом $B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



За сваку тачку полуравни $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ можемо пронаћи одговарајућу трансформацију, па осенчени регион постаје полураван $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.



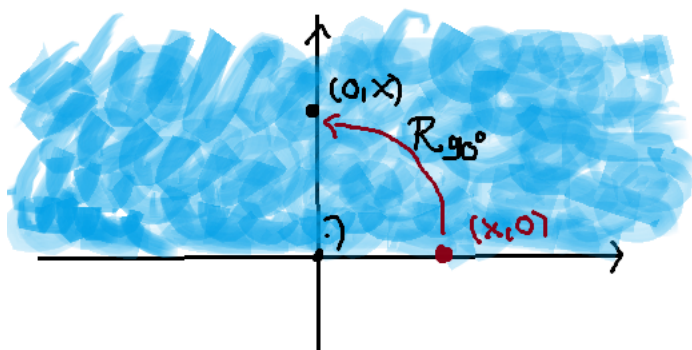
Слика 3.2. ажурирана осенчена област

Реализација класе $(x, 0)$ за $x \neq 0$.

За $x > 0$ тачка $(x, 0)^T$ се ротацијом за угао $\pi/2$ слика у $(0, x)^T$, што се већ налази у осенченом региону. Ова ротација је дата множењем матрицом:

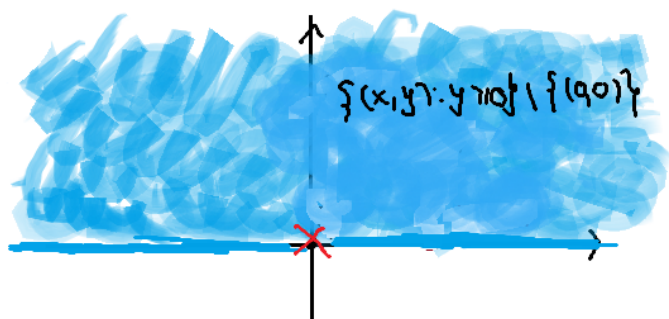
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

која припада групи $GL(2, \mathbb{Z})$, па тачку $(x, 0)$ осенчимо.



Аргумент за случај када је $x < 0$ је идентичан.

Ажурирамо осенчени регион: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \setminus \{(0, 0)\}$.



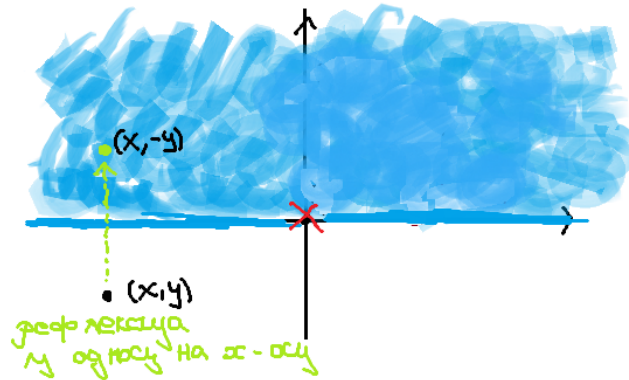
Слика 3.3. ажурирана осенчена област

Реализација класе (x, y) за $y < 0$.

Класа $(x, y)^T$ се рефлексијом у односу на x -осу слика у $(x, -y)^T$, што се већ налази у осенченом делу. Ова трансформација је дата множењем матрицом:

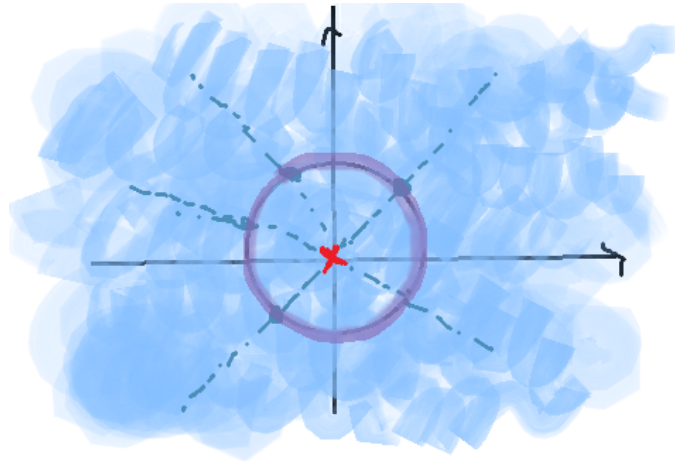
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

која припада групи $GL(2, \mathbb{Z})$, па се и свака класа из доње полуравни може реализовати предлагранжевим улагањем.



Ажурирамо осенчени регион: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Будући да је сада осенчена цела пробушена раван, из дефиниције пројективизације директно следи жељена једнакост $\tilde{I}_C(\mathbb{R}^3, 0) = S^1$.



Слика 3.4. модификована контактна инваријанта облика
 $\tilde{I}_C(\mathbb{R}^3, 0) = S^1$

У претходном примеру смо експлицитно израчунали модификовану контактну инваријанту облика. У контактної геометрији можемо да докажемо резултат који омогућава конкретно израчунавање инваријанте облика и последица је теореме Сикорава у симплектичком случају.

Теорема 3.19. *Нека је $A \subset S^{n-1}$ отворен и повезан скуп, при чему је $a \in A$. Тада важи:*

$$\tilde{I}_C(T^n \times A, \iota_a^*) = I_C(T^n \times A, \iota_a^*) = A.$$

Доказ: Докажимо најпре инклузију $A \subset \tilde{I}_C(T^n \times A, \iota_a^*)$. Нека је $a' \in A$ произвољан елемент. Улагање

$$\iota_{a'}: T^n \rightarrow T^n \times A, \quad \iota_{a'}(q) = (q, a')$$

је предлагранжево, при чему важи $[\iota_{a'}^* \alpha_{\text{can}}] = a'$. Пошто је скуп A повезан, пресликавања ι_a и $\iota_{a'}$ су међусобно хомотопна, што значи да $\iota_{a'}$ на првој де Рамовој кохомологији индукује хомоморфизам ι_a^* . Одавде директно следи тражена инклузија:

$$A \subset \tilde{I}_C(T^n \times A, \iota_a^*).$$

Са друге стране, применом теореме Сикорава у симплектичком случају, добијемо следећи низ једнакости:

$$I_C(T^n \times A, \iota_a^*) = I(T^n \times CA, \iota_a^*)/\mathbb{R}^+ = CA/\mathbb{R}^+ = A.$$

Тврђење сада непосредно следи на основу теореме 3.17. $\square$

Модификована контактна инваријанта облика може да буде празан скуп, што је описано у теорему 3.20 чију формулацију наводимо без доказа. За детаље видети теорему 1.3 у [19].

Теорема 3.20. *Нека је $\iota: L \rightarrow (\mathbb{R}^{2n-1}, \xi_0)$ улагање затворене и повезане многострукости димензије n које је инфинитезимално раздвојиво.⁸ Тада постоји околина N од $\iota(L)$ која не допушта предлагранжева улагања $j: L \rightarrow N$ таква да је хомоморфизам $j_*: H_1(L, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(N, \mathbb{R})$ инјективно пресликавање. Специјално, скуп $\tilde{I}_C(N, L, \iota^*)$ је празан.*

Под претпоставком да је $L = T^2$ геометријска интерпретација исказа теореме 3.20 је следећа: за конвексан торус T_0 постоји мала цеваста околина која не допушта предлагранжев торус истог облика као T_0 .

У контактної геометрији постоје површи које нису ни конвексне, ни предлагранжеве (видети пример 2.26). Наредни пример приказује конструкцију тору са тим својствима који у свакој произвољно малој цевастој околини допушта предлагранжев торус истог облика.

Пример 3.21. Нека је на $M = T^2 \times \mathbb{R}$ контактна структура задата 1-формом:

$$\alpha = d\theta + z d\varphi.$$

Дефинишемо улагање $\iota_0: T^2 \rightarrow M$ са:

$$\iota_0(\varphi, \theta) = (\varphi, \theta, f(\theta)), \quad f(\theta) = 1 - \cos \theta,$$

а његову слику означимо са:

$$T_0 = \iota_0(T^2).$$

⁸ Енгл: immediately displaceable.

У примеру 2.26 смо доказали да торус $\iota_0(T^2)$ није ни предлагагранжев, ни конвексан, стога остаје да докажемо да свака произвољно мала цеваста околина тог турса допушта предлагагранжев торус истог облика. То ћемо показати тако што ћемо конструисати фамилију предлагагранжевих улагања:

$$\iota_\delta: T^2 \rightarrow M,$$

која у C^0 -топологији конвергира ка ι_0 када $\delta \rightarrow 0$.

Конструкција фамилије предлагагранжевих турса истог облика као T_0 .

Дефинишемо фамилију функција:

$$f_\delta(\theta) = 1 - \cos \theta + \delta, \quad \delta > 0,$$

и одговарајућу фамилију турса:

$$T_\delta = \iota_\delta(T^2),$$

где су улагања ι_δ задата са:

$$\iota_\delta(\varphi, \theta) = (\varphi, \theta, f_\delta(\theta)).$$

За свако $\delta > 0$, торус T_δ је предлагагранжев.

Образложење: функција f_δ је строго позитивна, форма $\frac{1}{f_\delta} \cdot \iota_\delta^* \alpha$ је затворена и 1-форма $\iota_\delta^* \alpha$ нема нула, одакле је улагање ι_δ предлагагранжево по дефиницији.

За довољно мало $\delta > 0$ пресликавања ι_δ и ι_0 су близу у C^0 -топологији, па су хомотопна и самим тиме индукују исто пресликавање на првој де Рамовој кохомологији (односно, имају исти облик у смислу наметнутог услова на кохомологији).

Закључак. За сваку произвољно малу цевасту околину N турса T_0 постоји предлагагранжев торус $\iota_\delta(T^2)$, истог облика као T_0 , који је садржан у N , па следи:

$$\tilde{I}_C(N, T^2, \iota_0^*) \neq \emptyset.$$

★

4 C^0 -ригидност у контактної топологији: преглед резултата и потенцијални правци истраживања

Ознаке које користимо у овој глави су:

- $(M^{2n-1}, \xi = \ker \alpha)$ – повезана контактна многострукост димензије $2n - 1$, при чему је контактна структура ξ кооријентисана са α ;
- $\text{Diff}(M)$ – група дифеоморфизама многострукости M ;
- $\text{Cont}(M, \xi) := \{\varphi : M \rightarrow M \mid \varphi \in \text{Diff}(M), \varphi^* \alpha = f \alpha, f > 0\}$ – група контактоморфизама многострукости M који чувају кооријентацију.

Најважније питање које разматрамо у овој глави је проблем C^0 -ригидности у контактної геометрији. Резултат који се сматра зачетком овог правца истраживања је теорема Ељашберга и Громова о C^0 -ригидности, која тврди да је група контактних дифеоморфизама $\text{Cont}(M, \xi)$ затворена у групи свих дифеоморфизама $\text{Diff}(M)$ у односу на C^0 -топологију, односно да важи:

$$\overline{\text{Cont}(M, \xi)}^{C^0} = \text{Cont}(M, \xi) \subseteq \text{Diff}(M).$$

Овај резултат природно води до дефиниције групе контактних хомеоморфизама:

$$\text{Conteo}(M, \xi) := \overline{\text{Cont}(M, \xi)}^{C^0} \subseteq \text{Homeo}(M).$$

Централни проблем који изучава C^0 -контактна топологија је питање колико контактне геометрије „памте” контактни хомеоморфизми. Специјално, једна од инстанци овог проблема је следеће питање:

Питање. (C^0 -ригидност Лежандрових подмногострукости) *Ако је $\Lambda \subset (M, \xi)$ Лежандрова подмногострукост и $\varphi \in \text{Conteo}(M, \xi)$ такав да је $\varphi(\Lambda)$ глатка подмногострукост, да ли је тада $\varphi(\Lambda)$ уједно и Лежандрова?*

Одговор на претходно формулисано питање је позитиван. Ризел и Саливен¹ су у [4] први дали одговор на то питање у димензији три, које Стокић² у [27] такође разматра у истој димензији.

¹ Michael G. Sullivan, амерички математичар.

² Maksim Stokić, српски математичар.

У наставку ове главе дајемо доказ теореме о C^0 -ригидности контактних дифеоморфизма користећи технику инваријанте облика, при чему пратимо доказ који су изложили Милер и Шпат у [20]. За више детаља видети секцију 4.1.

Идеја је била да представимо карактеризацију контактних улагања користећи технику инваријанте облика и да применом тог резултата прикажемо још један доказ теореме о C^0 -ригидности контактних дифеоморфизма коју Милер даје у [18]. Међутим, у доказу те карактеризације постоји грешка. За више детаља видети подсекцију 4.2.1.

4.1 Доказ теореме Ељашберг - Громова помоћу инваријанте облика

У овој секцији подразумевамо да сви дифеоморфизми из група $\text{Diff}(M)$ и $\text{Cont}(M, \xi)$ имају компактан носач садржан у унутрашњости многострукости M .

Теорема 4.1. (C^0 -ригидност контактних дифеоморфизма) *Група контактних дифеоморфизма $\text{Cont}(M, \xi)$ је C^0 -затворена у групи свих дифеоморфизма $\text{Diff}(M)$. Прецизније, ако низ контактоморфизма φ_k конвергира ка дифеоморфизму φ у C^0 -топологији, тада је и φ контактоморфизам.*

Доказ Милера и Шпата из рада [20], који наводимо у наставку, заснива се на техници инваријанте облика и Громовљевој алтернативи.

Теорема 4.2. (Громовљева алтернатива) *Нека је $(M, \xi = \ker \alpha)$ повезана контактна многострукост. Претпоставимо да је $G \subset \text{Diff}(M)$ подгрупа групе $\text{Diff}(M)$ која садржи све контактоморфизме који су изотопни идентичком пресликавању кроз контактну изотопију. Такође, претпоставимо да група G садржи $\psi \in \text{Diff}(M)$ који не чува контактну структуру. Тада група G садржи компоненту повезаности идентитета у групи $\text{Diff}(M)$.*

Доказ теореме о C^0 -ригидности прво дајемо у случају непарног n . За то нам је потребна следећа теорема:

Теорема 4.3. *Нека је (M, ξ) повезана контактна многострукост. Тада C^0 -затворење групе $\text{Cont}(M, \xi)$ у групи $\text{Diff}(M)$ не садржи дифеоморфизам који не чува кооријентацију од ξ .*

Доказ: Претпоставимо да постоји дифеоморфизам $\varphi \in \overline{\text{Cont}(M, \xi)}^{C^0} \subset \text{Diff}(M)$ такав да важи $\varphi^* \alpha = f \cdot \alpha$, где је $f \in \Omega^0(M)$ строго негативна функција.

- (1) M није затворена многострукост. Постоји тачка $x \in M \setminus \overline{\text{supp}(\varphi)}$. Тада је φ идентичко пресликавање на некој отвореној околини тачке x , па на тој околини важи $\varphi^* \alpha = \alpha$, што је у контрадикцији са претпоставком да је функција f строго негативна.

- (2) M је затворена многострукост. Како $\varphi \in \overline{\text{Cont}(M, \xi)}^{C^0}$, то постоји низ контактоморфизама $\varphi_k \in \text{Cont}(M, \xi)$ који конвергира ка φ у C^0 -топологији. За свако $k \in \mathbb{N}$ постоји строго позитивна глатка функција f_k тако да важи

$$\varphi_k^* \alpha = f_k \cdot \alpha,$$

одакле следи да пресликавања φ_k чувају оријентацију задату формом запремине $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$.

Будући да је $\varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{C^0} \varphi$, пресликавање φ такође чува оријентацију индуковану формом $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$.

С друге стране важи

$$\varphi^*(\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}) = f^n \cdot (\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}),$$

одакле следи да је $f^n > 0$. Пошто је по претпоставци n непарно, закључујемо да функција f мора бити строго позитивна, што је у контрадикцији са почетном претпоставком.

□

Докажимо теорему о C^0 -ригидности контактних дифеоморфизама:

Доказ теореме 4.1:

Најпре наводимо скицу доказа по корацима, које ћемо у наставку детаљно разградити.

- (1) Претпоставимо супротно, односно да група $\text{Cont}(M, \xi)$ није C^0 -затворена у $\text{Diff}(M)$. Тада постоји дифеоморфизам $\psi \in \text{Diff}(M)$ који или не чува контактну структуру, или је чува али не чува кооријентацију.
- (2) На основу теореме 4.3 следи да ψ не чува контактну структуру.
- (3) Посматрајмо C^0 -затворење групе $\text{Cont}(M, \xi)$ у групи $\text{Diff}(M)$:

$$G := \overline{\text{Cont}(M, \xi)}^{C^0}.$$

Будући да $\psi \in G$ не чува контактну структуру, применом Громовљеве алтернативе (видети теорему 4.2) закључујемо да група G садржи компоненту повезаности идентичког пресликавања у групи $\text{Diff}(M)$.

- (4) Конструирамо дифеоморфизам $\varphi \in \text{Diff}(M)$ који је изотопан идентичком пресликавању и има компактан носач, али за који не постоји низ контактоморфизама из $\text{Cont}(M, \xi)$ који конвергира ка њему у C^0 -топологији.
- (5) Дифеоморфизам φ по конструкцији из корака (4) припада компоненти повезаности идентичког пресликавања, а не налази се у групи G , што је у контрадикцији са кораком (3).

Једини корак који захтева додатно објашњење јесте корак (4), односно сама конструкција пресликавања φ . За конструкцију ћемо искористити последицу 1.31, а потом применити технику инваријанте облика како бисмо показали да конструисани дифеоморфизам не може бити C^0 -лимес контактоморфизама из $\text{Cont}(M, \xi)$.

Конструкција дифеоморфизма φ .

Из последице 1.31 следи да постоји отворен скуп $U \subset M$ и отворен скуп $A \subset S^{n-1}$ тако да су $(U, \xi|_U)$ и $(T^n \times A, \xi_{can})$ контактоморфни.

Фиксирајмо тачку $a \in A$. Будући да је скуп A отворен, постоји $r > 0$ тако да је отворена лопта у односу на стандардну метрику садржана у њему:

$$B(a, 2r) \subset A.$$

Није тешко наћи векторско поље чији је носач компактан и садржан у скупу A , при чему то поље генерише ток $\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ такав да φ^1 има следећа својства:

$$\varphi^1 \left(B \left(a, \frac{3}{2}r \right) \right) \subset B \left(a, \frac{r}{4} \right) \quad \text{и} \quad \varphi^1(a) = a.$$

Даље, дефинишемо дифеоморфизам φ на $T^n \times A$ са:

$$\varphi := \text{id}_{T^n} \times \varphi^1|_A : T^n \times A \rightarrow T^n \times A.$$

Како је носач $\text{supp}(\varphi) \subset T^n \times A \cong U$ компактан, то пресликавање φ можемо да проширимо на цело M до дифеоморфизма који је изотопан идентичком пресликавању.

Дифеоморфизам φ не припада групи G .

Претпоставимо да постоји низ контактоморфизама $\varphi_k \in \text{Cont}(M, \xi)$ који у C^0 -топологији конвергира ка дифеоморфизму φ . Као последица ове конвергенције и компактности скупа $T^n \times \overline{B(r)}$, за довољно велико $k \geq k_0$ важи:

$$\varphi_k(T^n \times \overline{B(r)}) \subset T^n \times B\left(\frac{r}{2}\right), \quad (7)$$

а самим тим важи и:

$$\varphi_k(T^n \times B(r)) \subset T^n \times B\left(\frac{r}{2}\right). \quad (8)$$

За $k \geq k_0$ дефинишемо рестрикције пресликавања φ_k на $T^n \times B(r)$ са:

$$\iota_k = \varphi_k|_{T^n \times B(r)} : T^n \times B(r) \rightarrow T^n \times B\left(\frac{r}{2}\right), \quad (9)$$

као и рестрикцију дифеоморфизма φ :

$$h = \varphi|_{T^n \times B(r)} : T^n \times B(r) \rightarrow T^n \times B\left(\frac{r}{2}\right). \quad (10)$$

Пресликавања ι_k су контактна улагања, па на основу теореме 3.14 важи:

$$I_C(T^n \times B(r), \iota_a^*) \subset I_C\left(T^n \times B\left(\frac{r}{2}\right), \iota_a^* \circ \iota_k^*\right). \quad (11)$$

Из C^0 -конвергенције следи да су пресликавања φ_k и φ хомотопна за довољно велико k , што повлачи и хомотопију њихових рестрикција $\iota_k \simeq h$. Одавде следи:

$$\iota_k \circ \iota_a \simeq h \circ \iota_a = \iota_a, \quad (12)$$

те пресликавања $\iota_k \circ \iota_a$ и ι_a на кохомологији индукују исто пресликавање:

$$\iota_a^* = (\iota_k \circ \iota_a)^* = \iota_a^* \circ \iota_k^*. \quad (13)$$

Из (11) и (13) важи:

$$I_C(T^n \times B(r), \iota_a^*) \subset I_C\left(T^n \times B\left(\frac{r}{2}\right), \iota_a^* \circ \iota_k^*\right) = I_C\left(T^n \times B\left(\frac{r}{2}\right), \iota_a^*\right). \quad (14)$$

Из теореме 3.19 и релације (14) директно добијамо инклузију лопти:

$$B(r) \subset B\left(\frac{r}{2}\right),$$

што доводи до контрадикције. $\square$

За парно n ћемо угрубо објаснити идеју доказа, без улажења у детаље. У том случају се прво докаже теорема 4.3. Ако је M затворена многострукост, Милер и Шпат користе резултат да на многострукости $M \times T^2$ постоји кооријентабилна контактна структура $\xi' = \ker \alpha'$ таква да је за свако $p \in M$ подмногострукост $(M \times \{p\}, \xi)$ контактна у $(M \times T^2, \xi')$.

Ако је φ дифеоморфизам који припада групи $\overline{\text{Cont}(M, \xi)}^{C^0}$, тада постоји низ φ_k контактоморфизама који конвергирају ка φ у C^0 -топологији.

Низ $\varphi_k \times \text{id}$ је низ контактоморфизама на $M \times T^2$ који у C^0 -топологији конвергира ка дифеоморфизму $\varphi \times \text{id}$. Многострукост $M \times T^2$ је димензије $2n + 1$, $n + 1$ је непарно, те из теореме Ељашберг-Громова о C^0 -ригидности, коју смо у том случају доказали, следи да је $\varphi \times \text{id}$ контактни дифеоморфизам, одакле се може закључити да се то преноси и на φ . За више детаља видети [20].

4.2 Допринос тезе и будући правци истраживања

4.2.1 Контрапример за доказ става 6.11. у [18]

Првобитна идеја овог рада је била да прикажемо доказ теореме о C^0 -ригидности контактних дифеоморфизама који је Милер изложио у [18]. У том раду, Милер даје потенцијални доказ следеће карактеризације:

Теорема 1.4. у [18]: Улагање $\varphi : (B_r^3, \xi_{std}) \rightarrow (M^3, \xi)$ је контактано ако и само ако чува (модификовану) контактну инваријанту облика.

У раду се потенцијални доказ претходно формулисане теореме заснива на теорему 3.20, која каже да модификована контактна инваријанта облика може да буде празан скуп, и на следећем ставу:

Став 4.4. Нека су (M_1, ξ_1) и (M_2, ξ_2) тродимензионалне контактне многострукости и $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ улагање које није контактано у тачки $x \in M_1$. Тада за сваку отворену околину $U \subset M_1$ тачке x , постоји предлагранжеево улагање торуса:

$$\iota : T^2 \rightarrow M_1$$

кроз x чија је слика $\iota(T^2)$ садржана у U , при чему је улагање:

$$\varphi \circ \iota : T^2 \rightarrow M_2$$

инфинитезимально раздвојиво.

Међутим, испоставља се да у [18], на самом почетку доказа претходно формулисаног става, постоји грешка. Да бисмо објаснили на ком месту се она јавља, у наставку дајемо грубу скицу доказа тог става који је изложен у [18].

Скица доказа.

- (1) Изаберемо чвор $\gamma \subset M_1$ који је трансверзалан на ξ_1 и $\varphi^*\xi_2$;
- (2) Конструирамо торус који садржи чвор γ тако да је предлагранжев у односу на ξ_1 и конвексан у односу на $\varphi^*\xi_2$:
 - посматрамо локални модел околине трансверзалног чвора γ у односу на контактну структуру ξ_1 ;
 - у том локалном моделу чвор γ одговара чвору $S^1 \times \{0\}$ (за детаље видети напомену 1.29);
 - за сваку глатку петљу $L \subset \mathbb{R}^2$, торус $S^1 \times L$ је предлагранжев у тој модел-околини, а самим тим и у (M_1, ξ_1) ;
 - изаберемо петљу L тако да контактна структура $\varphi^*\xi_2$ на торусу $S^1 \times L$ индукује карактеристичну фолијацију која има непразан деобни скуп;
 - из теореме 2.12 следи да је конструисани торус конвексан у односу на контактну структуру $\varphi^*\xi_2$.

Пропуст у доказу става 4.4 се јавља у кораку (1) претходно описане скице. У општем случају, не мора да постоји чвор који је истовремено трансверзалан на обе контактне структуре ξ_1 и $\varphi^*\xi_2$, и у наставку рада дајемо контрапример.

Пример 4.5. Нека су:

$$\xi_1 = \ker(dz - x dy) \quad \text{и} \quad \xi_2 = \ker(dz + x dy)$$

контактне структуре на простору $\mathbb{R}^3$, и нека је $\varphi: (\mathbb{R}^3, \xi_1) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \xi_2)$ идентичко пресликавање. Тада не постоји чвор $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ који је у свакој својој тачки трансверзалан на контактним структурама ξ_1 и $\varphi^*\xi_2 = \xi_2$.

Претпоставимо супротно. Дефинишемо функције $f, g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ са:

$$f(\theta) = (\alpha_1)_{\gamma(\theta)}(\gamma'(\theta)) = z'(\theta) - x(\theta)y'(\theta),$$

$$g(\theta) = (\alpha_2)_{\gamma(\theta)}(\gamma'(\theta)) = z'(\theta) + x(\theta)y'(\theta).$$

Услов трансверзалности чвора γ на контактним структурама ξ_1 и ξ_2 повлачи да функције f и g немају нула на S^1 . Будући да је кружница повезан простор, ове функције морају бити константног знака на њој. Због симетрије, довољно је посматрати следећа два случаја:

- (1) Случај $f > 0, g > 0$: сабирањем добијамо

$$f(\theta) + g(\theta) = 2z'(\theta) > 0,$$

што је немогуће јер извод глатке функције на кружници S^1 има нулу.

- (2) Случај $f > 0, g < 0$: одузимањем добијамо

$$f(\theta) - g(\theta) = -2x(\theta)y'(\theta) > 0,$$

одакле следи да y' нема нулу на S^1 , што није могуће. ★

Како доказ става 4.4 у раду [18] садржи пропуст, природно се отвара простор за даља истраживања у смеру:

- (1) Да ли је могуће поправити доказ тог става?
- (2) Да ли важи карактеризација контактних улагања наведена у теорему 1.4. у [18]?

4.2.2 C^0 -ригидност Лежандрових чворова и инваријанта облика

Питање C^0 -ригидности одређених класа подмногострукости у контактної геометрији је инспирисано резултатом Умилијереа³, Леклерка⁴ и Сефајдинија⁵ у симплектичкој топологији:

Теорема (C^0 -ригидност коизотропних подмногострукости). *Нека је C коизотропна подмногострукост⁶ симплектичке многострукости (M, ω) и $\varphi: M \rightarrow M$ симплектички хомеоморфизам. Ако је $\varphi(C)$ глатка подмногострукост, тада је она уједно и коизотропна.*

За доказ ове теореме видети [11].

Розен⁷ и Жанг у [24]⁸ дефинишу класу *контактно-коизотропних* подмногострукости и доказују слабију верзију C^0 -ригидности за ову класу објеката. Непосредно након саме дефиниције ове класе подмногострукости, детаљније ћемо образложити шта подразумевамо под слабијом верзијом C^0 -ригидности.

Дефиниција 4.6. Нека је $(M^{2n-1}, \xi = \ker \alpha)$ кооријентисана контактна многострукост димензије $2n - 1$. Подмногострукост $Y \subset M$ је *контактно-коизотропна*⁹ ако за свако $x \in Y$ важи:

$$(T_x Y \cap \xi_x)^\perp (d\alpha)_x \subset T_x Y \cap \xi_x.$$

Пример 4.7. Лежандрове подмногострукости су контактено-коизотропне. ★

Пример 4.8. Хиперповрши и предлагранжеве површи су контактено-коизотропне подмногострукости. ★

Розен и Жанг у [24] дају следећу дефиницију групе $\text{Aut}(M, \xi)$ контактних хомеоморфизама, при чему у односу на дефиницију групе $\text{Conteo}(M, \xi)$ додатно захтевају равномерну конвергенцију конформалних фактора:

³ Vincent Humilière, француски математичар.

⁴ Rémi Leclercq, француски математичар.

⁵ Sobhan Seyfaddini, канадски математичар иранског порекла.

⁶ Подмногострукост $C \subset (M, \omega)$ је *коизотропна* ако за свако $p \in C$ важи $(T_p C)^\perp \omega_p \subset T_p C$.

⁷ Daniel Rosen, израелски математичар.

⁸ Jun Zhang, кинески математичар.

⁹ Енгл: contact coisotropic.

Дефиниција 4.9. Хомеоморфизам $\varphi \in \text{Homeo}(M)$ контактне многострукости је *контактни хомеоморфизам* ако постоји низ контактних дифеоморфизама $\varphi_k \in \text{Cont}(M, \xi)$ са одговарајућим конформалним факторима $g_k: M \rightarrow \mathbb{R}$ тако да важи:

- (1) $\varphi_k \xrightarrow{C^0} \varphi$,
- (2) $g_k \xrightarrow{C^0} g$ за неку непрекидну функцију $g: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Питање C^0 -ригидности на које Розен и Жанг дају позитиван одговор је:

Питање. (C^0 -ригидност контактнo-коизотропних подмногострукости) *Нека је C контактнo-коизотропна подмногострукост контактне многострукости $(M, \xi = \ker \alpha)$ и $\varphi \in \text{Aut}(M, \xi)$ контактни хомеоморфизам. Ако је $\varphi(C)$ глатка подмногострукост у M , да ли је она уједно и контактнo-коизотропна?*

Група $\text{Aut}(M, \xi)$ је подскуп групе $\text{Conteo}(M, \xi)$, при чему је та инклузија строга, те је у том смислу верзија C^0 -ригидности доказана у [24] слабија. Равномерна конвергенција конформалних фактора омогућава да се проблем C^0 -ригидности контактнo-коизотропних подмногострукости сведе на симплектички случај.

Да бисмо објаснили на који начин равномерна конвергенција конформалних фактора фигурише у одговору на претходно постављено питање, подсетимо се на који начин се контактоморфизми подижу на симплектизацију.

Подизање контактоморфизма $\psi \in \text{Cont}(M, \xi)$ на симплектизацију

$$(\mathbb{R} \times M, d(e^\theta \alpha))$$

је симплектоморфизам дефинисан са:

$$\tilde{\psi}(\theta, x) = (\theta - g(x), \psi(x)),$$

где је глатка функција $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ одговарајући конформални фактор дефинисан условом $\psi^* \alpha = e^g \alpha$.

Да бисмо проблем у контактном случају свели на симплектички, поред равномерне конвергенције конформалних фактора, важну улогу игра и начин на који се контактнo-коизотропне подмногострукости подижу на симплектизацију. Прецизније, ова веза је дата следећим ставом (за доказ видети став 4.1 у [24]):

Став. *Нека је C подмногострукост у $(M, \xi = \ker \alpha)$. Тада је C контактнo-коизотропна ако и само ако је $\mathbb{R} \times C$ симплектички коизотропна у симплектизацији $(\mathbb{R} \times M, \omega = d(e^\theta \alpha))$.*

Након претходних опаски, одговор на раније постављено питање о C^0 -ригидности има природан ток. Наиме, за контактни хомеоморфизам $\varphi \in \text{Aut}(M, \xi)$ из дефиниције 4.9 директно следи да постоји низ контактоморфизама $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ са одговарајућим конформалним факторима $g_k: M \rightarrow \mathbb{R}$, такав да су испуњена оба услова из поменуте дефиниције.

Подмногострукост C се подиже у симплектичко-коизотропну подмногострукост $\mathbb{R} \times C$ у симплектизацији, док низ контактоморфизама φ_k индукује низ симплектоморфизама $\tilde{\varphi}_k$.

Равномерна конвергенција конформалних фактора повлачи да конструисани низ симплектоморфизама конвергира у C^0 -топологији ка хомеоморфизму $\tilde{\varphi}$ који је дефинисан са:

$$\tilde{\varphi}(\theta, x) = (\theta - g(x), \varphi(x)).$$

Проблем је сада сведен на симплектички случај у следећем смислу: уколико је одговор на питање да ли симплектички хомеоморфизам $\tilde{\varphi}$ пресликава $\mathbb{R} \times C$ на симплектичко-коизотропну подмногострукост потврдан, непосредно из претходног става следи да је слика $\varphi(C)$ контактно-коизотропна. Ово питање је ствар симплектичке геометрије, а резултат Умилијереа, Леклерка и Сефајдинија из [11], даје потврдан одговор.

У општем случају, када немамо контролу над конформалним факторима, конструисани низ симплектоморфизама $\tilde{\varphi}_k$ не мора да конвергира у C^0 -топологији ка пресликавању $\tilde{\varphi}$. Због тога је питање C^0 -ригидности контактно-коизотропних подмногострукости у општем случају и даље отворено.

Иако није познато да ли у општем случају — када немамо контролу над конформалним факторима — важи C^0 -ригидност класе контактно-коизотропних подмногострукости, ипак можемо да издвојимо објекте тог типа за које је показано да C^0 -ригидност важи. Данас је познато да у тродимензионалном случају важи C^0 -ригидност Лежандрових чворова. Ризел и Саливен у [4] доказују ригидност класе Лежандрових чворова користећи технику специфичну за димензију три. Осим тога, Стокић у [27], ослањајући се на резултат Ентова и Полтеровича о контактном преплитању Лежандрових подмногострукости (енгл. *contact interlinking of Legendrians*), даје одговор на нешто општије питање. Прецизније, он доказује да глатка слика Лежандрове подмногострукости при контактном хомеоморфизму не може бити скоро Реб-инваријантан скуп¹⁰ (енгл. *nearly Reeb invariant*), где као последицу у димензији три добија C^0 -ригидност Лежандрових чворова.

Било би интересно проблем C^0 -ригидности Лежандрових чворова размотрити са становишта технике инваријанте облика, и на тај начин дати још један алтернативни доказ овог резултата за поменућу класу објеката.

Наша намера је да, поред покушаја да поправимо (или оповргнемо) став 6.11 у Милеровом раду [18], применом ове технике докажемо C^0 -ригидност Лежандрових чворова.

У наставку дајемо скицу нашег приступа овом проблему:

- (1) Доказати да контактни хомеоморфизам не може да преслика Лежандров чвор L на трансверзалан чвор T :
 - за то је довољно да докажемо да контактни хомеоморфизам не може да преслика чвор T у чвор L ;
 - посматрамо одговарајуће модел-околине чворова L и T (видети напомене 1.27 и 1.29), при чему сваки од чворова поистоветимо са $S^1 \times \{0\}$ у одговарајућем моделу;

¹⁰ У наставку рада за скоро Реб-инваријантне скупе користимо ознаку СРИ.

- пробушена околина¹¹ чвора L се разлистава на конвексне торусе, док предлагранжеви торуси разлиставају пробушену околинду чвора T у одговарајућем моделу (видети пример 2.25);
- конвексан торус има довољно малу околинду која не допушта предлагранжеве торусе одређеног облика — односно, модификована контактна инваријанта облика је празан скуп (видети теорему 3.20);
- модификована контактна инваријанта облика у околини предлагранжевог торуса је непразан скуп;
- ако контактни хомеоморфизам φ слика чвор T на чвор L , тада он слика и пробушену околинду U_T чвора T на пробушену околинду U_L чвора L ;
- у том случају контактни хомеоморфизам слика околинду предлагранжевог торуса у околинду неког конвексног торуса;
- модификована контактна инваријанта облика се чува при C^0 -ли-месима (видети коментар након теореме 3.14), па из претходних корака закључујемо да контактни хомеоморфизам не може да слика чвор T у чвор L .

(2) Доказати да контактни хомеоморфизам не може да преслика Лежандров чвор L на чвор K који није Лежандров:

- идеја је да искористимо резултат Ризела и Саливена из [4] који каже да чвор који није Лежандров контактном изотопијом можемо да доведемо произвољно близу неком трансверзалном чвору и искористимо (1);

Питање C^0 -ригидности предлагранжевих површи у контактної многострукости димензије три је решено уколико се за дефиницију контактнoг хомеоморфизма узме 4.9, јер су предлагранжеве површи специјалан тип контактнo-коизотропних подмногострукости за које је та слабија C^0 -ригидност доказана у [24].

Међутим, питање које нас занима јесте питање C^0 -ригидности предлагранжевих површи у општем случају.

Питање. (C^0 -ригидност предлагранжевих површи) *Ако је $C \subset (M^3, \xi)$ предлагранжева површ и $\varphi \in \text{Conteo}(M, \xi)$ такав да је $\varphi(C)$ глатка подмногострукост, да ли је тада површ $\varphi(C)$ уједно и предлагранжева?*

Како бисмо доказали C^0 -ригидност Лежандрових чворова, довољно је да знамо да конвексан торус има цевасту околинду у којој је модификована контактна инваријанта облика празан скуп, док је та инваријанта у околини предлагранжевог торуса непразна. Међутим, исти аргументи нису довољни да би се доказала C^0 -ригидност предлагранжевих површи. Једноставно је доказати да контактни хомеоморфизам не може да преслика предлагранжев торус у конвексан, и у том случају можемо да искористимо претходно наведене аргументе.

¹¹ Ако је U отворена околина чвора L , под пробушеном околином мислимо на $U \setminus L$.

Ситуација се компликује у случају када желимо да покажемо да контактни хомеоморфизам не може да слика предлагагранжеву површ у површ која није ни конвексна, ни предлагагранжева. У примеру 3.21 дат је пример таквог торуса који у свакој довољно малој околини допушта предлагагранжев торус истог облика. Из претходног је јасно да нам треба нека финија информација о инваријанти облика (од оне да ли је она празан или непразан скуп) како бисмо у потпуности разрешили питање C^0 -ригидности предлагагранжевих површи.

4.2.3 Нови доказ теореме о C^0 -ригидности Ељашберга и Громова помоћу СРИ скупова

На самом почетку ове главе приказан је доказ теореме о C^0 -ригидности контактних дифеоморфизама који су Милер и Шпат дали у [20]. Са друге стране, Милерова идеја у раду [18] је била да поменути резултат докаже без коришћења Громовљеве алтернативе. Он је имао идеју да теорему Ељашберг–Громова докаже као директну последицу теореме 1.4. у [18], у којој даје карактеризацију контактних улагања помоћу контактне инваријанте облика.

Пратећи Милерову идеју, на крају ове тезе наводимо карактеризацију контактних дифеоморфизама у димензији три помоћу СРИ скупова – појма који Стокић дефинише у [27] – и као последицу дајемо алтернативни доказ теореме Ељашберг–Громова о C^0 -ригидности контактних дифеоморфизама, што представља један од доприноса ове тезе.

Дефиниција 4.10. Нека је $(M, \xi = \ker \alpha)$ контактна многострукост и $N \subset M$ компактан подскуп. Кажемо да је N *скоро Реб-инваријантан* ако за сваку отворену околину $U \supset N$ постоји отворен подскуп $V \subset U$ такав да важи:

- (1) $N \subset V$;
- (2) V је инваријантан у односу на ток Ребовог векторског поља $R_{\alpha'}$ које одговара контактної форми α' таквој да важи $\xi = \ker \alpha'$.

Пример 4.11. Трансверзални чвор у димензији три је СРИ скуп (видети пример 2.25). ★

Дефиниција 4.12. Хомеоморфизам $\varphi \in \text{Homeo}(M)$ *чува* СРИ скупове ако важи еквиваленција:

N је СРИ скуп ако и само ако је $\varphi(N)$ СРИ скуп.

Теорема 4.13. Дифеоморфизам $\varphi \in \text{Diff}(M)$ је контактни дифеоморфизам ако и само ако чува СРИ скупове.

Доказ:

$(\Rightarrow)$: Нека је N СРИ скуп и $U \supset \varphi(N)$ отворена околина скупа $\varphi(N)$.

Тада по дефиницији постоји отворен скуп V такав да важи:

- $N \subset V \subset \varphi^{-1}(U)$;
- V је инваријантан у односу на ток Ребовог векторског поља R_{α} које одговара некој контактної форми α : $\xi = \ker \alpha$.

Скуп $\varphi(V)$ је отворена околина скупа $\varphi(N)$ која задовољава следећа својства:

- (1) $\varphi(N) \subset \varphi(V) \subset U$,
- (2) $\varphi(V)$ је инваријантан у односу на ток Ребовог векторског поља придруженог контактної форми $(\varphi^{-1})^*\alpha$:
 - нека је $\{\psi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ ток придружен Ребовом векторском пољу R_α ;
 - тада је $\psi^t(V) = V$, из чега следи да је

$$\varphi \circ \psi^t \circ \varphi^{-1}(\varphi(V)) = \varphi(V);$$
 - Векторско поље φ_*R_α генерише фамилију контактоморфизама:

$$\varphi \circ \psi^t \circ \varphi^{-1};$$
 - једноставном провером добијамо да векторско поље φ_*R_α одговара Ребовом векторском пољу које је придружено контактної форми $(\varphi^{-1})^*\alpha$.

Из претходног закључујемо да је $\varphi(N)$ скоро Реб-инваријантан.

($\Leftarrow$) : Претпоставимо супортно, да φ није контактни дифеоморфизам, и да је контактни услов нарушен у тачки $x \in M$.

То значи да није задовољена једнакост $T_x\varphi(\xi_x) = \xi_{\varphi(x)}$, из чега следи да можемо да конструишемо Лежандров чвор Λ који садржи тачку x и са φ се слика на чвор који није Лежандров.

Тада је на основу става 1.5 у [27] чвор $\varphi(\Lambda)$ СРИ, што је у контрадикцији са почетном претпоставком да важи:

N је скоро СРИ ако и само ако је $\varphi(N)$ СРИ.

□

Својство чувања СРИ скупова се преноси C^0 -лимесима.

Став 4.14. Нека је $\varphi_i \in \text{Cont}(M, \xi)$ низ контактоморфизама који у C^0 -топологији конвергира ка хомеоморфизму $\varphi \in \text{Homeo}(M)$. Тада хомеоморфизам φ чува СРИ скупове.

Доказ:

Нека је N скуп који је СРИ. По дефиницији показујемо да то својство има и његова слика $\varphi(N)$.

Нека је $\widetilde{W}$ отворен скуп који садржи $\varphi(N)$. Скуп $W := \varphi^{-1}(\widetilde{W})$ је отворена околина скупа N .

Како је N СРИ, то постоји отворен скуп V такав да важи:

$$N \subset V \subset W$$

и V инваријантан у односу на ток неког Ребовог векторског поља.

Штавише, можемо да изаберемо V тако да је $\overline{V}$ компактан скуп и да важи:

$$N \subset V \subset \overline{V} \subset W$$

Група $\text{Homeo}(M)$ је тополошка група, те из конвергенције $\varphi_i \xrightarrow{C^0} \varphi$ следе

$$(1) \varphi^{-1} \circ \varphi_i \xrightarrow{C^0} \text{id} \quad \text{и} \quad (2) \varphi_i^{-1} \circ \varphi \xrightarrow{C^0} \text{id}.$$

Из дефиниције C^0 -конвергенције и (1) следи да постоји $i_0 \in \mathbb{N}$ тако да за $i \geq i_0$ важи $\varphi^{-1} \circ \varphi_i(\overline{V}) \subset W$, из чега закључујемо да за довољно велико i важи $\varphi_i(\overline{V}) \subset \varphi(W) = \widetilde{W}$.

Из исте дефиниције и (2) следи да постоји $i_1 \in \mathbb{N}$ такво да за $i \geq i_1$ важи $\varphi_i^{-1} \circ \varphi(N) \subset V$, одакле закључујемо да за довољно велико i важи $\varphi(N) \subset \varphi_i(V)$.

Из претходног закључујемо да за довољно велико $i \in \mathbb{N}$ важи

$$\varphi(N) \subset \varphi_i(V) \subset \widetilde{W}.$$

Пресликавање φ_i је контактни дифеоморфизам, скуп V је инваријантан у односу на неко Ребово векторско поље, па следи да то својство има и скуп $\varphi_i(V)$. $\square$

Теорема Ељашберг-Громова о C^0 -ригидности контактних дифеоморфизама је сада непосредна последица претходног става и карактеризације контактоморфизама дате у 4.13.

Доказ теореме 4.1:

Нека је φ дифеоморфизам који се налази у групи $\overline{\text{Cont}(M, \xi)}^{C^0} \subseteq \text{Diff}(M)$.

Тада постоји низ контактних дифеоморфизама $\varphi_i \in \text{Cont}(M, \xi)$ такав да важи $\varphi_i \xrightarrow{C^0} \varphi$.

Из става 4.14 следи да φ чува СРИ скупове, из чега на основу теореме 4.13 закључујемо да је φ контактни дифеоморфизам. $\square$

Један од доприноса ове тезе је управо приказани доказ теореме Ељашберг-Громова о C^0 -ригидности. Овај доказ се односи на димензију три, будући да је карактеризација контактних дифеоморфизама преко СРИ скупова у теорему 4.13 доказана у тој димензији. Наредни корак био би уопштавање ове карактеризације на произвољну димензију, што би омогућило доказ теореме о C^0 -ригидности у општем случају коришћењем СРИ скупова.

Литература

- [1] Asano, Tomohiro and Ike, Yuichi and Kuo, Christopher and Li, Wenyan. “ C^0 -rigidity of Legendrians and coisotropics via sheaf quantization”. Y: *arXiv preprint arXiv:2510.01746* (2025.).
- [2] Candel, Alberto and Conlon, Lawrence. “*Foliations I*”. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 23. American Mathematical Society, 1999.
- [3] Dimitroglou Rizell, Georgios. “*Exact Lagrangians in four-dimensional symplectisations*”. Y: *Bulletin of the London Mathematical Society* 56.5 (2024.), стр. 1511–1531.
- [4] Dimitroglou Rizell, Georgios and Sullivan, Michael G. “ C^0 -limits of Legendrian knots and contact non-squeezing”. Y: *Transactions of the American Mathematical Society, Series B* 11 (2024.), стр. 798–825.
- [5] Dimitroglou Rizell, Georgios and Sullivan, Michael G. “ C^0 -limits of Legendrians and positive loops”. Y: *Compositio Mathematica* 160.12 (2025.), стр. 2904–2915.
- [6] Eliashberg, Yakov. “*New invariants of open symplectic and contact manifolds*”. Y: *Journal of the American Mathematical Society* 4.3 (1991.), стр. 513–520.
- [7] Etnyre, John and Tosun, Bülent. “*Low-Dimensional Contact Geometry*”. Graduate lecture notes / Book draft, Version 0.1. 2025.
- [8] Geiges, Hansjörg. “*An Introduction to Contact Topology*”. Сб. 109. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2008.
- [9] Giroux, Emmanuel. “*Convexité en topologie de contact*”. Y: *Commentarii Mathematici Helvetici* 66.1 (1991.), стр. 637–677.
- [10] Gromov, Mikhail. “*Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*”. Y: *Inventiones mathematicae* 82.2 (1985.), стр. 307–348.

- [11] Humilière, Vincent and Leclercq, Rémi and Seyfaddini, Sobhan. “*Coisotropic rigidity and C^0 -symplectic geometry*”. *Y: Duke Mathematical Journal* 164.4 (2015.), стр. 703–734.
- [12] Laudenbach, François and Sikorav, Jean-Claude. “*Hamiltonian disjunction and limits of Lagrangian submanifolds*”. *Y: International Mathematics Research Notices* 1994.4 (1994.), стр. 161–168.
- [13] Massot, Patrick. “*Topological Methods in 3-Dimensional Contact Geometry*”. *Y: Contact and Symplectic Topology*. Св. 26. Springer, 2014., стр. 27–83.
- [14] McDuff, Dusa and Salamon, Dietmar. “*Introduction to Symplectic Topology*”. 3рд. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, 2017.
- [15] McDuff, Dusa and Salamon, Dietmar. “*J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*”. 2nd. Св. 52. American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, 2012.
- [16] Milinković, Darko. “*Uvod u račun na mnogostrukostima*”. Beograd: Matematički fakultet, 2023.
- [17] Moerdijk, Ieke and Mrčun, Janez. “*Introduction to foliations and Lie groupoids*”. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2003.
- [18] Müller, Stefan. “ *C^0 -characterization of symplectic and contact embeddings and Lagrangian rigidity*”. *Y: International Journal of Mathematics* 30.09 (2019.), стр. 1950035.
- [19] Müller, Stefan. “*J-holomorphic disks with pre-Lagrangian boundary conditions*”. arXiv:1704.02655. 2017.
- [20] Müller, Stefan and Spaeth, Peter. “*Gromov’s alternative, contact shape, and C^0 -rigidity of contact diffeomorphisms*”. *Y: International Journal of Mathematics* 25.14 (2014.), стр. 1450124.
- [21] Müller, Stefan and Spaeth, Peter. “*Topological contact dynamics I: symplectization and applications of the energy-capacity inequality*”. *Y: Advances in Geometry* 15.3 (2015.), стр. 349–380.
- [22] Müller, Stefan and Spaeth, Peter. “*Topological contact dynamics II: topological automorphisms, contact homeomorphisms, and non-smooth contact dynamical systems*”. *Y: Transactions of the American Mathematical Society* 365.12 (2013.), стр. 6409–6449.
- [23] Müller, Stefan and Spaeth, Peter. “*Topological contact dynamics III: uniqueness of the topological Hamiltonian and C^0 -rigidity of the geodesic flow*”. *Y: Journal of Symplectic Geometry* 14.1 (2016.), стр. 1–29.

- [24] Rosen, Daniel and Zhang, Jun. “*Chekanov’s dichotomy in contact topology*”. Y: *Mathematical Research Letters* 27.4 (2020.), стр. 1165–1189.
- [25] Serraille, Baptiste and Stojisavljević, Vukašin. “*On certain C^0 -aspects of contactomorphism groups*”. Y: *International Mathematics Research Notices* 2026.1 (2026.).
- [26] Stokić, Maksim. “ *C^0 -flexibility of Legendrian discs in $\mathbb{R}^5$* ”. Y: *arXiv preprint arXiv:2406.04194* (2024.).
- [27] Stokić, Maksim. “*New steps in C^0 symplectic and contact geometry of smooth submanifolds*”. Y: *Israel Journal of Mathematics* 264.1 (2025.), стр. 1–41.