

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Маша Миливојевић

ДЕЛЦАНОВА КОРЕСПОНДЕНЦИЈА И
ТОПОЛОГИЈА СИМПЛЕКТИЧКИХ
ТОРУСНИХ МНОГОСТРУКОСТИ

мастер рад

Београд, 2026.

Ментор:

проф. др Александра Маринковић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Дарко Милинковић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Игор Уљаревић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: _____

Садржај

Предговор	1
1 Дејства Лијевих група на симплектичким многострукостима	3
1.1 Лијеве групе и Лијеве алгебре	3
1.2 Симплектичка и Хамилтонова дејства	10
1.2.1 Примери	14
1.3 Симплектичке торусне многострукости	16
1.3.1 Хамилтонова дејства торуса	16
1.3.2 Примери	24
2 Класификација симплектичких торусних многострукости	34
2.1 Делцанова кореспонденција	34
2.1.1 Егзистенција	36
2.1.2 Јединственост	40
2.2 Примери	45
3 Тополошке особине	49
3.1 Хомологија симплектичких торусних многострукости	50
3.2 Чернове класе	56
3.2.1 Линијска раслојења придружена странама политопа	56
3.2.2 Цепање тангентног раслојења	59
3.2.3 Примери	63
4 Симплектичке торусне многострукости са контактном границом	67
4.1 Контактне многострукости као границе симплектичких	67
4.2 Торусна дејства на симплектичким многострукостима са границом . .	70
4.3 Отворена питања	75
А Морсове и Морс-Ботове функције	77
А.1 Морсове функције	77
А.2 Морс-Ботове функције	79
Б Други приступ доказу Делцанове кореспонденције	87
Литература	98

Предговор

Дејства Лијевих група на симплектичким многострукостима која чувају симплектичку форму су једна од тема која се у оквиру симплектичке геометрије и топологије издвојила као предмет истраживања крајем шездесетих и почетком седамдесетих година двадесетог века. Проучавање дејстава торуса, као компактних комутативних Лијевих група, изнедрило је веома богату теорију којој ћемо се посветити у овом раду. Велики помак у овим истраживањима десио се осамдесетих година, када су Атија¹, као и Гиљемин² и Стернберг³, независно доказали да је слика моментног пресликавања Хамилтоновог дејства торуса на затвореној и повезаној симплектичкој многострукости конвексан политоп, и то конвексни омотач слика фиксних тачака дејства. Природно се намеће питање колико информација о самој многострукости можемо добити посматрањем одговарајућег политопа. Одговор на ово питање дао је Делцан⁴, у случају када је димензија торуса једнака половини димензије многострукости – многострукости са ефективним Хамилтоновим дејством торуса у потпуности су одређене својом моментном сликом. Прецизније, оне су у бијективној кореспонденцији са класом политопа које данас називамо *Делцановим*. Овој теорему је посвећена глава 2.

Главна тема главе 3 ће бити значај ове кореспонденције, који је вишеструк. Као прво, она даје богат и експлицитан извор примера – сваки нацртан политоп који задовољава Делцанове услове заправо одређује симплектичку многострукост. Испоставља се да се из политопа могу прочитати хомолошке групе, Ојлерова карактеристика, Чернове класе као и многе друге особине многострукости, док се операције над њима као што је симплектичко одувавање могу тумачити као једноставне комбинаторне операције над политопом.

Са друге стране, торусна дејства и симплектичке торусне многострукости су предмет анализе у оквиру које се среће неколико различитих теорија. Овакве многострукости су примери потпуно интеграбилних система, док торусна дејства имају велик значај у алгебарској геометрији, као и чистој топологији. Управо због своје позиције на међи више области, торусна дејства су и данас један од најчешћих алата којима се приступа питањима у симплектичкој, али и контактної топологији.

Уколико претходно описану теорију уопшtimo одбацавањем претпоставке о за-

¹Michael Atiyah (1929–2019) – британско-либански математичар

²Victor Guillemin (1937–) — амерички математичар

³Shlomo Sternberg (1936–2024) — амерички математичар

⁴Thomas Delzant (1961 -) – француски математичар

творености посматране многострукости, отвара се теорија која је и данас у великој мери непозната и у којој моментна слика више не мора бити политоп, а граница многострукости природно има контактну структуру инваријантну у односу на дејство. Још неке од занимљивих тема које су кратко поменуте у овом раду тичу се тога када контактна торусна многострукост може бити конвексна или конкавна граница симплектичке, то јест када допушта одговарајуће *торусно* попуњење.

Питање када контактна многострукост допушта јако симплектичко попуњење постављено је још осамдесетих година прошлог века и од тада је ова тема разрађена у великом броју радова и о њој је, до данас, доста тога разјашњено. Посебно интересно је размотрити шта се дешава ако захтевамо да и само попуњење контактне торусне многострукости буде *торусно*, то јест да буде симплектичка торусна многострукост чије се дејство поклапа са дејством на граници и да је притом граница конкавна. Прегледу теорије симплектичких многострукости са границом у овом контексту је посвећена глава 4, на чијем крају је наведено неколико отворених питања која могу послужити као потенцијални правци даљих истраживања.

Велику захвалност дугујем својој менторки, проф. др Александри Маринковић која ме је упознала са овом темом и која је својим трудом и посвећеношћу умногоме допринела коначном изгледу овог рада. Захваљујем се и члановима комисије, проф. др Дарку Милинковићу и проф. др Игору Уљаревићу, чија су предавања и ентузијазам великим делом заслужни за моје интересовање и мотивацију да се сличним областима бавим и у будућности.

Глава 1

Дејства Лијевих група на симплектичким многострукостима

1.1 Лијеве групе и Лијеве алгебре

Прво поглавље отпочињемо прегледом основних дефиниција из теорије Лијевих група које ће нам бити неопходне у наставку рада.

Дефиниција 1. *Лијева група* $(G, \cdot)$ је група која има структуру глатке многострукости и пресликавања

$$\cdot: G \times G \longrightarrow G, \quad (g, h) \mapsto gh, \quad \cdot^{-1}: G \longrightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

су глатка.

Пример 1. *Неки примери Лијевих група*

1. $(\mathbb{R}, +)$ је Лијева група.
2. $(S^1, \cdot)$ је Лијева група.
3. За $(M_1, \cdot_1)$ и $(M_2, \cdot_2)$ Лијеве групе, $(M_1 \times M_2, \cdot)$ је такође Лијева група, са операцијом $(m, n) \cdot (p, q) = (m \cdot_1 p, n \cdot_2 q)$. Овај закључак нам даје још један, нама нарочито значајан пример Лијеве групе – n -димензионални торус $\mathbb{T}^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$.

Дефиниција 2. *Дејство* Лијеве групе G на многострукости M је хомоморфизам група

$$\varphi: G \longrightarrow \text{Diff}(M)$$

$$g \longmapsto \varphi_g,$$

при чему је $\text{Diff}(M)$ група дифеоморфизама многострукости M . За дејство G на M кажемо да је *глатко* ако је пресликавање

$$G \times M \longrightarrow M$$

$$(g, p) \longmapsto \varphi_g(p)$$

глатко. У наставку ћемо увек подразумевати да су дејства која посматрамо глатка. За вредност $\varphi_g(p)$ користићемо ознаку $g * p$.

Пример 2.

1. G дејствује на себи левим транслацијама

$$\varphi_g = L_g: G \longrightarrow G, \quad \varphi_g(h) = g \cdot h.$$

Аналогно се дефинише и дејство десним транслацијама.

2. S^1 дејствује на $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ротацијама

$$e^{it} * z = e^{it} \cdot z.$$

3. S^1 такође дејствује ротацијама на дводимензионалној сфери S^2

$$e^{it} * (z, h) = (e^{it} z, h).$$

Дефиниција 3. Ако је $p \in M$ тачка многострукости M на којој дејствује G , скуп

$$\mathcal{O}_p := \{g * p \mid g \in G\} \subseteq M$$

називамо *орбитом* тачке p . *Простор орбита* је количнички скуп M/G релације еквиваленције $\sim$ дефинисане са

$$p \sim q \iff q \in \mathcal{O}_p.$$

Скуп

$$G_p := \{g \in G \mid g * p = p\} \subseteq G,$$

називамо *стабилизатором* тачке p .

У претходном примеру смо видели да Лијева група G дејствује на себи левим транслацијама $L_g: G \rightarrow G$, $L_g(h) = gh$. За векторско поље X на G кажемо да је *лево-инваријантно* ако је $dL_g(X) = X$ за све $g \in G$. Испоставља се да је скуп лево-инваријантних векторских поља на G затворен за узимање комутатора, што је садржај следећег једноставног али важног тврђења.

Тврђење 1. Ако је G Лијева група и X и Y глатка, лево-инваријантна векторска поља на G , онда је $[X, Y]$ такође лево-инваријантно.

Доказ. Нека је $g \in G$ произвољно. Тада важи

$$(dL_g)[X, Y] = [dL_g(X), dL_g(Y)] = [X, Y],$$

при чему прва једнакост важи јер су леве транслације дифеоморфизми. $\square$

Дефиниција 4. *Лијева алгебра* је векторски простор $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, заједно са операцијом

$$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

која задовољава следеће три особине, за све $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

1. билинеарност;
2. антисиметричност;
3. Јакобијев идентитет:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Последица претходног тврђења је да је скуп лево-инваријантних векторских поља Лијеве групе G у односу на комутатор заправо Лијева алгебра. Детаљи се могу наћи у [26]. Ову Лијеву алгебру зовемо *Лијева алгебра Лијеве групе G* и означавамо са $\text{Lie}(G)$. Следећа теорема нам омогућава алтернативну дефиницију појма Лијеве алгебре од G . Доказ се може пронаћи у [26] или [33].

Теорема 1. Нека је G Лијева група. Тада је пресликавање

$$T_e G \longrightarrow \text{Lie}(G), \quad X_e \longmapsto dL_g(X_e), \quad g \in G,$$

изоморфизам векторских простора.

Последица постојања структуре групе на G и самим тим глобално дефинисаних лево-инваријантних векторских поља јесте да је свака Лијева група паралелизабилна, а што значи да је тангентно раслојење Лијеве групе тривијално. Тривијализација је дефинисана помоћу изоморфизма који смо видели у претходној теорему,

$$G \times T_e G \longrightarrow TG, \quad (g, X_e) \longmapsto dL_g(X_e).$$

Пример 3. (*Лијеве алгебре Лијевих група из примера 1*)

1. $\text{Lie}(\mathbb{R}) \cong T_0 \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.
2. Лијева алгебра од S^1 је комутативна алгебра $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
3. Лијева алгебра од $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ је $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Пре него што пажњу усмеримо назад на дејства Лијевих група, навешћемо још неколико важних дефиниција и познатих резултата који се тичу лево-инваријантних векторских поља.

Дефиниција 5. Нека је G Лијева група. *Једнопараметарска подгрупа* од G је хомоморфизам Лијевих група $\mathbb{R} \longrightarrow G$, тј. глатко пресликавање које је хомоморфизам група.

Испоставља се да су једнопараметарске подгрупе Лијеве групе G тачно интегралне криве $\gamma^X: \mathbb{R} \rightarrow G$ лево-инваријантних векторских поља X са почетним условом $\gamma^X(0) = e$. Приметимо да овде користимо чињеницу да је свако лево-инваријантно векторско поље комплетно, у шта се није тешко уверити. Детаљи се могу наћи у [33]. Природно се намеће питање да ли знамо тачно како изгледају ове интегралне криве.

Дефиниција 6. Нека је G Лијева група и $\mathfrak{g}$ Лијева алгебра од G . *Експоненцијално пресликавање* је

$$\begin{aligned} \exp: \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \gamma^X(1). \end{aligned}$$

Тврђење 2. Ако је $X \in \mathfrak{g}$, онда је $\gamma^X(t) = \exp(tX)$.

Доказ. По дефиницији експоненцијалног пресликавања, важи $\exp(tX) = \gamma^{tX}(1)$. Дакле, довољно је показати да је $\gamma^{tX}(1) = \gamma^X(t)$. За то је потребно показати да је $\delta(s) = \gamma^X(ts)$ интегрална крива од tX кроз e . Јасно, важи $\delta(0) = \gamma^X(0) = e$. Директним рачуном добијамо

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \delta(s) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \gamma^X(ts) \\ &= t \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \gamma^X(ts) \\ &= tX. \end{aligned}$$

Како је интегрална крива јединствена, закључујемо да је

$$\exp(tX) = \delta(1) = \gamma^X(t \cdot 1) = \gamma^X(t).$$

□

У наставку ћемо навести особине и примере дејстава Лијевих група који ће се често помињати у наставку рада.

Дефиниција 7. Нека је дато глатко дејство Лијеве групе G на многострукости M .

1. Дејство је *ефективно* ако из $\varphi_g = \text{id}$ следи $g = e$. Приметимо да ово значи да је пресек стабилизатора свих тачака многострукости M тривијалан, то јест важи $\bigcap_{p \in M} G_p = \{e\}$.
2. Дејство је *слободно* ако су стабилизатори свих тачака $p \in M$ тривијални, то јест за свако $p \in M$ важи $G_p = \{e\}$. Приметимо да је овај услов јачи од услова да дејство нема фиксних тачака. Заиста, постоје дејства која немају фиксних тачака, а нису ни слободна, што ћемо видети у примеру 5.

3. Дејство је *транзитивно* ако за сваку тачку $p \in M$ важи $O_p = M$.

Пример 4. Вратимо се на дејства која смо видели у примеру 2.

1. Дејство G на самој себи је слободно (а самим тим и ефективно), транзитивно дејство.
2. Дејство S^1 на $\mathbb{R}^2$ је ефективно дејство које није транзитивно, а ни слободно (координатни почетак је фиксна тачка).
3. Дејство S^1 на S^2 је такође ефективно, али није транзитивно, а ни слободно (дејство има две фиксне тачке – северни и јужни пол).

Пример 5. Дејство које је ефективно, није слободно и нема фиксних тачака

Посматрајмо многострукост $M = S^1 \times S^2$ са координатама (t, θ, h) , при чему је t координата на S^1 , а (θ, h) цилиндричне координате на сфери S^2 . Нека је задато дејство Лијеве групе S^1 на M са

$$s * (t, \theta, h) = (t + 2s, \theta + s, h).$$

Другим речима, дејство истовремено ротира круг (двоструком брзином) и сферу око њене осе. Овако дефинисано дејство нема фиксних тачака, јер за s које није умножак од π пресликавање φ_s помера координату t , а за $s = \pi$ оно помера координату θ сваке тачке која није пол. Јасно, дејство је и ефективно. Ипак, оно није слободно јер све тачке са $h = \pm 1$ имају нетривијалан стабилизатор $\{0, \pi\} \cong \mathbb{Z}_2$.

Посматрајмо дејство произвољне Лијеве групе G на многострукости M . Испоставља се да елементи одговарајуће Лијеве алгебре имају велик значај у анализи самог дејства. Раније смо видели да свако $X \in \mathfrak{g}$ индукује једнопараметарску подгрупу од G , а самим тим описује кретање тачке p многострукости M дуж орбите $\{\exp(tX) * p \mid t \in \mathbb{R}\}$. Ову везу између алгебарске структуре групе G и многострукости M на којој она дејствује формализујемо дефиницијом 8.

Дефиниција 8. Нека је G Лијева група која дејствује на многострукости M и нека је $X \in \mathfrak{g}$. *Инфинитезимални генератор дејства* је векторско поље $X^\#$ на M дефинисано са

$$X^\#(p) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) * p,$$

за $p \in M$.

Другим речима, $X^\#(p)$ је брзина кретања тачке p многострукости M дуж орбите $\{\exp(tX) * p \mid t \in \mathbb{R}\}$ у $t = 0$. Појам инфинитезималног генератора ће бити веома значајан у остатку рада, из разлога што нам омогућава да дејства анализирамо помоћу векторских поља и, последично, одговарајућих токова и орбита. Како је сваки вектор $X^\#(p)$ по дефиницији тангентни вектор на криву $t \mapsto \exp(tX) * p$ која

цела лежи у орбити тачке p , јасно је да он припада тангентном простору на орбиту, односно $T_p\mathcal{O}$. Следеће тврђење показује да они заправо разапињу тангентни простор на орбиту и, у одређеном случају, чине његову базу.

Тврђење 3. Нека торус $\mathbb{T}^n$ дејствује на многострукости M , при чему је $\dim M \geq n$, нека је $p \in M$ и нека је $\mathcal{O}$ орбита тачке p . Тада је пресликавање

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &\longrightarrow T_p\mathcal{O} \\ X &\longmapsto X^\#(p)\end{aligned}$$

линеарно и сурјективно, а његово језгро је Лијева алгебра стабилизатора $(\mathbb{T}^n)_p$. Специјално, инфинитезимални генератори $X_1^\#(p), \dots, X_n^\#(p)$ који одговарају бази $X_1, \dots, X_n$ простора $\mathbb{R}^n$, разапињу простор $T_p\mathcal{O}$, и чине базу овог простора ако и само ако је $\dim \mathcal{O} = n$.

Доказ. Пресликавање $X \mapsto X^\#(p)$ је линеарно, што се види директно из дефиниције инфинитезималног генератора. Посматрајмо даље пресликавање $\alpha_p: \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathcal{O}$, дефинисано са $\alpha_p(t) = t * p$. Пресликавање α_p је сурјективно по дефиницији орбите и можемо приметити да важи $(d\alpha_p)_e(X) = X^\#(p)$. Како је $\mathbb{T}^n$ компактна група, орбита $\mathcal{O}$ је подмногострукост од M , дифеоморфна количнику $\mathbb{T}^n / (\mathbb{T}^n)_p$, при чему је одговарајући дифеоморфизам $\bar{\alpha}_p$ индукован пресликавањем α_p . Дакле, важи $\alpha_p = \bar{\alpha}_p \circ q$, при чему је $q: \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n / (\mathbb{T}^n)_p$ количничка пројекција, па је

$$(d\alpha_p)_e = (d\bar{\alpha}_p)_{[e]} \circ (dq)_e.$$

Како је $(d\bar{\alpha}_p)_{[e]}$ изоморфизам, а q субмерзија, одавде закључујемо да је $(d\alpha_p)_e$ сурјективно и да је $\ker(d\alpha_p)_e = \ker(dq)_e = T_e(\mathbb{T}^n)_p$, то јест Лијева алгебра стабилизатора тачке p — што је и очекивано, јер је $X^\#(p) = 0$ тачно онда када једнопараметарска подгрупа $\exp(tX)$ фиксира тачку p . Коначно, ако је $X_1, \dots, X_n$ база простора $\mathbb{R}^n$, њихове слике разапињу слику посматраног пресликавања, то јест вектори $X_1^\#(p), \dots, X_n^\#(p)$ разапињу цео простор $T_p\mathcal{O}$. Како је посматрано пресликавање сурјективно, ови вектори су линеарно независни ако и само ако је оно и инјективно, а то је тачно онда када је $\dim T_p\mathcal{O} = n$, то јест када је $\mathcal{O}$ орбита димензије n . $\square$

Напомена 1. Из претходног тврђења непосредно следи $\dim \mathcal{O} = n - \dim (\mathbb{T}^n)_p$, па је димензија орбите мања што је димензија стабилизатора већа. Специјално, када је p фиксна тачка дејства, сви инфинитезимални генератори се анулирају у p и орбита је само једна тачка. Управо ову појаву ћемо касније, у глави 2, читати из моментног политоп — димензија орбите биће једнака димензији стране политоп која садржи слику тачке при моментном пресликавању.

Пример 6.

1. Посматрајмо дејство S^1 на самој себи, ротацијама.

$$e^{it} * e^{i\theta} = e^{i(t+\theta)}.$$

Крива $\gamma(t) = e^{it}$ је решење Кошијевог проблема

$$\gamma(0) = 1, \quad \dot{\gamma}(0) = i.$$

Приметимо да је i база Лијеве алгебре $T_1 S^1 = i\mathbb{R}$, те из претходног можемо закључити да важи

$$\exp(t \cdot i) = e^{it}$$

и аналогно, за произвољан елемент $X \in \text{Lie } S^1$

$$\exp(t \cdot X) = e^{tX}.$$

Дакле, инфинитезимални генератор S^1 -дејства налазимо рачунајући

$$X_M(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{it} * p.$$

Приметимо да смо се ограничили на генератор који одговара баш базном вектору, а сви остали ће, очекивано, бити његови скаларни умношци. Вратимо се конкретном примеру и нађимо одговарајући генератор дејства.

$$\begin{aligned} X_M(p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{it} * p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{it} * e^{i\theta} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{i(t+\theta)} = i \cdot \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{i(t+\theta)} \\ &= i \cdot e^{i\theta} = i \cdot p. \end{aligned}$$

Ако на S^1 посматрамо стандардну угаону координату θ , векторско поље које генерише дејство је јасно $\left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_p$.

2. Посматрајмо природно уопштење претходног примера у више димензија, то јест дејство торуса $\mathbb{T}^n$. Конкретно, посматрајмо дејство торуса $\mathbb{T}^2$ на сфери $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ дефинисано на следећи начин:

$$(e^{it_1}, e^{it_2}) * (z_1, z_2) = (e^{it_1} z_1, e^{it_2} z_2).$$

У поларним координатама на S^3 , ово дејство је заправо дефинисано следећим изразом

$$(e^{it_1}, e^{it_2}) * (\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2) = (\rho_1, \theta_1 + t_1, \rho_2, \theta_2 + t_2).$$

Раније смо видели да је $\text{Lie } \mathbb{T}^2 \cong \mathbb{R}^2$, па у овом случају природно посматрамо два инфинитезимална генератора који одговарају базним векторима Лијеве алгебре. Конкретно, рачунамо

$$\begin{aligned} X_1(p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (e^{it}, 1) * p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (e^{it}, 1) * (\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\rho_1, \theta_1 + t, \rho_2, \theta_2) \\ &= (0, 1, 0, 0), \end{aligned}$$

$$\text{то јест } X_1(p) = \left. \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right|_p \text{ и, слично, } X_2(p) = \left. \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right|_p.$$

1.2 Симплектичка и Хамилтонова дејства

Од овог одељка, па до краја рада, фокусираћемо се на специјалан и веома интересантан случај дејстава Лијевих група – дејства на симплектичким многострукостима. Присетимо се за почетак неких добро познатих дефиниција и основних примера. Подразумеваћемо да су све многострукости са којима радимо глатке.

Основни појмови симплектичке геометрије

Дефиниција 9. *Симплектичка форма* на многострукости M је затворена 2-форма која је недегенерисана у свакој тачки многострукости M . *Симплектичка многострукост* је пар (M, ω) који чине многострукост M и симплектичка форма ω на M .

Једноставна чињеница из линеарне алгебре јесте да су све симплектичке многострукости обавезно парне димензије.

Пример 7. Примери симплектичких многострукости

1. Нека је $M = \mathbb{R}^{2n}$ са координатама $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Стандардна симплектичка форма на $\mathbb{R}^{2n}$ је

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k.$$

2. Нека је $M = \mathbb{C}^n$ са координатама $z_1, \dots, z_n$. Форма $\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k$ је симплектичка форма на $\mathbb{C}^n$. Приметимо да је ω_0 управо форма из 1 при идентификацији $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, $z_k = x_k + iy_k$. Често ће бити корисно посматрати поларне уместо стандардних координата на $\mathbb{C}^n$. Управо зато на овом месту наводимо облик симплектичке форме ω_0 у поларним координатама,

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^n \rho_k d\rho_k \wedge d\theta_k,$$

што се може једноставно проверити.

Дефиниција 10. Нека су (M, ω_1) и (M, ω_2) симплектичке многострукости димензије $2n$ и нека је $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ дифеоморфизам. За φ кажемо да је *симплектоморфизам* ако је $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. Групу симплектоморфизама многострукости M ћемо убудуће означавати са $\text{Symp}(M, \omega)$.

Дефиниција 11. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и нека је $S \subset M$ подмногострукост од M . Кажемо да је S *симплектичка подмногострукост* од M ако је $\omega|_S$ симплектичка форма на S . Приметимо да је довољно да је $\omega|_S$ недегенерисана форма.

Дефиниција 12. Скоро комплексна структура на многострукости M је аутоморфизам тангентног раслојења $J : TM \rightarrow TM$ такав да је $J^2 = -\text{id}$.

Дефиниција 13. Скоро комплексна структура J на симплектичкој многострукости (M, ω) је *компатибилна* са ω ако у свим тачкама $p \in M$ важи

$$\omega(u, Ju) > 0 \quad \text{за све } 0 \neq u \in T_p M, \quad \text{као и}$$

$$\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v), \quad \text{за све } u, v \in T_p M.$$

Следећа једноставна лема ће бити од великог значаја у наставку овог поглавља.

Лема 1. Нека је $S \subseteq (M, \omega)$ подмногострукост од M и J скоро комплексна структура на M компатибилна са ω . Ако је S инваријантна у односу на J , онда је S симплектичка подмногострукост.

Доказ. Услов инваријантности подмногострукости S у односу на J заправо значи да у свим тачкама $p \in S$ важи $J(T_p S) = T_p S$. Нека је $p \in S$ фиксирано и за произвољан вектор $0 \neq v \in T_p S$ уочимо $w := Jv \in T_p S$. Како је $\omega(v, w) = \omega(v, Jv) > 0$ због компатибилности J са ω , то је $\omega|_S$ недегенерисана, а самим тим и симплектичка форма на S . $\square$

Сада смо један корак ближе дефиницији која ће бити кључна у развијању теорије која је главна тема овог рада. Но, да бисмо коначно говорили о симплектичким и Хамилтоновим дејствима, потребно нам је још неколико основних појмова.

Дефиниција 14. Векторско поље X на M је *симплектичко* ако је $\iota_X \omega$ затворена форма. Векторско поље X на M је *Хамилтоново* ако је $\iota_X \omega$ не само затворена, већ и тачна форма.

Последица примене Картанове формуле је да ток симплектичког, аа самим тим и Хамилтоновог векторског поља чува симплектичку форму, што видимо једноставно из следећег низа једнакости. За почетак, у околини $t = 0$ важи

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* \omega = \mathcal{L}_X \omega = d(i_X \omega) + i_X d\omega = 0. \quad (*)$$

Посматрајмо сада извод у произвољном тренутку t_0 . Из $\varphi_{t_0+s} = \varphi_{t_0} \circ \varphi_s$ добијамо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \varphi_t^* \omega &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi_{t_0+s}^* \omega = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\varphi_{t_0} \circ \varphi_s)^* \omega \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi_s^* (\varphi_{t_0}^* \omega) \\ &= \varphi_{t_0}^* (\mathcal{L}_X \omega) \\ &= 0, \end{aligned}$$

па је $\varphi_t^* \omega$ константно по t , одакле је $\varphi_t^* \omega = \varphi_0^* \omega = \omega$ за свако t .

Дефиниција 15. *Хамилтонијан*, или *Хамилтонова функција* Хамилтоновог векторског поља X на M је глатка функција $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ таква да важи $\iota_X \omega = -dH$.

Приметимо да је Хамилтонијан векторског поља X јединствен, до на локално константну функцију.

Дефиниција 16. Дејство Лијеве групе G на симплектичкој многострукости (M, ω) је *симплектичко* ако важи $\varphi_g^* \omega = \omega$, за све $g \in G$.

Следећи став нам даје веома оперативну, еквивалентну дефиницију појма симплектичког дејства.

Тврђење 4. Дејство Лијеве групе G на симплектичкој многострукости (M, ω) је симплектичко ако и само ако је инфинитезимални генератор дејства симплектичко векторско поље, за све $X \in \mathfrak{g}$.

Доказ. Доказ следи директно из (*), уз напомену да је ток векторског поља $X^\#$ $\phi_t = \varphi_{\exp(tX)}$, што смо и раније видели. $\square$

Сада бисмо могли наслутити шта се крије иза термина *Хамилтоново дејство*. Природно би било претпоставити да је Хамилтоново оно дејство чији су инфинитезимални генератори Хамилтонова векторска поља. Међутим, у математици – као и у свакодневном животу – интуиција нас неће увек довести до у потпуности исправног закључка. Пре него што разрешимо управо створену недоумицу, искористићемо прилику да уведемо појам који ће бити кључан како за наредну дефиницију, тако и у остатку рада.

Дефиниција 17. Нека Лијева група G дејствује на многострукостима M и N и означимо оба дејства са $*$. За глатко пресликавање $f : M \rightarrow N$ кажемо да је *еквиваријантно* ако за свако $g \in G$ и свако $p \in M$ важи

$$f(g * p) = g * f(p).$$

Специјално, ако је дејство групе G на N тривијално, услов еквиваријантности се своди на то да је f константно дуж орбита дејства на M , то јест да је $f(g * p) = f(p)$ за све g и p и у том случају кажемо и да је f *инваријантно* у односу на дејство.

Дефиниција 18. Нека је $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ дејство Лијеве групе G на симплектичкој многострукости (M, ω) и нека су $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ Лијева алгебра од G и њој дуалан векторски простор, редом. За φ кажемо да је *Хамилтоново* дејство ако постоји пресликавање

$$\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

које задовољава следећа два услова:

1. За свако $X \in \mathfrak{g}$, означимо са μ^X пресликавање $M \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисано са

$$\mu^X(p) := \langle \mu(p), X \rangle.$$

Ако са $X^\#$ означимо инфинитезимални генератор који одговара вектору X , онда важи

$$-d\mu^X = \iota_{X^\#}\omega,$$

то јест μ^X је Хамилтонијан векторског поља $X^\#$.

2. Пресликавање μ је еквиваријантно у односу на дејство φ_g групе G на M и коадјунговано дејство Ad^* Лијеве групе G на $\mathfrak{g}^*$. Прецизније, комутира дијаграм

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi_g} & M \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\text{Ad}_g^*} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

при чему је $\text{Ad}^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ дефинисано са $\langle \text{Ad}_g^* \xi, X \rangle := \langle \xi, \text{Ad}_{g^{-1}} X \rangle$, док је $\text{Ad}_{g^{-1}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ извод пресликавања $C_{g^{-1}} : G \rightarrow G$, $C_{g^{-1}}(h) = g^{-1}hg$.

Четворку (M, ω, G, μ) зовео *Хамилтонов G -простор* а само пресликавање μ *моментно пресликавање*.

Напомена 2. *О вези између интуиције и стварности*

Приметимо да је наша интуитивна дефиниција управо садржана у услову 1 из претходне, формалне дефиниције. Конкретно, за теорију коју развијамо у овом раду и наша наизглед наивна дефиниција ће бити веома оперативна. Нека је $G = \mathbb{T}^n$. Како је у овом случају G Абелова група, адјунговано, а самим тим и коадјунговано дејство је тривијално. Уз то, важи и $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$, као и $\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^n$. Дакле, моментно пресликавање дејства $\mathbb{T}^n$ на (M, ω) је пресликавање

$$\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

такво да за сваки вектор X_i из базе $\mathbb{R}^n$ важи да је μ^{X_i} Хамилтонијан за $X_i^\#$ и да је инваријантно у односу на дејство торуса. Јасно, ако је $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ моментно пресликавање, онда је то и транслација μ за произвољну реалну константу. Обратно,

свака два моментна пресликавања Хамилтоновог дејства турса су иста, до на реалну константу.

Следећа лема нам говори о томе како изгледа рестрикција Хамилтоновог дејства турса на неку Лијеву подгрупу. Потпуно аналогно тврђење важи и у случају произвољне Лијеве групе G .

Лема 2. Нека је дато Хамилтоново дејство турса $\mathbb{T}^n$ на симплектичкој многострукости (M, ω) са моментним пресликавањем $\mu: M \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ и нека је $N \subseteq \mathbb{T}^n$ Лијева подгрупа са Лијевом алгебром $\mathfrak{n}$. Тада је и рестрикција посматраног дејства на N Хамилтоново дејство, са моментним пресликавањем $i^* \circ \mu: M \rightarrow \mathfrak{n}^*$, при чему је $i^*: (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \mathfrak{n}^*$ дуал инклузије Лијевих алгебри $i: \mathfrak{n} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

Доказ. За $X \in \mathbb{R}^n$ означимо са $\mu^X: M \rightarrow \mathbb{R}$ функцију $\mu^X(p) = \langle \mu(p), X \rangle$ и са $X^\#$ одговарајући инфинитезимални генератор, тако да по дефиницији моментног пресликавања важи $-d\mu^X = \iota_{X^\#}\omega$.

Означимо $\psi := i^* \circ \mu$ и нека је $X \in \mathfrak{n}$ произвољно. Како је дејство групе N управо рестрикција дејства турса $\mathbb{T}^n$, инфинитезимални генератор који одговара вектору X у односу на N -дејство поклапа се са $X^\#$. Са друге стране, по дефиницији пресликавања i^* , за свако $p \in M$ важи

$$\psi^X(p) = \langle i^* \mu(p), X \rangle = \langle \mu(p), X \rangle = \mu^X(p),$$

дакле $\psi^X = \mu^X$ као функције на M , па је

$$d\psi^X = d\mu^X = -\iota_{X^\#}\omega.$$

Дакле, ψ задовољава услов из дефиниције моментног пресликавања за дејство групе N . Како је N абелова, коадјунговано дејство је тривијално, па се услов еквиваријантности своди на то да је ψ константно дуж N -орбита, а што следи из чињенице да је μ константно дуж $\mathbb{T}^n$ -орбита. $\square$

Суштина је, дакле, врло једноставна – рестрикцијом дејства не мењамо векторска поља која га генеришу, већ само сужавамо скуп вектора X за које их посматрамо, па је довољно и моментно пресликавање сузити на дуал одговарајућег потпростора.

1.2.1 Примери

Пример 8. Нека је $M = (\mathbb{C}^2, \frac{i}{2}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2))$ и посматрајмо дејство Лијеве групе $\mathbb{T}^2$ дефинисано са

$$(e^{it_1}, e^{it_2}) * (z_1, z_2) = (e^{it_1} \cdot z_1, e^{it_2} \cdot z_2).$$

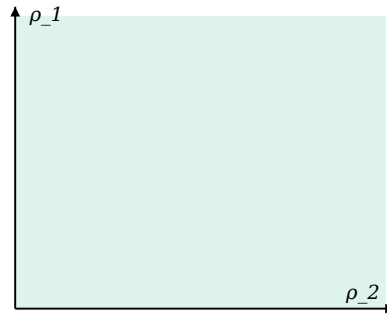
Дакле, свако φ_t је ротација за угао t . Овако дефинисано дејство је Хамилтоново са моментним пресликавањем

$$\mu(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(|z_1|^2, |z_2|^2)$$

Да бисмо се уверили у претходно, уведемо поларне координате на $\mathbb{C}^2$. У поларним координатама, симплектичка форма је $\omega = \rho_1 d\rho_1 \wedge d\theta_1 + \rho_2 d\rho_2 \wedge d\theta_2$, док је претходно дефинисано дејство

$$(e^{it_1}, e^{it_2}) * (\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2) = (\rho_1, \theta_1 + t_1, \rho_2, \theta_2 + t_2).$$

Векторска поља која генеришу ово дејство су $X_1^\# = \frac{\partial}{\partial \theta_1}$ и $X_2^\# = \frac{\partial}{\partial \theta_2}$. Директним рачуном добијамо $\iota_{X_1^\#} \omega = -\rho_1 d\rho_1$, као и $\iota_{X_2^\#} \omega = -\rho_2 d\rho_2$. Приметимо да је слика од $\mathbb{C}^2$ при μ цео први квадрант.

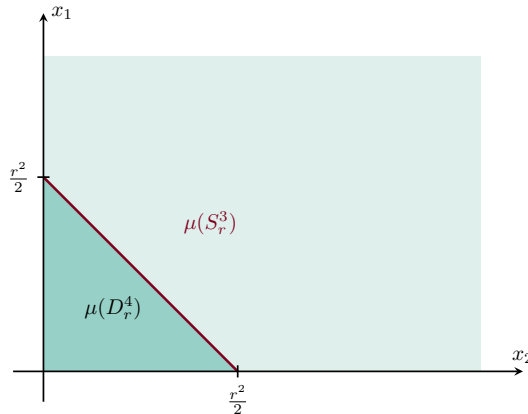


Слика 1.1 Моментна слика $\mathbb{C}^2$

Унутар ове моментне слике лако можемо препознати слике дискова. Наиме, за $r > 0$ је

$$\mu(D_r^4) = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq \frac{r^2}{2} \right\},$$

ако са $D_r^4 = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 \leq r^2\}$ означимо затворен диск полупречника r . Моментна слика диска је, дакле, правоугли троугао са катетама дужине $\frac{r^2}{2}$, а хипотенуза је моментна слика граничне сфере S_r^3 . Специјално, јединичном диску одговара троугао са катетама $\frac{1}{2}$. Овај пример ће бити нарочито важан у наставку рада, у глави 4.



Слика 1.2 Моментна слика диска D_r^4 унутар $\mathbb{C}^2$.

Пример 9. Претходни пример се може уопштити на $M = (\mathbb{C}^n, \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz_k \wedge \bar{d}z_k)$ са дејством торуса димензије n које је задато на следећи начин

$$(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) * (z_1, \dots, z_n) = (e^{i\theta_1} \cdot z_1, \dots, e^{i\theta_n} \cdot z_n).$$

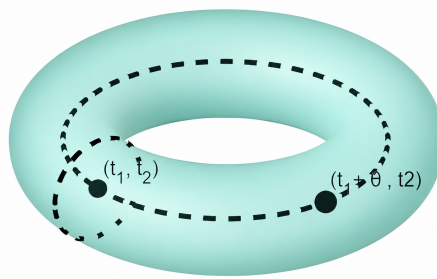
Аналогно као у примеру 8, директним рачуном се проверава да је овако дефинисано дејство $\mathbb{T}^n$ на $\mathbb{C}^n$ Хамилтоново, са моментним пресликавањем

$$\mu(z_1, \dots, z_n) = (|z_1|^2, \dots, |z_n|^2).$$

Пример 10. Дејство које није Хамилтоново

Нека је дејство S^1 на $(\mathbb{T}^2, dt_1 \wedge dt_2)$ дефинисано са

$$\theta * (t_1, t_2) = (t_1 + \theta, t_2)$$



Слика 1.3 Дејство S^1 на $\mathbb{T}^2$ ротацијом на првој координати

Векторско поље које генерише ово дејство је $X = \frac{\partial}{\partial t_1}$, те даље добијамо $\iota_X \omega = dt_2$, што јесте затворена форма, али није тачна. Дакле, посматрано дејство је пример симплектичког дејства које није Хамилтоново.

1.3 Симплектичке торусне многострукости

У наставку рада фокусираћемо се на специјалан случај свега до сада изложеног, а то су Хамилтонова дејства торуса. Због великог значаја и лепоте теорије која произилази из анализе ових дејстава, посветићемо им један посебан одељак на чијем крају ћемо коначно дефинисати појам симплектичке торусне многострукости.

1.3.1 Хамилтонова дејства торуса

Следећа теорема је један од фундаменталних резултата када је у питању изучавање Хамилтонових дејстава торуса. Теорему су независно, готово истовремено али и доста различитим приступом доказали Атија у [3] и Гиљемин и Стернберг у [21].

Теорема 2. Нека је (M^{2m}, ω) затворена, повезана симплектичка многострукост и $\mathbb{T}^n$ n -димензионални торус. Нека је $\varphi: \mathbb{T}^n \rightarrow \text{Symp}(M, \omega)$ Хамилтоново дејство са моментним пресликавањем $\mu: M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тада је слика моментног пресликавања $\mu(M) \subset \mathbb{R}^n$ конвексан политоп у $\mathbb{R}^n$. Прецизније, скуп фиксних тачака дејства је коначна унија међусобно дисјунктних повезаних симплектичких подмногострукости $C_1, \dots, C_N$, моментно пресликавање је константно на C_j за све j и $\mu(M)$ је конвексни омотач тачака $\eta_j := \mu(C_j) \in \mathbb{R}^n$, то јест важи

$$\mu(M) = \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j \eta_j \mid \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \right\}.$$

Напомена 3. Приметимо да у претходној теореме не постоји никакво ограничење за димензију торуса који дејствује у односу на димензију симплектичке многострукости. Тек увођење претпоставке о ефективности дејства индукује горње ограничење за димензију торуса, што ћемо и видети касније, у тврђењу 6.

Доказ претходне теореме ће пратити излагање које МекДаф и Саламон дају у [31], као и [3]. За почетак, биће нам потребно неколико важних помоћних лема. У свакој од наредних лема, претпостављамо услове из теореме 2.

Лема 3. Постоји скоро-комплексна структура J на M која је компатибилна са ω и која је инваријантна у односу на дејство торуса, то јест важи $d\varphi_t \circ J = J \circ d\varphi_t$, за све $t \in \mathbb{T}^n$ (или, еквивалентно, $\varphi_t^* J = J$ за све $t \in \mathbb{T}^n$).

Доказ. Видети лему А4. □

Приметимо да претходна лема важи и у општијем случају, ако $\mathbb{T}^n$ заменимо произвољном компактном групом.

Лема 4. Нека је $G \subset \mathbb{T}^n$ подгрупа. Тада је скуп фиксних тачака рестрикције дејства G на M , $\text{Fix}(G) = \bigcap_{t \in G} \text{Fix}(\varphi_t)$, симплектичка подмногострукост од M .

Доказ. Видети лему А5. □

Надаље ћемо се фокусирати на Хамилтонијане $\mu^X = \langle \mu, X \rangle$ векторских поља која генеришу дејство. Испоставља се да су то Морс–Ботове функције чије су критичне многострукости парне димензије и парног индекса, што ће у доказу теореме 2 бити од великог значаја.

Лема 5. Функција $\mu^X = \langle \mu, X \rangle: M \rightarrow \mathbb{R}$ је Морс–Ботова функција чије су критичне многострукости парне димензије и парног индекса, за свако $X \in \mathbb{R}^n$. Додатно, скуп критичних тачака функције μ^X , $\text{Crit}(\mu^X) = \bigcap_{t \in T_X} \text{Fix}(\varphi_t)$, је симплектичка подмногострукост, при чему је

$$T_X = (\{s \cdot X + k \mid s \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^n\}) / 2\pi\mathbb{Z}^n$$

затворен подторус генерисан са X .

Доказ. Видети лему А6. □

Пре него што пређемо на сам доказ теореме, навешћемо још једну важну напомену.

Напомена 4. Нека су координатне функције моментног пресликавања $\mu: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ означене са $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Пресликавање μ ћемо назвати *несводљивим* ако су 1-форме $d\mu_1, \dots, d\mu_n$ линеарно независне и *сводљивим* иначе. Ако је μ сводљиво, функција $\mu^X = \sum_{j=1}^n X_j \mu_j$ је константна за неки ненула вектор $X \in \mathbb{R}^n$. Даље, како је $\iota_{X^\#} \omega = -d\mu^X \equiv 0$ и ω недегенерисана форма, то је $X^\# \equiv 0$, то јест једнопараметарска подгрупа генерисана вектором X дејствује тривијално на M и дејство није ефективно. У овом случају, дејство се може редуковати на дејство торуза за 1 мање димензије. Конкретно, постоји дејство

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^{n-1} &\longrightarrow \text{Symp}(M, \omega) \\ t &\longmapsto \varphi'_t, \end{aligned}$$

са моментним пресликавањем $\mu': M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ и матрицом $A \in M_{n-1,n}(\mathbb{Z})$ таквом да важи $\varphi_t = \varphi'_{At}$ и $\mu(p) = A^T \mu'(p)$, за све $p \in M$ и $t \in \mathbb{T}^n$. Дакле, конвексност слике при сводљивом моментном пресликавању μ ће бити последица конвексности $\mu'(M)$.

Пример 11. Размотримо тврђење претходне напомене на конкретном примеру. Посматрајмо дејство торуза $\mathbb{T}^2$ на сфери $(S^2, dh \wedge d\theta)$ дефинисано са

$$(e^{it_1}, e^{it_2}) * (h, \theta) = (h, \theta + (t_1 - t_2)).$$

Одмах можемо приметити да је у овом случају дејство дијагоналне подгрупе торуза тривијално. Векторска поља која генеришу ово дејство су $X_1 = \frac{\partial}{\partial \theta}$ и $X_2 = -\frac{\partial}{\partial \theta}$, па је одговарајуће моментно пресликавање $\mu = (h, -h)$. Приметимо да је $\mu(M)$ дуж од тачке $(-1, 1)$ до тачке $(1, -1)$ и као таква није прави дводимензионални политоп. Како ово дејство редукујемо до ефективног дејства, то јест дејства чије је моментно пресликавање несводљиво?

Желимо да нађемо целобројну матрицу $A \in M_{1,2}(\mathbb{Z})$ и S^1 -дејство са моментним пресликавањем μ' таквим да је $\mu = A^T \mu'$. У овом конкретном случају, ефективно је дејство круга $S^1 \cong \mathbb{T}^2 / \{(t, t) \mid t \in S^1\}$. Тражена матрица је $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{1,2}(\mathbb{Z})$, а одговарајуће дејство је управо оно описано у примеру 12. У свему претходно наведеном лежи мотивација иза тога што ћемо се у остатку рада бавити искључиво анализирањем различитих ефективних дејстава торуза.

У наставку ћемо изложити скицу доказа теореме 2, уз једну помоћну лему. Изостављени детаљи се могу наћи у [31].

Лема 6. Под претпоставкама теореме 2, скуп нивоа $\mu^{-1}(\eta)$ је повезан за сваку регуларну вредност $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Доказ. Видети лему А7. □

Доказ теореме 2. Коначно можемо прећи на доказ конвексности скупа $\mu(M)$, који ћемо извести индукцијом, по димензији турса. У случају $n = 1$, конвексност је последица чињенице да је $\mu(M)$ повезан скуп. Претпоставимо сада да смо теорему доказали у случају дејства турса димензије $n - 1$. Додатно, можемо претпоставити да је моментно пресликавање дејства n -димензионалног турса које посматрамо несводљиво (у супротном, тврђење теореме следи директно из индуктивне хипотезе). У оквиру доказа леме А7 смо доказали и да је у том случају скуп регуларних вредности пресликавања μ густ у $\mu(M)$. Изаберимо целобројну матрицу $A \in M_{n,n-1}(\mathbb{Z})$ која дефинише инјективно линеарно пресликавање и посматрајмо дејство турса за један мање димензије, дефинисано на следећи начин:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^{n-1} &\longrightarrow \text{Symp}(M, \omega) \\ t &\longmapsto \varphi_{At}, \end{aligned}$$

са моментним пресликавањем $\mu_A = A^T \mu : M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$. Ово дејство је такође ефективно и скуп регуларних вредности пресликавања μ_A је густ у $\mu_A(M)$. Даље, према леми А7, скуп $\mu_A^{-1}(\eta)$ је повезан за сваку регуларну вредност η пресликавања μ_A . Приметимо да скуп нивоа $\mu_A^{-1}(\eta)$ можемо видети као скуп

$$\mu_A^{-1}(\eta) = \{p \in M \mid \mu(p) - \mu(p_0) \in \ker A^T\},$$

за произвољну тачку p_0 т.д. $A^T \mu(p_0) = \eta$. Како је $\ker A^T$ једнодимензионално, ако је $\eta = A^T \mu(p_0)$ регуларна вредност и $\mu(p_1) - \mu(p_0) \in \ker A^T$, онда и свака конвексна комбинација тачака $\mu(p_0)$ и $\mu(p_1)$ припада $\mu(M)$. Прецизније,

$$(1 - t) \cdot \mu(p_0) + t \cdot \mu(p_1) \in \mu(M),$$

за $0 \leq t \leq 1$. Одавде изводимо следећи закључак: сваке две тачке $p_0, p_1 \in M$ се могу произвољно добро апроксимирати тачкама p'_0 и p'_1 таквим да $\mu(p'_1) - \mu(p'_0) \in \ker A^T$, за неку целобројну матрицу $A \in M_{n,n-1}(\mathbb{Z})$ која дефинише инјективно линеарно пресликавање. Можемо претпоставити и да је управо $\eta = A^T \mu(p'_1)$ регуларна вредност од μ_A , па према претходном знамо да је свака конвексна комбинација тачака $\mu(p'_0)$ и $\mu(p'_1)$ такође у слици од $\mu(M)$. Пуштањем лимеса $p'_0 \rightarrow p_0$ и $p'_1 \rightarrow p_1$ коначно добијамо да је скуп $\mu(M)$ конвексан.

Прелазимо на следећи, а уједно и последњи део овог доказа. Према леми 4, скуп фиксних тачака дејства, у ознаци C , је коначна унија повезаних симплектичких подмногострукости $C_1, \dots, C_N$. Како је $C_j \subset \text{Crit}(\mu^X)$ за све j и свако $X \in \mathbb{R}^n$, то је моментно пресликавање μ константно на сваком C_j . Дакле, за свако j , $\eta_j := \mu(C_j) \in \mathbb{R}^n$ је једна тачка. Из аргумената раније коришћених у доказу закључујемо да је и конвексни омотач тачака η_j садржан у слици од μ . Обратно, нека је $\eta \in \mathbb{R}^n$

тачка која није у конвексном омотачу тачака η_j и изаберимо $X \in \mathbb{R}^n$ са линеарно независним координатама над $\mathbb{Q}$ тако да за све j важи

$$\langle \eta_j, X \rangle < \langle \eta, X \rangle.$$

Подторус генерисан са X је заправо цео торус $\mathbb{T}^n$, па је свака фиксна тачка дејства тог подторуса фиксна и за цео $\mathbb{T}^n$. Из леме 5 даље закључујемо да функција $\mu^X = \langle \mu, X \rangle$ достиже максимум на неком од скупова C_j . Дакле,

$$\sup_{p \in M} \langle \mu(p), X \rangle < \langle \eta, X \rangle,$$

то јест $\eta \notin \mu(M)$. Овим смо доказали да је $\mu(M)$ конвексни омотач тачака η_j , што у потпуности завршава доказ теореме. $\square$

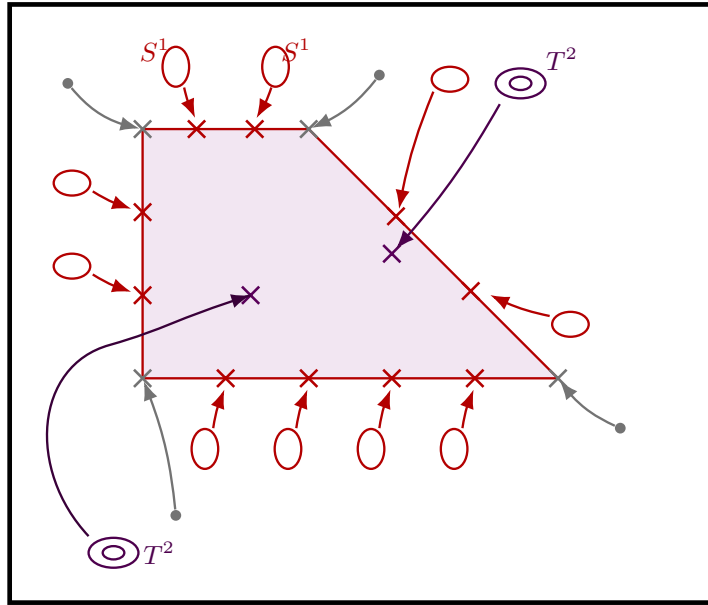
Приметимо да смо у оквиру теореме 2 доказали да су инверзне слике темена политопа управо фиксне тачке дејства. Испоставља се да важи и више од тога – инверзна слика сваке тачке $x \in \mu(M)$ је заправо једна $\mathbb{T}^m$ -орбита. Прецизније, важи следећа лема, чији се доказ може наћи у [14] и користи сличне идеје као и доказ теореме 2.

Лема 7. Нека је (M, ω) затворена, повезана, симплектичка многострукост димензије $2n$ и μ моментно пресликавање ефективног Хамилтоновог $\mathbb{T}^n$ – дејства. Тада важи:

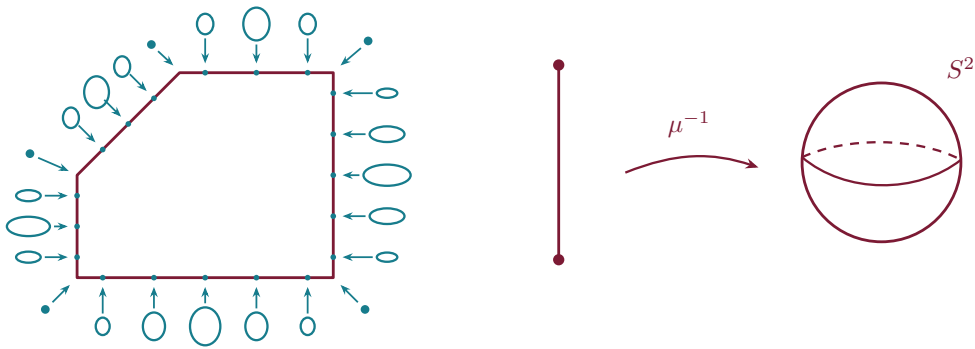
1. μ је количничко пресликавање дејства торуса
2. За свако $x \in \mu(M)$, $\mu^{-1}\{x\}$ је торус димензије једнаке димензији стране политопа којој припада x .

Претходна лема нам омогућава да у случају ефективног Хамилтоновог дејства торуса, тачке конвексног политопа не посматрамо просто као тачке, већ као објекте који у себи носе информацију о стратификацији многострукости до које природно долази при посматраном дејству. Прецизније, моментну слику заправо можемо сматрати простором орбита, што је илустровано на слици 1.4. Директна последица претходне леме је такође да свако ефективно Хамилтоново дејство торуса $\mathbb{T}^n$ има n – димензионалну орбиту. Испоставља се да исто важи и ако одбацимо претпоставку о томе да је дејство Хамилтоново, што је последица општије теореме која се тиче дејстава компактних група, а чији се доказ може наћи у [15].

Напомена 5. Приметимо да из претходне леме можемо закључити и да је инверзна слика при моментном пресликавању сваке од ивица дводимензионалног политопа заправо сфера S^2 , као што је приказано на слици 1.5.



Слика 1.4 Простор орбита



Слика 1.5 Инверзна слика ивице 2 - политопа

О суштинском значају теореме 2 за теорију којом се овде бавимо сведочи велики број последица које умногоме додатно олакшавају успостављање везе између саме многострукости и њене моментне слике.

Тврђење 5. Под претпоставкама теореме 2, свако ефективно дејство торуса $\mathbb{T}^n$ има барем $n + 1$ фиксну тачку.

Доказ. Као што смо већ видели, свако ефективно дејство торуса има n -димензионалну орбиту. Нека је p произвољна тачка овакве орбите. Према леми 7, тачка $\mu(p)$ припада страни политопа димензије n , а знамо да је $\mu(M)$ конвексан политоп у $\mathbb{R}^n$. Овим смо показали да је $\mu(M)$ недегенерисан политоп, а самим тим мора имати

бар $n + 1$ теме. Према теореме 2, темена политопа $\mu(M)$ су управо слике фиксних тачака и то завршава доказ. $\square$

Тврђење 6. Нека је $(M, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ Хамилтонов $\mathbb{T}^n$ -простор. Ако је дејство ефективно, онда је $\dim M \geq 2n$.

Доказ. Како је моментно пресликавање константно на свакој орбити $\mathcal{O}$, то је

$$d\mu_p : T_p M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

пресликавање које слика $T_p \mathcal{O}$ у 0. Дакле, $T_p \mathcal{O} \subseteq \ker d\mu_p$. Додатно, приметимо да важи $\ker d\mu_p = (T_p \mathcal{O})^\omega$:

$$\begin{aligned} v \in \ker d\mu_p &\iff d\mu_p^X(v) = 0, \quad \text{за све } X \in \mathbb{R}^n \\ &\iff \omega_p(X^\#(p), v) = 0, \quad \text{за све } X \in \mathbb{R}^n \\ &\iff \omega_p(u, v) = 0, \quad \text{за све } u \in T_p \mathcal{O} \\ &\iff v \in (T_p \mathcal{O})^\omega. \end{aligned}$$

Овим смо доказали и да су орбите Хамилтоновог дејства турса изотропне подмногострукости од M и самим тим, важи $\dim \mathcal{O} \leq \frac{1}{2} \dim M$ за произвољну орбиту. Како је посматрано дејство још и ефективно, то постоји n -димензионална орбита и из претходно доказаног следи $2n \leq \dim M$. $\square$

Дефиниција 19. Симплектичка торусна многострукост је затворена, повезана симплектичка многострукост (M, ω) са ефективним, Хамилтоновим дејством турса чија је димензија једнака половини димензије многострукости M .

Пар речи о интеграбилним системима

Нека је са X_H означено Хамилтоново векторско поље на симплектичкој многострукости (M, ω) чији је Хамилтонијан глатка функција H . Тројку (M, ω, H) називамо *Хамилтоновим системом*.

Дефиниција 20. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и нека су $f, g \in C^\infty(M)$ глатке функције, са одговарајућим Хамилтоновим векторским пољима X_f и X_g . *Пواسонова заграда* функција f и g је функција

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g) \in C^\infty(M).$$

Тројку (M, ω, H) називамо *Хамилтоновим системом*. Приметимо да важи $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = df(X_g) = X_g(f)$, па је услов $\{f, g\} = 0$ еквивалентан са тим да је f константна дуж интегралних кривих поља X_g . Функцију f са претходним особинама називамо *интегралом кретања* Хамилтоновог система (M, ω, H) .

Нека је (M^{2n}, ω) симплектичка многострукост и $H \in C^\infty(M)$. Хамилтонов систем (M, ω, H) је *потпуно интеграбилан* ако постоји $n = \frac{1}{2} \dim M$ независних интеграла кретања

$$f_1 = H, f_2, \dots, f_n \in C^\infty(M),$$

таквих да важи $\{f_i, f_j\} = 0$ за све i, j . При томе, функције $f_1, \dots, f_n$ су *независне* ако су њихови диференцијали $(df_1)_p, \dots, (df_n)_p$ линеарно независни у свакој тачки p неког отвореног и густог подскупа од M .

Теорема 3. (Арнолд–Лиувил, [2]) Нека је (M, ω, H) интеграбилни систем димензије $2n$ са интегралима кретања $f_1 = H, f_2, \dots, f_n$ и нека је $c \in \mathbb{R}^n$ регуларна вредност пресликавања $f := (f_1, \dots, f_n)$. Означимо $L_c := f^{-1}\{c\}$ и нека је $p \in L_c$. Ако је L_c повезан, компактан скуп, важи следеће:

- (1) $L_c \cong \mathbb{T}^n$;
- (2) Постоји околина $U \subset M$ торуса L_c која је директан производ торуса $\mathbb{T}^n$ и n -димензионалног диска D^n ;
- (3) У околини $L_c \subset U$ постоје координате $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ у којима симплектичка форма има облик

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$$

и f зависи само од $p_1, \dots, p_n$.

Мотивација за увођење поменутих појмова у овом делу рада лежи у томе што симплектичке торусне многострукости на природан начин постају пример потпуно интеграбилних система. Заиста, нека је $(M^{2n}, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ симплектичка торусна многострукост и нека су $\mu_1, \dots, \mu_n$ компоненте моментног пресликавања, то јест $\mu_i = \mu^{e_i}$ за стандардну базу $e_1, \dots, e_n$ Лијеве алгебре $\mathbb{R}^n$. Како је торус комутативна група, одговарајућа фундаментална поља комутирају. Заиста, раније смо видели да је ток инфинитезималног генератора $X^\#$ дат са $\varphi_{\exp(tX)}$, и аналогно за $Y^\#$. Како је дејство $\varphi: \mathbb{T}^n \rightarrow \text{Diff}(M)$ хомоморфизам група, за све $g, h \in \mathbb{T}^n$ важи $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$, па је

$$\varphi_{\exp(tX)} \circ \varphi_{\exp(sY)} = \varphi_{\exp(tX) \exp(sY)}.$$

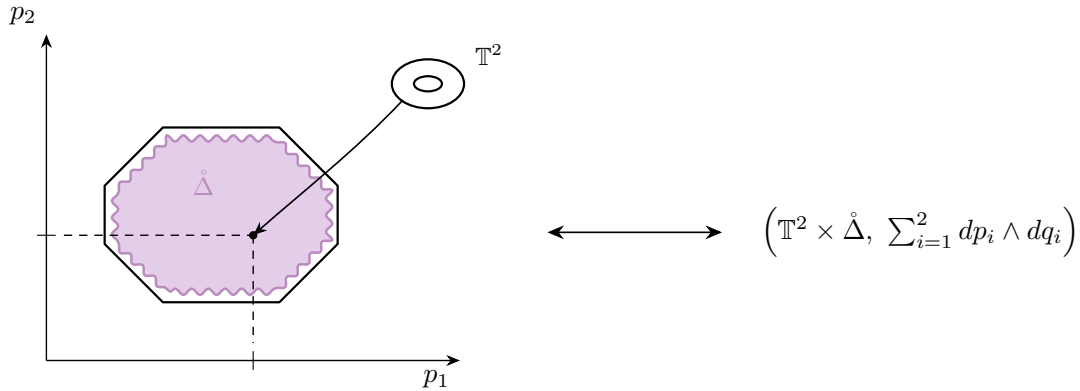
Даље, торус је комутативна група, па је $\exp(tX) \exp(sY) = \exp(sY) \exp(tX)$, одакле следи

$$\varphi_{\exp(tX)} \circ \varphi_{\exp(sY)} = \varphi_{\exp(sY) \exp(tX)} = \varphi_{\exp(sY)} \circ \varphi_{\exp(tX)},$$

за све $t, s \in \mathbb{R}$ и све $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Дакле, токови фундаменталних поља комутирају, а то је еквивалентно са $[X^\#, Y^\#] = 0$ (видети [26]), па је

$$\{\mu_i, \mu_j\} = \omega(X_i^\#, X_j^\#) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

док из ефективности дејства следи да су $d\mu_1, \dots, d\mu_n$ линеарно независни на отвореном и густом скупу тачака са тривијалним стабилизатором (то су управо тачке које се сликају у унутрашњост политопа $\mu(M)$). Дакле, ако изаберемо $H := \mu_1$, систем (M, ω, μ_1) је потпуно интеграбилан, са интегралима кретања $\mu_1, \dots, \mu_n$. Самим тим, можемо применити теорему 3 на (M, ω, μ_1) и на скупу тачака које се сликају у унутрашњост политопа тачно знамо како изгледају многострукост, симплектичка форма и дејство. На пример, свака тачка у унутрашњости 2-политопа има координате p_1 и p_2 у моментној слици (*координате дејства*) и одговара једном торусу са координатама q_1 и q_2 (*угаоне координате*) — видети слику 1.6.



Слика 1.6 Координате дејства и угаоне координате

Напомена 6. На унутрашњости n - димензионалног политопа, дејство је дато са

$$(t_1, \dots, t_n) * (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = (p_1, \dots, p_n, q_1 + t_1, \dots, q_n + t_n),$$

па су одговарајућа векторска поља која генеришу дејство $X_1 = \frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, X_n = \frac{\partial}{\partial q_n}$ и моментно пресликавање је

$$\mu(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = (p_1, \dots, p_n),$$

што је у складу са делом (3) теореме 3.

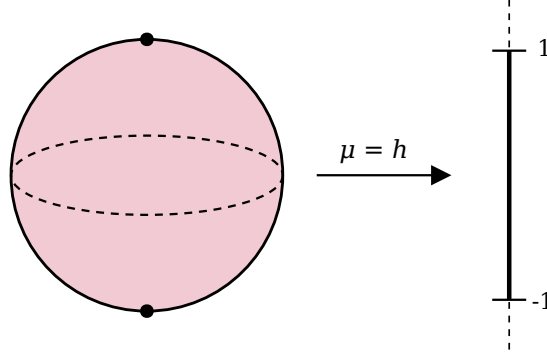
1.3.2 Примери

Пример 12. Посматрајмо S^1 дејство на симплектичкој многострукости $(S^2, \omega = d\theta \wedge dh)$ ротацијом

$$e^{it} * (\theta, h) = (\theta + t, h),$$

при чему су (θ, h) цилиндричне координате и на овај начин је форма ω задата ван полова, али се глатко продужава и на полове. Овако задато дејство је ефективно,

Хамилтоново дејство једнодимензионалног турса (тј. S^1) на симплектичкој многострукости димензије два, са моментним пресликавањем $\mu = h$, односно функцијом висине на сфери, до на константу. Дакле, дводимензионална сфера је симплектичка торусна многострукост и њој одговарајући политоп је затворен интервал $[-1, 1]$.



Слика 1.7 Моментна слика многострукости $(S^2, \omega = d\theta \wedge dh)$

Пример 13. Нека је дејство дводимензионалног турса $\mathbb{T}^2$ на симплектичкој многострукости $(S^2 \times S^2, aw_1 + bw_2)$, при чему је $w_i = \pi_i^* w_{std}$ за $\pi_i : S^2 \times S^2 \rightarrow S^2$ пројекција на i -ту координату за $i = 1, 2$, дефинисано на следећи начин:

$$(e^{it_1}, e^{it_2}) * (h_1, \theta_1, h_2, \theta_2) = (h_1, \theta_1 + t_1, h_2, \theta_2 + t_2).$$

Одговарајућа векторска поља која генеришу дејство су у овом случају $X_1 = \frac{\partial}{\partial \theta_1}$ и $X_2 = \frac{\partial}{\partial \theta_2}$, док је моментно пресликавање

$$\mu(h_1, \theta_1, h_2, \theta_2) = (ah_1, bh_2) + c.$$

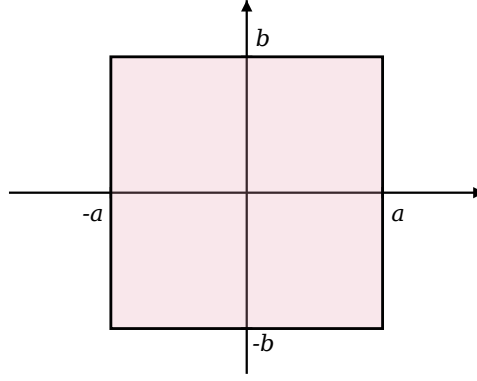
Пример 14. Уколико посматрамо уопштење дејства из претходног примера на производ три сфере, добијамо једноставан пример симплектичке торусне многострукости димензије 6. Заиста, дејство турса $\mathbb{T}^3$ на $(S^2 \times S^2 \times S^2, a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3)$ дефинисано са

$$(e^{it_1}, e^{it_2}, e^{it_3}) * (h_1, \theta_1, h_2, \theta_2, h_3, \theta_3) = (h_1, \theta_1 + t_1, h_2, \theta_2 + t_2, h_3, \theta_3 + t_3)$$

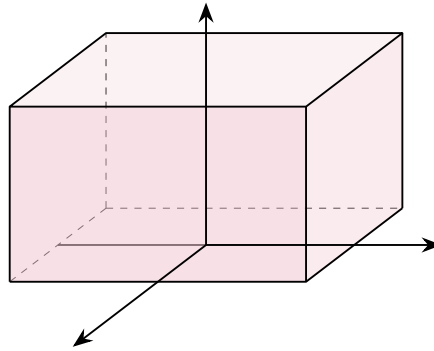
је Хамилтоново, са моментним пресликавањем

$$\mu(h_1, \theta_1, h_2, \theta_2, h_3, \theta_3) = (ah_1, bh_2, ch_3)$$

и моментном сликом илустрованом на слици 1.9.



Слика 1.8 Моментна слика многострукости $(S^2 \times S^2, a\omega_1 + b\omega_2)$, за $c = 0$



Слика 1.9 Моментна слика многострукости $(S^2 \times S^2 \times S^2, a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3)$

Пример 15. Посматрајмо дејство турса $\mathbb{T}^2$ на симплектичкој многострукости $(\mathbb{CP}^2, \omega_{FS})$, при чему је ω_{FS} Фубини–Стади симплектичка форма коју ћемо у наставку конструисали у оквиру Теореме о симплектичкој редукцији у одељку 7, које је дефинисано на следећи начин

$$(e^{it_1}, e^{it_2}) * [z_1 : z_2 : z_3] = [z_1 : e^{it_1} z_2 : e^{it_2} z_3]. \quad (1.1)$$

Докажимо да је ово дејство Хамилтоново, са моментним пресликавањем

$$\mu([z_1 : z_2 : z_3]) = \frac{1}{2} \left(\frac{|z_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2}, \frac{|z_3|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2} \right).$$

Да бисмо ово постигли, кренимо од већ познатог примера дејства турса $\mathbb{T}^3$ на $\mathbb{C}^3$ дефинисаног са

$$(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) * (z_1, z_2, z_3) = (e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_2} z_2, e^{i\theta_3} z_3),$$

које је Хамилтоново, са моментним пресликавањем

$$\tilde{\mu}(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2} (|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2),$$

што смо већ видели раније у примеру 9.

Даље, $\mathbb{CP}^2$ можемо видети као количник S^5/S^1 , при чему посматрамо дијагонално S^1 -дејство

$$e^{is} * (z_1, z_2, z_3) = (e^{is} z_1, e^{is} z_2, e^{is} z_3),$$

што ће поново бити поменуто касније, у одељку 7. Моментно пресликавање овог дејства је

$$\nu(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) - \frac{1}{2},$$

при чему смо константу $-\frac{1}{2}$ изабрали тако да је заиста $S^5 = \nu^{-1}\{0\}$. Означимо са $\iota : S^5 \hookrightarrow \mathbb{C}^3$ инклузију, а са $p : S^5 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ количничку пројекцију и приметимо да важи $p^* \omega_{FS} = \iota^* \omega_0$, што ће такође бити образложено у одељку 7.

Приметимо да дејство торуа $\mathbb{T}^3$ чува сферу S^5 и комутира са S^1 -дејством, па се ово дејство индукује редуковано дејство на количнику $S^5/S^1 \cong \mathbb{CP}^2$, и при томе дијагонална подгрупа дејствује тривијално на $\mathbb{CP}^2$. Дакле, индуковано дејство је заправо дејство групе

$$\mathbb{T}^3 / \{(t, t, t) \mid t \in S^1\} \cong \mathbb{T}^2,$$

које се помоћу изоморфизма $(e^{it_1}, e^{it_2}) \mapsto [(1, e^{it_1}, e^{it_2})]$ своди на дејство (1.1).

Ако са φ_g означимо дејство $\mathbb{T}^2$ на $\mathbb{CP}^2$, а са $\psi_{\hat{g}}$ дејство $\mathbb{T}^3$ на $\mathbb{C}^3$, при чему је $\hat{g} \in \mathbb{T}^3$ подизање од g , приметимо да следећи дијаграм комутира, за свако $g \in \mathbb{T}^2$:

$$\begin{array}{ccc} S^5 & \xrightarrow{\psi_{\hat{g}}|_{S^5}} & S^5 \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{CP}^2 & \xrightarrow{\varphi_g} & \mathbb{CP}^2 \end{array}$$

Покажимо да је добијено редуковано дејство симплектичко:

$$\begin{aligned} p^* (\varphi_g^* \omega_{FS}) &= (\varphi_g \circ p)^* \omega_{FS} = (p \circ \psi_{\hat{g}}|_{S^5})^* \omega_{FS} \\ &= (\psi_{\hat{g}}|_{S^5})^* p^* \omega_{FS} = (\psi_{\hat{g}}|_{S^5})^* \iota^* \omega_0 \\ &= \iota^* (\psi_{\hat{g}}^* \omega_0) = \iota^* \omega_0 = p^* \omega_{FS}, \end{aligned}$$

при чему смо у претпоследњој једнакости искористили да је дејство $\mathbb{T}^3$ на $\mathbb{C}^3$ симплектичко. Како је p сурјективна субмерзија, то је p^* инјективно и коначно, важи $\varphi_g^* \omega_{FS} = \omega_{FS}$, за свако $g \in \mathbb{T}^2$.

Да бисмо доказали да је дејство Хамилтоново, изаберимо $X \in \text{Lie}(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R}^2$ и посматрајмо његово подизање у Лијеву алгебру од $\mathbb{T}^3$, то јест вектор $\hat{X}$ такав да је $(d\pi)_e(\hat{X}) = X$. Како $\mathbb{T}^3$ -дејство чува S^5 , инфинитезимални генератор $\hat{X}^\#$ ће бити векторско поље тангентно на S^5 . Додатно, према дефиницији редукованог дејства важи $p(\exp(t\hat{X}) * z) = \exp(tX) * p(z)$ за све $z \in S^5$, па диференцирањем у $t = 0$ добијамо

$$dp(\hat{X}^\#) = X^\#. \quad (1.2)$$

Сада рачунамо:

$$p^* (\iota_{X\#} \omega_{FS}) = \iota_{\hat{X}\#} (p^* \omega_{FS}) = \iota_{\hat{X}\#} (\iota^* \omega_0) = \iota^* (\iota_{\hat{X}\#} \omega_0) = \iota^* (-d\tilde{\mu}^{\hat{X}}) = -d(\tilde{\mu}^{\hat{X}} \circ \iota). \quad (1.3)$$

Функција $\tilde{\mu}^{\hat{X}} \circ \iota$ је инваријантна у односу на дејство дијагоналне подгрупе, па постоји јединствена глатка функција H_X на $\mathbb{CP}^2$ таква да је $H_X \circ p = \tilde{\mu}^{\hat{X}} \circ \iota$. Заменом у (1.3) добијамо

$$p^* (\iota_{X\#} \omega_{FS}) = -d(H_X \circ p) = p^* (-dH_X)$$

и поново, како је p^* инјективно, закључујемо

$$\iota_{X\#} \omega_{FS} = -dH_X,$$

то јест свако векторско поље $X^\#$ је Хамилтоново са Хамилтоновом функцијом H_X . Наравно, важна ствар коју не смео заборавити јесте да проверимо да ли је придруживање $X \mapsto H_X$ добро дефинисано, то јест да ли зависи од избора подизања $\hat{X}$. Ако је $\hat{X}'$ друго подизање вектора X , односно важи $(d\pi)_e(\hat{X}') = X$, тада је $\hat{X}' - \hat{X} \in \ker(d\pi)_e = \text{span}\{(1, 1, 1)\}$, то јест $\hat{X}' = \hat{X} + s \cdot D$, ако са D означимо вектор $(1, 1, 1)$. Тада је

$$\tilde{\mu}^{\hat{X}'} = \tilde{\mu}^{\hat{X} + sD} = \langle \tilde{\mu}, \hat{X} + sD \rangle = \tilde{\mu}^{\hat{X}} + s \cdot \tilde{\mu}^D.$$

Дакле, довољно је показати да је $\tilde{\mu}^D|_{S^5} = 0$, а што једноставно добијамо директном провером

$$\tilde{\mu}^D(z) = \langle \tilde{\mu}(z), (1, 1, 1) \rangle = \frac{1}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) - \frac{1}{2} = 0, \quad z \in S^5.$$

Коначно, линеарно придруживање $X \mapsto H_X$ дефинише пресликавање $\mu : \mathbb{CP}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ са $\mu^X = H_X$ и $\iota_{X\#} \omega_{FS} = -d\mu^X$, које је инваријантно у односу на $\mathbb{T}^2$ -дејство, па је редуковано дејство $\mathbb{T}^2$ на $(\mathbb{CP}^2, \omega_{FS})$ Хамилтоново. Преостаје још да експлицитно одредимо μ .

Нека је $X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ произвољно и одаберимо подизање $\hat{X} = (0, X_1, X_2)$. Раније смо видели да важи

$$\mu^X \circ p = \tilde{\mu}^{\hat{X}} \circ \iota = \tilde{\mu}^{\hat{X}}|_{S^5}.$$

Како је

$$\tilde{\mu}^{\hat{X}}(z) = \langle \tilde{\mu}(z), (0, X_1, X_2) \rangle = \frac{1}{2} |z_2|^2 \cdot X_1 + \frac{1}{2} |z_3|^2 \cdot X_2$$

и рестрикција на S^5 не утиче на сам облик функције $\tilde{\mu}^{\hat{X}}$, добијамо да важи

$$\tilde{\mu}^{\hat{X}} \circ \iota(z) = \left\langle \frac{1}{2} (|z_2|^2, |z_3|^2), X \right\rangle, \quad z \in S^5.$$

Дакле, важи $\mu^X([z]) = \langle \frac{1}{2} (|z_2|^2, |z_3|^2), X \rangle$ за свако $X \in \mathbb{R}^2$ и самим тим је

$$\mu([z_1 : z_2 : z_3]) = \frac{1}{2} (|z_2|^2, |z_3|^2), \quad z \in S^5,$$

то јест за нормираног представника класе $[z] \in \mathbb{CP}^2$. Да бисмо се решили овог ограничења, за произвољно $z \neq 0$ ћемо посматрати $\frac{z}{\|z\|}$ и моментно пресликавање је тада

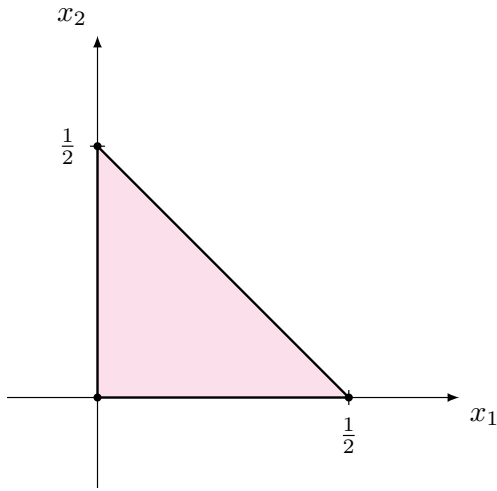
$$\mu([z_1 : z_2 : z_3]) = \frac{1}{2} \left(\frac{|z_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2}, \frac{|z_3|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2} \right),$$

што смо и желели да докажемо.

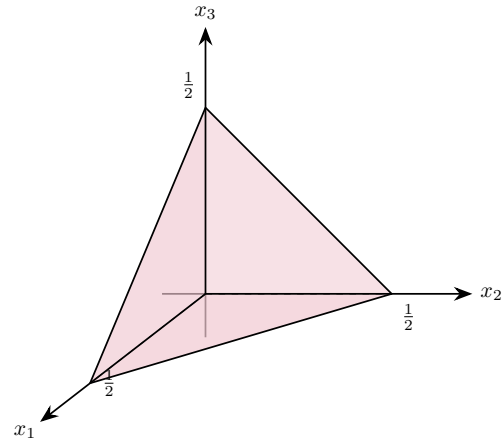
Коначно, ако уведемо ознаке $x_1 := \frac{1}{2}|z_2|^2$ и $x_2 := \frac{1}{2}|z_3|^2$ за нормираног представника класе, добијамо моментну слику

$$\mu(\mathbb{CP}^2) = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2} \right\},$$

што је троугао илустрован на слици 1.10.



Слика 1.10 Моментна слика многострукости $(\mathbb{CP}^2, \omega_{FS})$



Слика 1.11 Моментна слика многострукости $(\mathbb{CP}^3, \omega_{FS})$

Напомена 7. Приметимо да се на готово идентичан начин можемо уверити у то да је $\mathbb{CP}^n$ симплектичка торусна многострукост, за све $n \in \mathbb{N}$. На слици 1.11 је приказана одговарајућа моментна слика за $\mathbb{CP}^3$.

Стандардне околине фиксних тачака и трансформације политопа

Пред сам крај овог поглавља, навешћемо две значајне теореме које описују стандардне околине фиксних тачака, чији се може наћи у [22].

Теорема 4. (Еквиваријантна Дарбуова теорема) Нека је (M, ω) $2n$ -димензионална симплектичка многострукост, снабдевана симплектичким дејством компактне Лије-ве групе G и нека је q фиксна тачка овог дејства. Тада постоји G -инваријантна карта

$(U, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ центрирана у q и G -еквиваријантна у односу на линеарно дејство G на $\mathbb{R}^{2n}$, таква да је

$$\omega|_U = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k.$$

Напомена 8. Линеарно дејство G на $\mathbb{R}^{2n}$ из претходне теореме је заправо дејство добијено посматрањем

$$(d\varphi_g)_q : T_q M \longrightarrow T_q M, \quad \text{за } g \in G.$$

Приметимо да је $(d\varphi_g)_q$ заправо матрица из $GL(T_q M)$ и дејство на $\mathbb{R}^{2n}$ можемо дефинисати са

$$\rho(g) := (d\varphi_g)_q.$$

Додатно, претходна теорема нам такође гарантује да је свако симплектичко дејство локално Хамилтоново.

Теорема 5. Нека је $(M^{2n}, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ симплектичка торусна многострукост и нека је q фиксна тачка дејства торуса $\mathbb{T}^m$. Тада постоји карта $(U, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ центрирана у q и тежине $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{Z}^m$ такве да важи:

$$\omega|_U = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k \tag{1.4}$$

$$\mu|_U = \mu(q) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda^{(k)} (x_k^2 + y_k^2). \tag{1.5}$$

Напомена 9. Теорема 5 нам гарантује постојање Дарбуове околине произвољне фиксне тачке, у којој моментно пресликавање изгледа као моментно пресликавање линеарног дејства на $\mathbb{R}^{2n}$, а што је наравно специјалан случај општијег тврђења које смо видели у леми 8. Додатно, $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}$ су тачно примитивни вектори ивица политопа који испуњавају Делцанов услов, а самим тим и чине базу за $\mathbb{Z}^n$ која се одговарајућом $GL(n, \mathbb{Z})$ трансформацијом може променити у стандардну базу.

Још једна важна последица ове теореме која се тиче Морсових (а не само Морс–Ботових) функција које настају из моментног пресликавања ће бити кључна у глави 3, при рачунању хомологије.

Напомена 10. Претходно поменуте $GL(n, \mathbb{Z})$ су веома значајне и из следећег разлога. Наиме, $GL(n, \mathbb{Z})$ трансформација политопа одговара репараметризацији торуса. Конкретно, нека је $A \in GL(n, \mathbb{Z})$. Приметимо да A^T индукује аутоморфизам торуса $A^T : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, па можемо дефинисати репараметризовано дејство $t *_{Ap} := (A^T t) * p$. Оно је и даље ефективно Хамилтоново дејство на истој многострукости (M, ω) . За $X \in \mathbb{R}^n$, одговарајући генератор дејства је векторско поље $X_A^\# = (A^T X)^\#$, па из

$$d\mu_A^X = -\iota_{X_A^\#} \omega = -\iota_{(A^T X)^\#} \omega = d\mu^{A^T X} = d\langle \mu, A^T X \rangle = d\langle A\mu, X \rangle$$

слиди $\mu_A = A\mu$, а самим тим и $\Delta_A = A(\Delta)$.

Дакле, многострукост и симплектичка форма остају исте, док се мења искључиво параметризација торуза, а моментни политоп се трансформише матрицом A . Стога је Делцанова кореспонденција бијекција на класе политопа, до на $GL(n, \mathbb{Z})$ - трансформације.

Пример 16. Посматрајмо поново дејство $\mathbb{T}^2$ на $(\mathbb{CP}^2, \omega_{FS})$, као у примеру 15, дефинисано са

$$(t_1, t_2) * [z_1 : z_2 : z_3] = [z_1 : t_1 z_2 : t_2 z_3]$$

и одговарајући моментни политоп, као на слици 1.10. Даље, нека је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$$

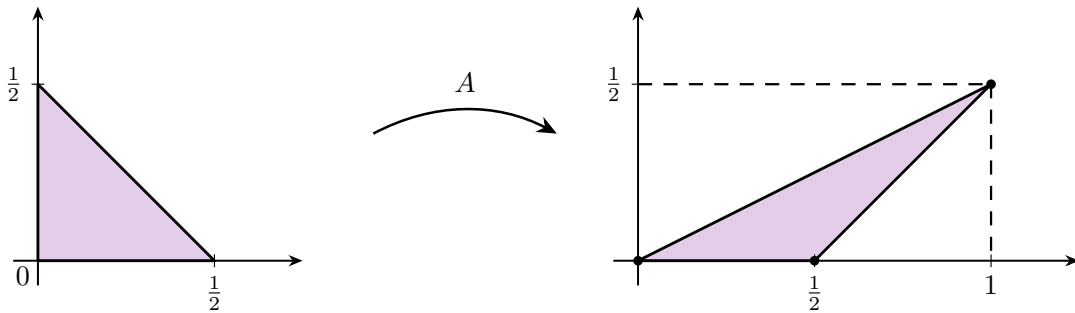
и посматрајмо репараметризовано дејство торуза $\mathbb{T}^2$, као у напмени 10:

$$\begin{aligned} (t_1, t_2) *_A [z_1 : z_2 : z_3] &= (A^T(t_1, t_2)) * [z_1 : z_2 : z_3] = (t_1, 2t_1 + t_2) * [z_1 : z_2 : z_3] \\ &= [z_1 : t_1 z_2 : t_1^2 t_2 z_3], \end{aligned}$$

чије је моментно пресликавање

$$\mu_A([z_1 : z_2 : z_3]) = \frac{1}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2} \left(\frac{1}{2}|z_2|^2 + |z_3|^2, \frac{1}{2}|z_3|^2 \right).$$

Дакле, одговарајућа моментна слика политоп са десне стране на слици 1.12, који можемо добити применом трансформације A на почетни политоп.



Слика 1.12 Трансформација $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ примењена на моментни политоп многострукости $(\mathbb{CP}^2, \omega_{FS})$

Симплектичко одувавање

У овом одељку ћемо укратко описати стандардни поступак симплектичког одувавања са фокусом на импликације овакве конструкције на моментни политоп у случају симплектичких торусних многострукости.

Нека је (M, ω) симплектичка многострукост димензије $2n$ и нека је $p \in M$. Према Дарбуовој теореме, постоји координатна карта $(U, z_1, \dots, z_n)$ центрирана у p у којој симплектичка форма ω изгледа као стандардна симплектичка форма на $\mathbb{C}^n$ и можемо посматрати скуп $B_\varepsilon(p) \subset U$ који у овим координатама одговара отвореној лопти полупречника ε са центром у p . *Одувавање* (енг. *blow-up*) или ε - *одувавање* многострукости M у тачки p је поступак у ком прво из M извадимо $B_\varepsilon(p)$, а затим новонасталу рупу „ушијемо” тако што је посечемо по фибрама Хопфове фибрације

$$S^1 \hookrightarrow S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}.$$

Прецизније, на $M \setminus B_\varepsilon(p)$ дефинишемо релацију еквиваленције са

$$x \sim y \iff x = y, \quad \text{или} \quad x, y \in S_\varepsilon \text{ и } y = e^{i\theta} x \text{ за неко } \theta,$$

при чему је $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon(p) \cong S^{2n-1}$, и одувавање дефинишемо као

$$\widetilde{M} = (M \setminus B_\varepsilon(p)) / \sim.$$

Овако добијена многострукост је поново симплектичка – доказ се може наћи у [31]. Испоставља се да претходно описани поступак има смисла анализирати и у контексту симплектичких торусних многострукости. Нека је Δ Делцанов политоп димензије n и нека је $(M_\Delta, \omega_\Delta, \mathbb{T}^n, \mu_\Delta)$ њему придружена симплектичка торусна многострукост. Даље, нека је q фиксна тачка дејства торуса $\mathbb{T}^n$ на M_Δ . Према еквиваријантној Дарбуовој теореме (теорема 4), постоји $\mathbb{T}^n$ -инваријантна Дарбуова карта центрирана у q у односу на коју је дејство линеарно и која одговара „ћошку” политопа Δ . За довољно мало $\varepsilon > 0$, посматрајмо одувавање многострукости M у односу на ову карту, које ће поново бити симплектичка торусна многострукост. Специјално је интересно питање како изгледа политоп овако добијене многострукости. Наиме, како је слика Дарбуове околине ћошак политопа, то поступак вађења лопте $B_\varepsilon(q)$ из многострукости M у терминима моментне слике одговара „одсецању ћошка”. Ово формализујемо следећом теоремом.

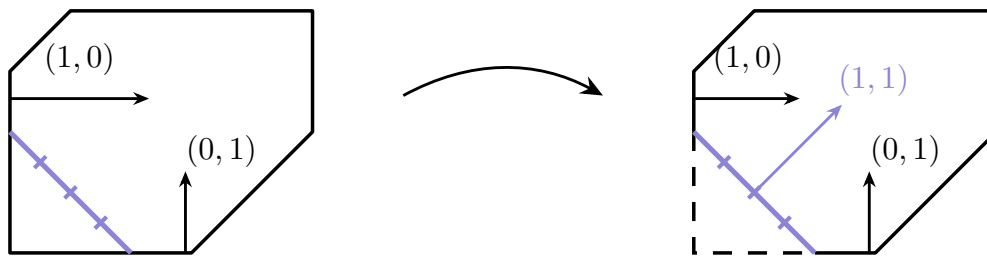
Теорема 6. Нека је q фиксна тачка $\mathbb{T}^n$ -дејства на $(M_\Delta, \omega_\Delta)$ и нека је $p = \mu_\Delta(q)$ одговарајуће теме политопа Δ . Даље, нека су $u_1, \dots, u_n$ примитивни вектори ивица политопа са заједничким теменом p , такви да је свака од n ивица $p + t \cdot u_i$, за $t \geq 0$. Тада је ε -одувавање од $(M_\Delta, \omega_\Delta)$ у фиксној тачки q симплектичка торусна многострукост придружена политопу Δ_ε који од политопа Δ добијамо тако што теме p заменимо са n нових темена

$$p + \varepsilon \cdot u_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

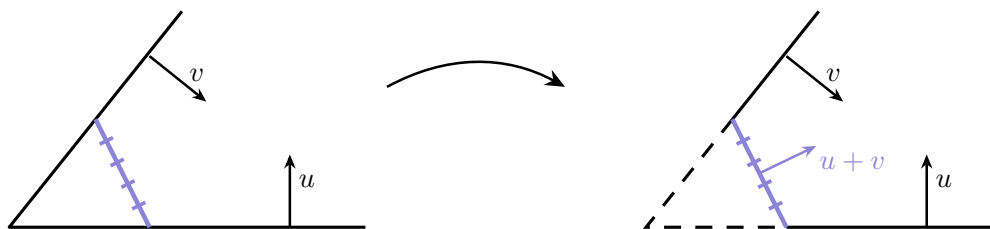
Пример 17.

Приметимо да новој ивици, добијеној одувавањем у стандардном ћошку (видети слику 1.13), одговара вектор нормале $(1, 1) = (0, 1) + (1, 0)$, то јест збир вектора

нормала на странице чија је заједничка тачка теме у ком смо радили одувавање. Како су $GL(n, \mathbb{Z})$ трансформације линеарне, исто ће важити увек, независно од тога у ком темену политопа радимо одувавање.



Слика 1.13 Одувавање у стандардном ћошку



Слика 1.14 Одувавање у произвољном темену политопа

Глава 2

Класификација симплектичких торусних многострукости

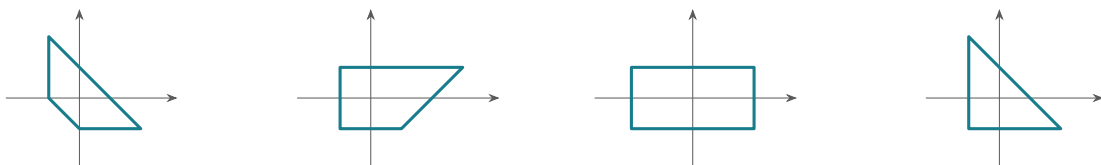
Природно питање које се поставља при размишљању о симплектичким торусним многострукостима дефинисаним у глави 1 јесте њихова класификација. Одговор на ово питање је веома конкретан и дао га је још Делцан у свом раду [14]. Испоставља да овакве многострукости можемо у потпуности класификовати значајно једноставнијим објектима као што су конвексни политопи у $\mathbb{R}^n$.

2.1 Делцанова кореспонденција

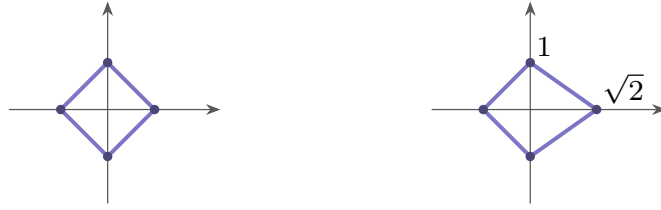
Дефиниција 21. За политоп Δ у $\mathbb{R}^n$ кажемо да је

- *конвексан*, ако је конвексан омотач коначног броја тачака у $\mathbb{R}^n$;
- *прост*, ако је свако теме заједничко за тачно n ивица;
- *рационалан*, ако се све ивице са заједничким теменом p могу представити у облику $p + t \cdot u_i$, за $u_i \in \mathbb{Z}^n$ и $t \geq 0$.
- *гладак*, ако се за свако теме p претходно поменути вектори u_i могу изабрати тако да чине базу од $\mathbb{Z}^n$.

Политоп који задовољава све четири претходно дефинисане особине ћемо звати *Делцановим политопом*. У наставку текста ћемо термин *страна политоп* користити за стране димензије $n - 1$, уколико није другачије наглашено.



Слика 2.1 Примери Делцанових политоп



Слика 2.2 Политопи који нису Делцанови – леви није гладак, док десни није рационалан

Теорема 7. (*Делцанова кореспонденција*, [14]) Постоји бијективна кореспонденција између симплектичких торусних многострукости и Делцанових политопа. Конкретно, бијекцију успоставља управо моментно пресликавање.

Прецизније, реч је о бијекцији између класа симплектичких торусних многострукости, до на еквиваријантан симплектоморфизам, и класа Делцанових политопа, до на $GL(n, \mathbb{Z})$ - трансформације и транслације. У наставку ћемо изложити доказ егзистенције и јединствености кореспонденције из Делцанове теореме. Но, пре тога, одвојићемо мало времена да бисмо се упознали са теоремом која ће бити кључна за разумевање главног доказа – *Теоремом о симплектичкој редукији*.

Симплектичка редукија

Нека је $\omega = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k = \sum_{k=1}^n \rho_k d\rho_k \wedge d\theta_k$ стандардна симплектичка форма на $\mathbb{C}^n$ и посматрајмо дејство Лијеве групе S^1 дефинисано са

$$e^{it} * (\rho_1, \theta_1, \dots, \rho_n, \theta_n) = (\rho_1, \theta_1 + t, \dots, \rho_n, \theta_n + t).$$

Јасно, векторско поље које генерише ово дејство је

$$X^\# = \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial \theta_n},$$

па директном провером можемо закључити да је ово дејство Хамилтоново, са моментним пресликавањем

$$\begin{aligned} \mu: \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \frac{1}{2} (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2) + \text{const.} \end{aligned}$$

Ако одаберемо константу $-\frac{1}{2}$, приметимо да је $\mu^{-1}\{0\} = S^{2n-1}$ заправо јединична сфера. Простор орбита нултог нивоa моментног пресликавања μ је даље

$$\mu^{-1}\{0\}/S^1 = S^{2n-1}/S^1 \cong \mathbb{CP}^{n-1}.$$

Важи и више: претходна конструкција индукује и симплектичку форму на $\mathbb{CP}^{n-1}$, што је специјалан случај следеће, знатно општије теореме.

Теорема 8. Нека је (M, ω, G, μ) Хамилтонов G -простор и G компактна Лијева група. Нека је $i: \mu^{-1}\{0\} \hookrightarrow M$ инклузија и претпоставимо да је дејство групе G на $\mu^{-1}\{0\}$ слободно. Тада важи:

- (1) Простор орбита $\widetilde{M} = \mu^{-1}\{0\}/G$ је многострукост.
- (2) $\pi: \mu^{-1}\{0\} \longrightarrow \widetilde{M}$ је главно G -раслојење.
- (3) Постоји симплектичка форма $\widetilde{\omega}$ на $\widetilde{M}$ која задовољава

$$i^*\omega = \pi^*\widetilde{\omega}.$$

Пар $(\widetilde{M}, \widetilde{\omega})$ називамо *симплектичком редукцијом* многострукости (M, ω) у односу на G и μ .

Специјално, овако добијену симплектичку форму на $\mathbb{CP}^{n-1}$ називамо *Фубини–Станди симплектичком формом* и означавамо са ω_{FS} .

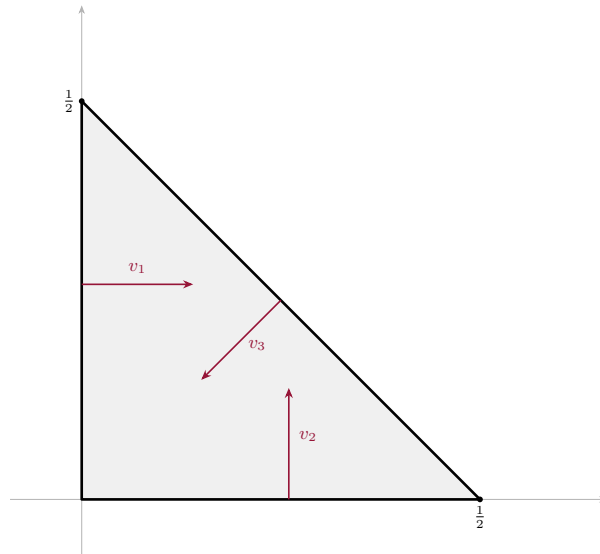
2.1.1 Егзистенција

Прелазимо на доказ егзистенције, односно сурјективности Делцанове кореспонденције. Прецизније, n -димензионалном Делцановом политопу Δ ћемо, користећи симплектичку редукцију, придружити симплектичку торусну многострукост $(M_\Delta, \omega_\Delta, \mathbb{T}^n, \mu_\Delta)$ чија је моментна слика управо Δ .

Нека је Δ Делцанов политоп са d страна и нека су $v_k \in \mathbb{Z}^n$, $k = \overline{1, d}$, примитивни вектори нормала на стране политопа усмерени ка унутра. Нека су $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, d}$, такви да важи

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, v_k \rangle \geq \lambda_k, \ k = \overline{1, d}\}.$$

На пример, политоп приказан на слици 2.3,



Слика 2.3

можемо описати као скуп

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^2)^* \mid \langle x, v_i \rangle \geq \lambda_i, i = 1, 2, 3\},$$

при чему је $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$, док су одговарајући вектори нормала $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ и $v_3 = (-1, -1)$.

Означимо са $e_1, \dots, e_d$ стандардну базу простора $\mathbb{R}^d$, са λ уређену d -торку $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (\mathbb{R}^d)^*$ и посматрајмо линеарно пресликавање $\pi: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n$ које је задато са $e_k \longmapsto v_k$. Приметимо да је пресликавање π сурјективно и слика $\mathbb{Z}^d$ на $\mathbb{Z}^n$. Заиста, како је $\{e_1, \dots, e_d\}$ база од $\mathbb{Z}^d$, то је довољно видети да вектори $\{v_1, \dots, v_d\}$ генеришу $\mathbb{Z}^n$. Ако фиксирамо теме политопа и посматрамо стране $F_{k_1}, \dots, F_{k_n}$ које се у њему секу, можемо приметити да вектори нормала $v_{k_1}, \dots, v_{k_n}$ тих страна чине базу за $\mathbb{Z}^n$, јер је Δ гладак политоп. Стога, скуп $\{v_1, \dots, v_d\}$ заиста генерише $\mathbb{Z}^n$. Према томе, π индукује количничко пресликавање између торуса

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d / 2\pi\mathbb{Z}^d & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{T}^d & \longrightarrow & \mathbb{T}^n \longrightarrow 1, \end{array}$$

које ћемо и даље означавати са π . Даље, нека је $N := \ker \pi$ и нека је $i: N \hookrightarrow \mathbb{T}^d$ инклузија. Како је N затворена подгрупа од $\mathbb{T}^d$, то је N Лијева подгрупа, што је тврђење познате теореме о затвореним подгрупама Лијевих група (теорема 20.12 у [26]). Додатно, N је повезана и компактна $(d - n)$ -димензионална подгрупа торуса, па је и сама торус. Прецизније, важи $N \cong \mathbb{T}^{d-n}$ и означимо Лијеву алгебру од N са $\mathfrak{n}$. Уочимо кратак тачан низ Лијевих група

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} \mathbb{T}^d \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^n \longrightarrow 1,$$

који индукује кратак тачан низ Лијевих алгебри

$$0 \longrightarrow \mathfrak{n} \xrightarrow{(di)_e} \mathbb{R}^d \xrightarrow{(d\pi)_e} \mathbb{R}^n \longrightarrow 0,$$

као и њему дуалан кратак тачан низ

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{(d\pi_e)^*} (\mathbb{R}^d)^* \xrightarrow{(di_e)^*} \mathfrak{n}^* \longrightarrow 0. \quad (2.1)$$

Даље, посматрајмо $(\mathbb{C}^d, \omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^d dz_k \wedge d\bar{z}_k)$, са стандардним Хамилтоновим дејством торуса $\mathbb{T}^d$,

$$(e^{it_1}, \dots, e^{it_d}) * (z_1, \dots, z_d) = (e^{it_1} z_1, \dots, e^{it_d} z_d).$$

Као што смо видели у примеру 9, моментно пресликавање овог дејства је

$$\mu(z_1, \dots, z_d) = \frac{1}{2} (|z_1|^2, \dots, |z_d|^2) + \lambda, \quad (2.2)$$

уз напомену да смо за иначе произвољну константу изабрали управо раније дефинисано λ .

Према лемми 2, рестрикција овог дејства на подгрупу N је такође Хамилтоново дејство, са моментним пресликавањем $(di_e)^* \circ \mu: \mathbb{C}^d \rightarrow \mathfrak{n}^*$, и уочимо његов нулти ниво

$$Z := ((di_e)^* \circ \mu)^{-1} \{0\}.$$

(1) *Скуп Z је компактан подскуп од $\mathbb{C}^d$*

Скуп Z је, јасно, затворен, па је довољно доказати да је и ограничен. У ту сврху, приметимо да важи $\mu(Z) = (d\pi_e)^*(\Delta)$. Заиста, $y \in \mu(Z)$ ако и само ако је $y \in \text{im } \mu$ и $(di_e)^*y = 0$. Даље, ако (2.2) скаларно помножимо базним вектором e_k , добијамо

$$\langle \mu(z), e_k \rangle = \frac{1}{2}|z_k|^2 + \lambda_k, \quad (2.3)$$

одакле закључујемо да је y у слици пресликавања μ ако и само ако је $\langle y, e_k \rangle \geq \lambda_k$, за све $k = \overline{1, d}$. Даље, из тачности низа (2.1) знамо да је $\ker(di_e)^* = \text{im}(d\pi_e)^*$, па је $(di_e)^*y = 0$ ако и само ако постоји $x \in (\mathbb{R}^n)^*$ за које је $y = (d\pi_e)^*x$, па услов $\langle y, e_k \rangle \geq \lambda_k$ постаје

$$\begin{aligned} \langle (d\pi_e)^*x, e_k \rangle \geq \lambda_k &\iff \langle x, (d\pi)_e(e_k) \rangle \geq \lambda_k \\ &\iff \langle x, v_k \rangle \geq \lambda_k \\ &\iff x \in \Delta. \end{aligned}$$

Комбиновањем свега претходног коначно добијамо да је $y \in \mu(Z)$ ако и само ако је $y \in (d\pi_e)^*(\Delta)$, што нам је и био циљ. Како је Δ компактан скуп, то је и $(d\pi_e)^*(\Delta)$ компактан. Даље, приметимо да је μ својствено пресликавање, што је лако доказати, па је и $\mu^{-1}((d\pi_e)^*(\Delta))$ компактан, а самим тим и ограничен скуп. Овим смо доказали да је и $Z \subseteq \mu^{-1}((d\pi_e)^*(\Delta))$ ограничен.

(2) *Група N слободно дејствује на Z*

Изаберимо произвољно теме p политопа Δ и означимо са $I = \{k_1, \dots, k_n\}$ скуп индекса страна које се секу у p . Даље, нека је $z \in Z$ такво да је $\mu(z) = (d\pi_e)^*(p)$. Теме p је описано системом од n једначина $\langle p, v_k \rangle = \lambda_k$, за $k \in I$, па тако за свако $k \in I$ важи

$$\begin{aligned} \langle p, v_k \rangle = \lambda_k &\iff \langle p, (d\pi)_e(e_k) \rangle = \lambda_k \\ &\iff \langle \mu(z), e_k \rangle = \lambda_k \\ &\iff \frac{1}{2}|z_k|^2 + \lambda_k = \lambda_k \\ &\iff z_k = 0. \end{aligned}$$

Дакле, тачке z које се сликају у $(d\pi_e)^*(p)$ имају координате са индексима из I једнаке нули, док су им преостале координате различите од нуле. Без умањења

општости можемо претпоставити да је $I = \{1, \dots, n\}$ и у том случају стабилизатор тачке z при $\mathbb{T}^d$ -дејству је

$$(\mathbb{T}^d)_z = \{(t_1, \dots, t_n, 1, \dots, 1) \in \mathbb{T}^d\}.$$

Како π слика векторе $e_1, \dots, e_n$ редом у векторе $v_1, \dots, v_n$ који чине базу за $\mathbb{Z}^n$, рестрикција $\pi: (\mathbb{T}^d)_z \rightarrow \mathbb{T}^n$ је бијекција. Додатно, како је $N = \ker \pi$, одавде закључујемо да је $N \cap (\mathbb{T}^d)_z = \{1\}$, то јест стабилизатор тачке z при N -дејству је тривијалан. Овим смо тврђење доказали у „најгорем” случају, то јест у случају тачака z које одговарају теменима политопа и чији је стабилизатор највећи. Конкретно, стабилизатор сваке друге тачке $z' \in Z$ је подскуп стабилизатора неког $z \in Z$ које одговара темену политопа. Овим смо доказали да је N -дејство на Z заиста слободно.

(3) $0 \in \mathfrak{n}^*$ је регуларна вредност пресликавања $(di_e)^* \circ \mu$

Нека је $z \in Z$ произвољно. Директним рачуном добијамо да за $w \in \mathbb{C}^d$ важи

$$\langle d\mu_z(w), e_k \rangle = \operatorname{Re}(\bar{z}_k w_k),$$

одакле следи

$$\operatorname{im} d\mu_z = \operatorname{span} \{e_k^* \mid k = \overline{1, d}, z_k \neq 0\}.$$

Даље, како је $d((di_e)^* \circ \mu)_z = (di_e)^* \circ d\mu_z$, то је $\operatorname{im} d((di_e)^* \circ \mu)_z = (di_e)^*(\operatorname{im} d\mu_z)$ и желимо да покажемо да је све то једнако целом $\mathfrak{n}^*$. Дакле, за $\eta \in \mathfrak{n}^*$ желимо да нађемо $\xi \in \operatorname{im} d\mu_z$ такво да је $(di_e)^*\xi = \eta$, што је могуће учинити јер N слободно дејствује на Z , што смо видели у 2.1.1, па је $\mathfrak{n} \cap \operatorname{span} \{e_k \mid k = \overline{1, d}, z_k = 0\} = 0$.

Сада имамо све што нам је неопходно да бисмо ову конструкцију привели крају. Према 2.1.1 и 2.1.1, Z је компактна подмногострукост од $\mathbb{C}^d$, димензије $d+n$. Даље, како N слободно дејствује на Z , из теореме 8 добијамо да је $M_\Delta := Z/N$ компактна многострукост димензије $2n$ са симплектичком формом ω_Δ која задовољава

$$p^*\omega_\Delta = j^*\omega_0,$$

при чему је $p: Z \rightarrow M_\Delta$ количничка пројекција и $j: Z \hookrightarrow \mathbb{C}^d$ инклузија. Додатно, како је Z повезан, то је и M_Δ повезана.

Преостаје још да докажемо да је $(M_\Delta, \omega_\Delta)$ заиста Хамилтонов $\mathbb{T}^n$ -простор са моментним пресликавањем μ_Δ за које важи $\mu_\Delta(M_\Delta) = \Delta$. У ту сврху, нека је $z \in Z$ поново тачка за коју је $\mu(z) = (d\pi_e)^*(p)$, где је p теме политопа Δ , и нека је $\sigma: \mathbb{T}^n \rightarrow (\mathbb{T}^d)_z$ инверз раније посматране бијекције $\pi: (\mathbb{T}^d)_z \rightarrow \mathbb{T}^n$. Специјално, кратак тачан низ

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} \mathbb{T}^d \xrightleftharpoons[\sigma]{\pi} \mathbb{T}^n \rightarrow 1$$

се цепа, па добијамо изоморфизам

$$N \times \mathbb{T}^n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{T}^d.$$

Дејство фактора $\mathbb{T}^n$ – прецизније подгрупе $\sigma(\mathbb{T}^n) \subset \mathbb{T}^d$ – комутира са N -дејством, па индукује одговарајуће дејство на количнику $M_\Delta = Z/N$. Даље, посматрајмо композицију

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \xrightarrow{j} & \mathbb{C}^d & \xrightarrow{\mu} & (\mathbb{R}^d)^* \cong \mathfrak{n}^* \oplus (\mathbb{R}^n)^* & \xrightarrow{(d\sigma_e)^*} & (\mathbb{R}^n)^* \\ \downarrow p & & & & \nearrow \mu_\Delta & & \\ & & M_\Delta & & & & \end{array}$$

при чему је $(d\sigma_e)^*$ заправо само пројекција на другу координату. Како је композиција хоризонталних пресликавања константна дуж N -орбита, то она индукује пресликавање $\mu_\Delta: M_\Delta \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$, такво да је

$$\mu_\Delta \circ p = (d\sigma_e)^* \circ \mu \circ j.$$

На исти начин као у примеру 15 добијамо да је μ_Δ управо моментно пресликавање дејства турса $\mathbb{T}^n$ на $(M_\Delta, \omega_\Delta)$. Коначно, како је $\mu(Z) = (d\pi_e)^*(\Delta)$ и како је, због $\pi \circ \sigma = \text{id}$ и $(d\sigma_e)^* \circ (d\pi_e)^* = ((d\pi)_e \circ (d\sigma)_e)^* = (d(\pi \circ \sigma)_e)^* = \text{id}$, добијамо

$$\mu_\Delta(M_\Delta) = (\mu_\Delta \circ p)(Z) = ((d\sigma_e)^* \circ \mu \circ j)(Z) = ((d\sigma_e)^* \circ (d\pi_e)^*)(\Delta) = \Delta,$$

чиме је доказано да је $(M_\Delta, \omega_\Delta, \mathbb{T}^n, \mu_\Delta)$ заиста тражена симплектичка торусна многострукост, придружена политопу Δ .

2.1.2 Јединственост

Претходно смо доказали део Делцанове теореме који се тиче егзистенције, то јест сурјективности кореспонденције. Преостаје да докажемо и инјективност, што ћемо сада и прецизно формулисати.

Теорема 9. (*Инјективност Делцанове кореспонденције*) Нека су $(M_1, \omega_1, \mathbb{T}^n, \mu_1)$ и $(M_2, \omega_2, \mathbb{T}^n, \mu_2)$ симплектичке торусне многострукости димензије $2n$ које имају исте моментне слике, односно важи $\mu_1(M_1) = \mu_2(M_2)$. Тада постоји $\mathbb{T}^n$ -еквиваријантан симплектоморфизам $\varphi: M_1 \longrightarrow M_2$ који задовољава $\mu_2 \circ \varphi = \mu_1$.

Другим речима, симплектичка торусна многострукост је, до на еквиваријантан симплектоморфизам, одређена само својим моментним политопом. Ми ћемо, пратећи излагање у [14], прво конструисати дифеоморфизам који задовољава тражено, а затим ћемо објаснити како се он може кориговати до симплектоморфизма.

Идеја доказа је следећа: према леми 7, тачке политопу Δ одговарају орбитама дејства чија је димензија једнака најмањој од димензија страна политопу које садрже одговарајућу тачку. Испоставља се да важи и више од тога: над релативно компактним подскупом интериора стране политопу, многострукост, симплектичка форма, дејство и моментно пресликавање су експлицитно одређени моделом који зависи

искључиво од стране политопа. Прекривањем политопа Δ оваквим скуповима, две многострукости са истом моментном сликом можемо идентификовати део по део, а затим ове локалне идентификације можемо „залепити” индуктивно, по димензији стране.

За почетак, наводимо две леме на које ћемо се у потпуности ослонити у реализацији претходно наведене идеје. Доказ обе леме се може наћи у [14]. Подразумевамо да је $(M, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ симплектичка торусна многострукост са моментном сликом Δ .

Лема 8. Нека је F страна политопа Δ димензије i , $K \subset \text{int } F$ отворен конвексан скуп који је релативно компактан у $\text{int } F$ и нека је $B(\varepsilon) \subset \mathbb{C}$ диск полупречника ε са центром у нули. Посматрамо $\mathbb{T}^i \times K \times B(\varepsilon)^{n-i}$ са симплектичком формом

$$\sigma = \sum_{1 \leq j \leq i} d\alpha_j \wedge da_j + \sum_{i+1 \leq k \leq n} dx_k \wedge dy_k,$$

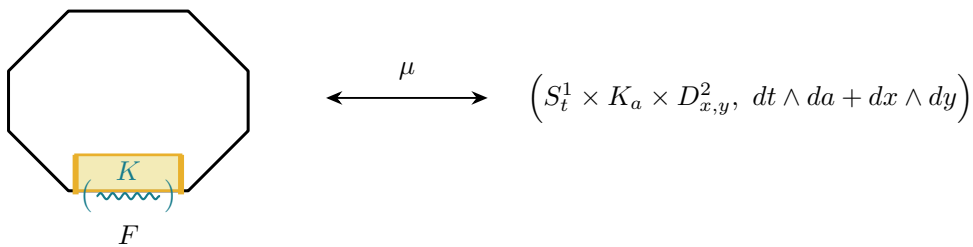
при чему су $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ координате на $\mathbb{T}^i$, $a_1, \dots, a_i$ координате на F и $z_k = x_k + iy_k$ координате на $B(\varepsilon)$. Тада постоји симплектоморфизам између околине скупа $\mu^{-1}(K)$ у M и $\mathbb{T}^i \times K \times B(\varepsilon)^{n-i}$ који $\mathbb{T}^n$ -дејство на M трансформише у облик

$$(\theta_1, \dots, \theta_n) * (\alpha; a; z) = (\alpha_1 + \theta_1, \dots, \alpha_i + \theta_i; a; e^{i\theta_{i+1}} z_{i+1}, \dots, e^{i\theta_n} z_n),$$

са моментним пресликавањем

$$(\alpha; a; z) \longmapsto (a_1, \dots, a_i; \frac{1}{2}|z_{i+1}|^2, \dots, \frac{1}{2}|z_n|^2) + c,$$

за неку константу $c \in (\mathbb{R}^n)^*$.



Слика 2.4 Локални модел у околини скупа $\mu^{-1}(K)$, при чему је $i = 1$, F ивица политопа и K отворен интервал

Лема 9. Означимо са $S(\varepsilon)^{2n-2i-1}$ границу диска $B(\varepsilon)^{n-i}$, уз остале ознаке из претходне леме. Нека је φ дифеоморфизам на $\mathbb{T}^i \times K \times S(\varepsilon)^{2n-2i-1}$ који чува моментно пресликавање и комутира са дејством торуса. Тада се φ може продужити до дифеоморфизма на $\mathbb{T}^i \times K \times B(\varepsilon)^{n-i}$ који задовољава исте две особине.

Пре него што пређемо на сам доказ теореме, навешћемо једну напомену која се тиче тога како координате из леме 8 можемо прочитати из самог политопа Δ .

Напомена 11. Нека је $\Delta \subseteq (\mathbb{R}^n)^*$ политоп описан као и раније,

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, v_k \rangle \geq \lambda_k, \ k = \overline{1, d}\}.$$

Како је Δ прост, страна F димензије i лежи на тачно $n - i$ страна кодимензије 1. Означимо са $\ell_k(x) = \langle x, v_k \rangle - \lambda_k$ функције које се анулирају на k -тој од ових страна; оне су ненегативне на Δ и све се истовремено анулирају тачно на F . У моделу који одговара страни F , координате $a_1, \dots, a_i$ су баш координате дуж F , док су координате на дисковима одређене са $\frac{1}{2}|z_k|^2 = \ell_k(x)$, по једна за сваку страну кодимензије 1 која садржи F . Дакле, $|z_k|$ заправо мери растојање од тачке до одговарајуће стране политопа. Идентификујући на овај начин координате модела са координатама на $(\mathbb{R}^n)^*$, моментна слика модела — која се, према лема 8, поклапа са сликом при μ одговарајуће околине у M — постаје скуп

$$\{x \in \Delta \mid (a_1, \dots, a_i) \in K, \ 0 \leq \ell_k(x) < \frac{1}{2}\varepsilon^2\}.$$

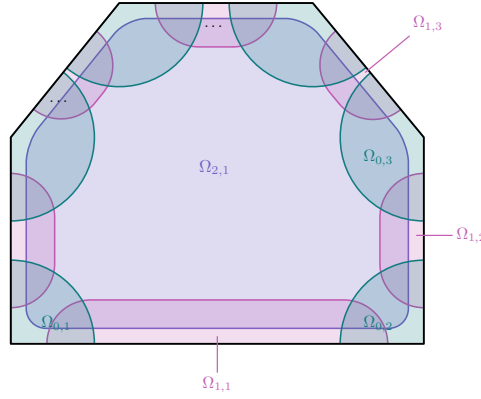
Две последице овакве интерпретације ће се све време користити у доказу. Као прво, гранична сфера $S(\varepsilon)^{2n-2i-1}$ диска из модела је задата са $\sum_k \frac{1}{2}|z_k|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon^2$, па је на њој барем једно ℓ_k строго позитивно, односно моментна слика ове сфере уопште не додирује страну F и лежи на странама димензије веће од i . Додатно, као што смо раније напоменули, овај модел зависи само од i , K и ε — дакле, само од политопа.

Доказ теореме 9. Нека је $\Delta = \mu_1(M_1) = \mu_2(M_2)$ политоп описан на стандардан начин и нека је $\mathcal{F}_i$ скуп страна политопа Δ димензије i , за $0 \leq i \leq n$. Одаберимо отворене скупове $\Omega_{i,j} \subset \Delta$ индексирани по $0 \leq i \leq n$ и по j које одговара страни $F_j \in \mathcal{F}_i$, тако да су испуњени следећи услови.

- (1) Скуп $K_j := \Omega_{i,j} \cap F_j$ је релативно компактан подскуп од $\text{int } F_j$ и над $\Omega_{i,j}$ можемо идентификовати M_1 и M_2 са $\mathbb{T}^i \times K_j \times B(\varepsilon)^{n-i}$, према лема 8.
- (2) $\bigcup_{i,j} \Omega_{i,j} = \Delta$ и $\Omega_{i,j} \cap \Omega_{i,k} = \emptyset$ за $j \neq k$ из $\mathcal{F}_i$.
- (3) $\Omega_{i,j} \cap (\bigcup_{a>i} \bigcup_{b \in \mathcal{F}_a} \Omega_{a,b})$ садржи моментну слику скупа $\mathbb{T}^i \times K_j \times S(\varepsilon)^{2n-2i-1}$.

Овакав избор је заиста могуће направити и то ћемо и доказати, индукцијом по димензији стране политопа. У случају $i = n$, скуп Ω_n можемо одабрати као отворен релативно компактан подскуп од $\text{int } \Delta$, такав да се његов комплемент налази у δ_{n-1} -околини руба политопа $\partial\Delta$, за неко $\delta_{n-1} > 0$.

Даље, претпоставимо да смо одговарајуће скупове изабрали за стране димензије веће од i , као и да њихова унија садржи све тачке политопа Δ које су удаљене за више од δ_i од уније страна димензије највише i . За $F_j \in \mathcal{F}_i$ изаберимо $K_j \subset \text{int } F_j$ који је релативно компактан, затим и $\varepsilon > 0$ такво да је $\frac{1}{2}\varepsilon^2 > \delta_i$, и за $\Omega_{i,j}$ изаберимо околину коју нам даје лема 8.



Слика 2.5 Илустрација покривања 2 - политопа Δ skupovima $\Omega_{i,j}$

Приметимо да овако конструисани скупови задовољавају услове (1)–(3). Заиста, услови (1) и (2) важе по конструкцији, уз бирање довољно малих ε и евентуално увећавање већ конструисаних скупова, како бисмо обезбедили дисјунктност скупова над странама исте димензије. Коначно, услов (3) је такође испуњен јер моментна слика граничне сфере лежи на растојању $\frac{1}{2}\varepsilon^2 > \delta_i$ од стране F_j , према напмени 11, а те тачке смо у конструкцији покрили скуповима који одговарају странама веће димензије.

Након што смо успешно конструисали овакве скупове, можемо прећи на конструкцију дифеоморфизма између M_1 и M_2 . За почетак, фиксирајмо i и j . Према (1), постоје симплектоморфизми

$$\Phi_1: \mu_1^{-1}(\Omega_{i,j}) \longrightarrow \mathbb{T}^i \times K_j \times B(\varepsilon)^{n-i}$$

и

$$\Phi_2: \mu_2^{-1}(\Omega_{i,j}) \longrightarrow \mathbb{T}^i \times K_j \times B(\varepsilon)^{n-i}$$

који су еквиваријантни и трансформишу одговарајућа моментна пресликавања у моментно пресликавање локалног модела. Како је политоп Δ заједнички за многострукости M_1 и M_2 , то је

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1: \mu_1^{-1}(\Omega_{i,j}) \longrightarrow \mu_2^{-1}(\Omega_{i,j})$$

еквиваријантан симплектоморфизам за који важи

$$\mu_2 \circ \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 = \mu_1.$$

Ово је уједно и једино место на ком користимо да M_1 и M_2 имају исту моментну слику. Преостаје још да ову локалну идентификацију унапредимо до глобалне. У ту сврху, дефинишимо скупове

$$U_a := \bigcup_{i \geq a} \bigcup_{F_j \in \mathcal{F}_i} \Omega_{i,j}$$

и приметимо да је $U_n \subset U_{n-1} \subset \dots \subset U_0 = \Delta$, према услову (2). Слично као у претходном делу доказа, индукцијом по a ћемо показати да постоји еквиваријантан дифеоморфизам

$$\varphi_a: \mu_1^{-1}(U_a) \longrightarrow \mu_2^{-1}(U_a),$$

такав да је $\mu_2 \circ \varphi_a = \mu_1$.

За $a = n$, ово је управо малопређашњи локални аргумент, примењен на Ω_n . Даље, претпоставимо да смо конструисали φ_a и нека је $F_j \in \mathcal{F}_{a-1}$. Према услову (3) и индуктивној хипотези, φ_a је већ дефинисано над моментном сликом граничне сфере модела који одговара страни F_j . Нека је

$$\Psi_j := (\Phi_2 \circ \varphi_a \circ \Phi_1^{-1}) \Big|_{\mathbb{T}^{a-1} \times K_j \times S(\varepsilon)^{2n-2a+1}},$$

при чему су Φ_1 и Φ_2 симплектоморфизми из локалне идентификације за пар $(a-1, j)$. Није тешко проверити да је Ψ_j дифеоморфизам скупа $\mathbb{T}^{a-1} \times K_j \times S(\varepsilon)^{2n-2a+1}$ који је еквиваријантан и чува моментно пресликавање. Према леми 9, Ψ_j се може продужити до дифеоморфизма целог модела $\mathbb{T}^{a-1} \times K_j \times B(\varepsilon)^{n-a+1}$, који компоновањем са Φ_2^{-1} и Φ_1 постаје еквиваријантан дифеоморфизам

$$\mu_1^{-1}(\Omega_{a-1,j}) \longrightarrow \mu_2^{-1}(\Omega_{a-1,j})$$

који чува моментно пресликавање и који се слаже са φ_a на заједничкој области дефинисаности.

Понављањем овог поступка за све $F_j \in \mathcal{F}_{a-1}$, уз важну напомену да су сви $\Omega_{a-1,j}$ по паровима дисјунктни по услову (2), па су самим тим и продужења за различита j дефинисана на дисјунктним скуповима, долазимо до добро дефинисаног пресликавања φ_{a-1} на $\mu_1^{-1}(U_{a-1})$, са траженим особинама.

Коначно, за $a = 0$ је $U_0 = \Delta$ и $\varphi := \varphi_0$ је $\mathbb{T}^n$ -еквиваријантан дифеоморфизам између M_1 и M_2 који задовољава $\mu_2 \circ \varphi = \mu_1$. Приметимо да овим нисмо завршили доказ, јер лема 9 даје продужење дифеоморфизма, али не и симплектоморфизма, те за добијено φ не знамо да ли чува симплектичку форму. Да бисмо ову непријатност отклонили, заменићемо φ његовом благом корекцијом.

Конкретно, означимо са $\omega_0 := \varphi^* \omega_2$ симплектичку форму на M_1 и нека је $\omega := \omega_1$, $\mu := \mu_1$. Како је φ еквиваријантно и $\mu_2 \circ \varphi = \mu_1$, то су ω и ω_0 инваријантне форме којима одговара исто моментно пресликавање, па за свако X важи $\iota_{X\#}(\omega - \omega_0) = 0$. Из тога следи да је $\omega - \omega_0 = \mu^* \alpha$, за неку затворену 2-форму α на Δ , што је доказано у [14]. Даље, како је Δ конвексан, а самим тим и контрактибилан, то је α и тачна форма, то јест важи $\alpha = d\gamma$, при чему форму γ можемо изабрати тако да $\mu^* \gamma$ буде инваријантна. Сада можемо посматрати форме $\omega_t := \omega_0 + t \mu^* \alpha$, за $t \in [0, 1]$, које су инваријантне, недегенерисане и имају исте кохомолошке класе, па према Мозеровој теореме постоји изотопија ψ_t многострукости M_1 таква да је $\psi_1^* \omega = \omega_0$ и за коју се може проверити да је еквиваријантна и да чува моментно пресликавање. Стога

пресликавање

$$\Psi := \varphi \circ \psi_1^{-1}: M_1 \longrightarrow M_2$$

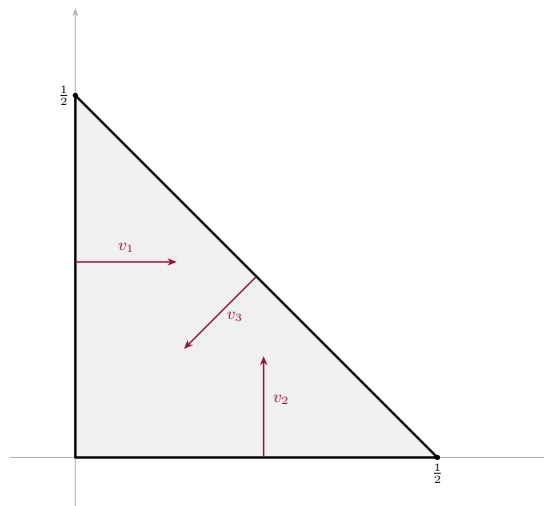
задовољава $\Psi^* \omega_2 = \omega_1$ и $\mu_2 \circ \Psi = \mu_1$, то јест Ψ је еквиваријантан симплектоморфизам, чиме је доказ у потпуности завршен. $\square$

Делцанов оригинални доказ који смо претходно изложили је локалне природе – многострукост реконструишемо део по део из локалних форми придружених странама политопа, а глобални закључак добијамо лепљењем. Приступ заснован на идејама Лермана и Мајнренкена, изложеним у [28] и [32], полази са друге стране – почетни политоп се на одређени начин трансформише у политоп са једном страном мање при чему одговарајућа измена многострукости прати ту редукцију и тиме се доказ тврђења своди на индукцију по броју страна максималне димензије. Овај приступ доказу је корисно разумети јер претходно добијени резултат осветљава из сасвим друге перспективе, а неке од идеја на којима почива ће се и у наставку рада поново појавити, у поглављу о Черновим класама. Доказ егзистенције и јединствености изложен је у додатку Б.

2.2 Примери

У наредна два примера илустроваћемо Делцанову конструкцију на конкретним политопима од којих смо један и раније помињали у глави 1, те за њега већ знамо да је моментна слика одређене торусне многострукости.

Пример 18. Нека је $\Delta \subseteq (\mathbb{R}^2)^*$ политоп на слици 2.6, који смо већ имали прилике да видимо.



Слика 2.6

Политоп Δ можемо описати као скуп

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^2)^* \mid \langle x, v_i \rangle \geq \lambda_i, \ i = 1, 2, 3\},$$

при чему је $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$, што смо такође већ видели у оквиру Делцанове конструкције.

Као и раније у општој конструкцији, посматрајмо пресликавање $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, дефинисано са

$$\begin{aligned} (1, 0, 0) &= e_1 \mapsto v_1 = (1, 0), \\ (0, 1, 0) &= e_2 \mapsto v_2 = (0, 1), \\ (0, 0, 1) &= e_3 \mapsto v_3 = (-1, -1). \end{aligned}$$

Већ смо видели да π индукује сурјективно пресликавање између $\mathbb{T}^3$ и $\mathbb{T}^2$. Нека је $N = \ker \pi$ Лијева подгрупа од $\mathbb{T}^3$. Како у овом конкретном случају изгледа N ? Нека је $x \in \mathbb{R}^3$ такво да је $\pi(x) = 0$,

$$x = ae_1 + be_2 + ce_3,$$

$$\pi(x) = a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c \cdot v_3 = (a - c, b - c).$$

Дакле, видимо да мора бити $a = b = c$, тј. $\ker \pi = \text{span}\{(1, 1, 1)\}$. Одавде директно закључујемо да важи

$$N = \{(t, t, t) \mid t \in S^1\} \cong S^1.$$

Даље, посматрамо кратке тачне низове

$$1 \longrightarrow S^1 \xrightarrow{i} \mathbb{T}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^2 \longrightarrow 1,$$

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}^2)^* \xrightarrow{(d\pi_e)^*} (\mathbb{R}^3)^* \xrightarrow{(di_e)^*} \mathbb{R}^* \longrightarrow 0,$$

као и стандардно Хамилтоново дејство турса $\mathbb{T}^3$ на $(\mathbb{C}^3, \omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^3 dz_k \wedge d\bar{z}_k)$ са моментним пресликавањем

$$\mu(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2}(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2) + \lambda, \quad \lambda = (0, 0, -\frac{1}{2}).$$

Дејство N на $\mathbb{C}^3$ је Хамилтоново, са моментним пресликавањем

$$(di_e)^* \circ \mu: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^*.$$

Преостаје још да размотримо како изгледа скуп $Z = ((di_e)^* \circ \mu)^{-1}\{0\}$. Како је $i(x) = (x, x, x)$, пресликавање $(di_e)^*$ је задато матрицом $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, па је

$$(di_e)^* \circ \mu(z) = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) - \frac{1}{2},$$

одакле закључујемо

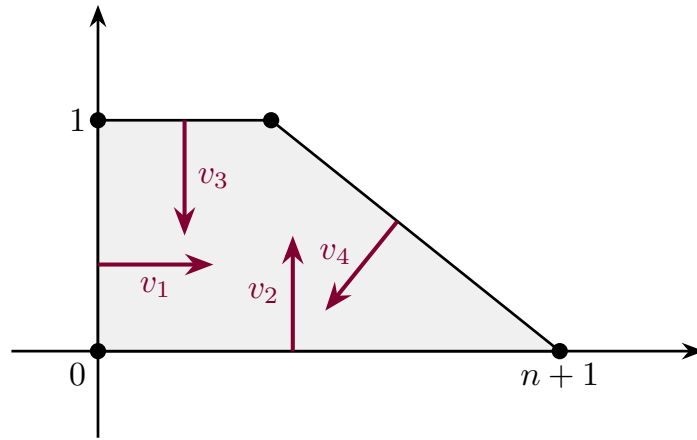
$$\begin{aligned} z \in Z &\iff \frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) = \frac{1}{2} \\ &\iff |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1, \quad \text{тј.} \\ Z &\cong S^5. \end{aligned}$$

Коначно,

$$M_\Delta = Z/N \cong S^5/S^1 \cong \mathbb{CP}^2,$$

што смо и очекивали.

Пример 19. Нека је $\Delta \in (\mathbb{R}^2)^*$ политоп са теменима $(0, 0)$, $(n + 1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$ за неко $n \geq 0$, као на слици 2.7.



Слика 2.7

Уочимо векторе нормала $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (0, -1)$ и $v_4 = (-1, -n)$ и посматрајмо Δ као скуп

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^2)^* \mid \langle x, v_i \rangle \geq \lambda_i, \ i = \overline{1, 4}\},$$

при чему је $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$ и $\lambda_4 = -(n + 1)$, у шта се није тешко уверити. Даље, посматрајмо пресликавање $\pi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ које слика базне векторе e_i у векторе нормала v_i , за $i = \overline{1, 4}$. Одредимо $N = \ker \pi$. Нека је $x = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ такво да је $\pi(x) = 0$. Одавде директно закључујемо да је

$$\ker \pi = \text{span} \{(0, 1, 1, 0), (1, n, 0, 1)\},$$

а последично и

$$N = \{(s, ts^n, t, s) \mid s, t \in S^1\} \cong \mathbb{T}^2.$$

Поново можемо посматрати кратке тачне низове

$$1 \longrightarrow \mathbb{T}^2 \xrightarrow{i} \mathbb{T}^4 \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^2 \longrightarrow 1,$$

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}^2)^* \xrightarrow{(d\pi_e)^*} (\mathbb{R}^4)^* \xrightarrow{(di_e)^*} (\mathbb{R}^2)^* \longrightarrow 0,$$

као и стандардно Хамилтоново дејство торуса $\mathbb{T}^4$ на $(\mathbb{C}^4, \omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^4 dz_k \wedge d\bar{z}_k)$ са моментним пресликавањем

$$\mu(z) = \frac{1}{2} (|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2, |z_4|^2) + \lambda, \quad \lambda = (0, 0, -1, -(n+1)).$$

Дејство Лијеве подгрупе $N \subset \mathbb{T}^4$ је Хамилтоново, са моментним пресликавањем

$$\tilde{\mu} = (di_e)^* \circ \mu: \mathbb{C}^4 \longrightarrow (\mathbb{R}^2)^*.$$

Како је $(di_e)^*$ задато матрицом $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & n & 0 & 1 \end{bmatrix}$, то је

$$\tilde{\mu}(z) = \left(\frac{1}{2} (|z_2|^2 + |z_3|^2) - 1, \frac{1}{2} (|z_1|^2 + n|z_2|^2 + |z_4|^2) - (n+1) \right),$$

што се наравно слаже са чињеницом да је рестриција дејства са $\mathbb{T}^4$ на N експлицитно задата са

$$(s, t) * (z_1, z_2, z_3, z_4) = (sz_1, ts^n z_2, tz_3, sz_4).$$

Преостаје још да одредимо скуп $Z = \tilde{\mu}^{-1}\{0\}$. Приметимо да важи

$$z \in Z \iff |z_2|^2 + |z_3|^2 = 2 \quad \text{и} \quad |z_1|^2 + n|z_2|^2 + |z_4|^2 = 2(n+1).$$

Скуп Z је заиста компактан и дејство подгрупе N на Z је слободно, па је коначно

$$M_\Delta = Z/N =: \mathcal{H}_n$$

симплектичка торусна многострукост димензије 4 чија је моментна слика Δ и њу називамо *Хирцебруховом површи*.

Напомена 12. Приметимо да је у случају $n = 0$ дејство подгрупе N на $\mathbb{C}^4$ задато са

$$(s, t) * (z_1, z_2, z_3, z_4) = (sz_1, tz_2, tz_3, sz_4),$$

па је

$$\mathcal{H}_0 = (S^3/S^1) \times (S^3/S^1) \cong \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \cong S^2 \times S^2,$$

што је и очекивано, с обзиром на то да је политоп Δ у овом случају правоугаоник који смо раније видели у примеру 13. Ипак, приметимо да дејство из претходне конструкције одговара репераметризацији дејства из поменутог примера. О овоме ће бити више речи касније, у напмени 10.

Глава 3

Тополошке особине

Лепота и значај комплетне теорије изложене у главама 1 и 2 лежи управо у разумевању једног комплексног објекта, какве су симплектичке торусне многострукости, из знатно једноставнијег конвексног политопа. За почетак, испоставља се да све овакве многострукости у димензији 4 можемо доста једноставно описати.

Пример 20. У глави 1 смо се сусрели са појмом симплектичког одувавања и навели теорему 6 која говори о томе како се ова трансформација очитује на моментној слици. Применимо теорему 6 на многострукост $\mathbb{CP}^2$, чији је моментни политоп троугао Δ са теменима $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ и $(0, \frac{1}{2})$, и то у фиксној тачки q за коју је $p = \mu_{\Delta}(q) = (0, \frac{1}{2})$. Примитивни вектори ивица са заједничким теменом p су $u_1 = (0, -1)$ и $u_2 = (1, -1)$, па се при ε -одувавању теме p замењује теменима $(0, \frac{1}{2} - \varepsilon)$ и $(\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon)$, то јест добијамо четвороугао Δ_{ε} са теменима

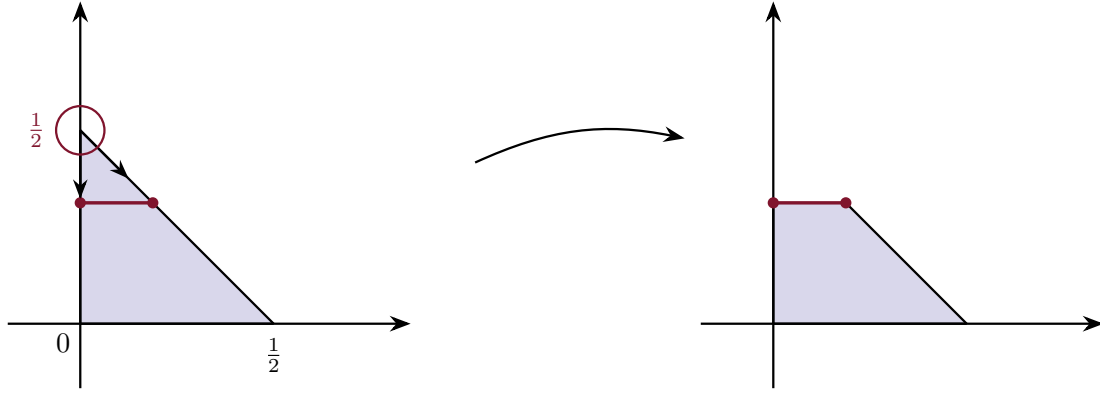
$$(0, 0), \quad (\frac{1}{2}, 0), \quad (\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon), \quad (0, \frac{1}{2} - \varepsilon).$$

Специјално, за $\varepsilon = \frac{1}{4}$ и уз рескалирање фактором 4, ово је политоп са теменима $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ и $(0, 1)$, а то је управо политоп из примера 19 за $n = 1$. Како по Делцановој кореспонденцији политоп у потпуности одређује симплектичку торусну многострукост, закључујемо да је одувавање комплексне пројективне равни у фиксној тачки заправо прва Хирцебрухова површ (видети слику 3.1), то јест важи

$$\widetilde{\mathbb{CP}^2} \cong \mathcal{H}_1.$$

За остале вредности параметра ε добијамо исту многострукост, са различитом симплектичком формом.

Одувавање нам омогућава и да у потпуности опишемо симплектичке торусне многострукости димензије 4. Према Делцановој кореспонденцији, ово је питање еквивалентно класификацији Делцанових политопа, до на $GL(2, \mathbb{Z})$ -трансформације и транслације, о чему је било речи у напмени 10. Испоставља се да је и овај комбинаторни проблем у потпуности решен: сваки Делцанов полигон се коначним низом одсецања *ћошкова* добија или од троугла или од неког од трапеза $\Delta_{\mathcal{H}_n}$ из примера 19, што је доказано у [18]. Преведено на језик многострукости, према



Слика 3.1 Одувавање многострукости $\mathbb{CP}^2$ у фиксној тачки и политоп прве Хирцебрухове површи

претходној теореме то значи да је свака симплектичка торусна многострукост димензије 4 добијена из $\mathbb{CP}^2$ или из неке од Хирцебрухових површи $\mathcal{H}_n$ коначним низом одувавања у фиксним тачкама. .

Заправо, важи и више од тога – *једине* симплектичке торусне многострукости у димензији 4 су $\mathcal{H}_0 \cong S^2 \times S^2$, $\mathbb{CP}^2$ и многострукости добијене од $\mathbb{CP}^2$ коначним низом одувавања. Наиме, свака $\mathcal{H}_n$ је дифеоморфна са $S^2 \times S^2$ или са $\widetilde{\mathbb{CP}^2}$, у зависности од парности броја n , а одувавања многострукости $S^2 \times S^2$ су већ одувавања многострукости $\mathbb{CP}^2$. Овај посебно значајан резултат ћемо издвојити као теорему, чији се доказ може наћи у [37].

Теорема 10. ([37, Теорема A.1]) Нека је $(M, \omega, \mathbb{T}^2, \mu)$ симплектичка торусна многострукост димензије 4 и нека је k број темена њеног моментног политопа. Ако је $k \neq 4$, онда је M дифеоморфна многострукости добијеној одувавањем $\mathbb{CP}^2$ у $k - 3$ тачке. Ако је $k = 4$, онда је M дифеоморфна са $\widetilde{\mathbb{CP}^2}$ или са $S^2 \times S^2$, у зависности од тога да ли је детерминанта матрице чије су колоне примитивни вектори неког пара несуседних ивица политопа непаран број или не.

Оваква класификација је специфичност димензије 4 – већ у димензији 6 ситуација се значајно компликује.

3.1 Хомологија симплектичких торусних многострукости

У наставку ћемо изложити доказ теореме која говори о хомолошким групама симплектичких торусних многострукости.

Теорема 11. Нека је $X \in \mathbb{R}^n$ вектор чије су координате линеарно независне над $\mathbb{Q}$. Димензија хомолошке групе реда $2k$ симплектичке торусне многострукости $(M, \omega,$

$\mathbb{T}^n, \mu$) је једнака броју темена политопа $\Delta = \mu(M)$ која су заједничка за тачно k примитивних вектора ивица чији је скаларни производ са X позитиван. Све хомолошке групе непарног реда су нула.

Доказ. Нека је $(M, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ $2n$ -димензионална симплектичка торусна многострукост. Желимо да изаберемо погодан, „генерички” правац у $\mathbb{R}^n$, односно вектор X такав да су испуњена следећа три услова:

1. једнопараметарска подгрупа $T^X \subset \mathbb{T}^n$ генерисана вектором X је густа у $\mathbb{T}^n$.
2. X није паралелан ниједној од страна политопа $\Delta := \mu(M)$.
3. Темена политопа Δ имају различите пројекције дуж X , то јест $\langle \mu(q_1), X \rangle \neq \langle \mu(q_2), X \rangle$ за све $q_1 \neq q_2$ које фиксне тачке дејства торуса.

Да бисмо испунили претходне услове, довољно је изабрати вектор X са координатама које су линеарно независне над $\mathbb{Q}$. Раније смо видели да су фиксне тачке $\mathbb{T}^n$ -дејства тачно фиксне тачке рестрикције дејства на T^X за овако одабрано X , а самим тим и векторског поља $X^\#$ које је генератор овог дејства. Нека је $\mu^X := \langle \mu, X \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$ Хамилтонова функција векторског поља $X^\#$. Према претходном, критичне тачке функције μ^X су тачно фиксне тачке $\mathbb{T}^n$ -дејства. Према теорему 5, постоји карта $(U, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ центрирана у q и $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{Z}^n$ такви да важи

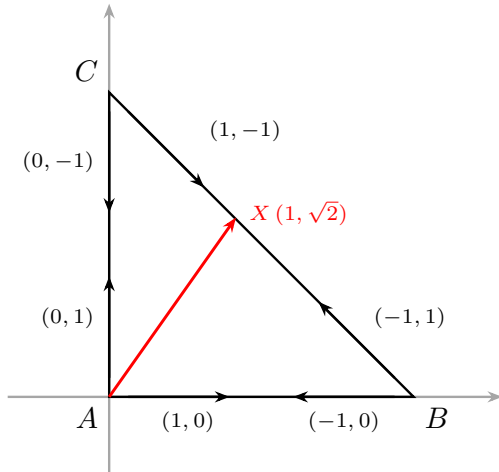
$$\mu^X|_U = \langle \mu, X \rangle|_U = \mu^X(q) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \langle \lambda^{(k)}, X \rangle (x_k^2 + y_k^2)$$

Како су координате вектора X линеарно независне, то су сви $\langle \lambda^{(k)}, X \rangle \neq 0$ и самим тим је q недегенерисана критична тачка функције μ^X . Поред тога, из оваквог локалног записа функције μ^X директно читамо и индекс критичне тачке q као двоструки број оних k за које је $\langle \lambda^{(k)}, X \rangle < 0$.

Дакле, индекс критичне тачке q геометријски можемо одредити само посматрањем политопа Δ и узимањем двоструког броја вектора ивица политопа чији је скаларни производ са X позитиван. Специјално, све критичне тачке функције μ^X су парног индекса, па је према последици A1 μ^X савршена Морсова функција. Тврђење теореме је сада директна последица теорема A1 и A2. $\square$

Последица 1. Из претходне теореме закључујемо да је k -ти Бетијев број многострукости M тачно једнак броју критичних тачака индекса k Морсове функције μ^X . Како су све хомолошке групе непарног реда нула, то је Ојлерова карактеристика многострукости M заправо једнака укупном броју критичних тачака, то јест броју темена политопа Δ .

Пример 21. Израчунајмо хомолошке групе многострукости $\mathbb{CP}^2$ — врло слично пролази за $\mathbb{CP}^n$ за произвољно $n \in \mathbb{N}$.



Фиксирајмо вектор $X = (1, \sqrt{2})$

$$A : \langle (0, 1), (1, \sqrt{2}) \rangle > 0$$

$$\langle (1, 0), (1, \sqrt{2}) \rangle > 0$$

Дакле, A одговара једној 4-ћелији.

$$B : \langle (-1, 0), (1, \sqrt{2}) \rangle < 0$$

$$\langle (-1, 1), (1, \sqrt{2}) \rangle > 0$$

$$C : \langle (0, -1), (1, \sqrt{2}) \rangle < 0$$

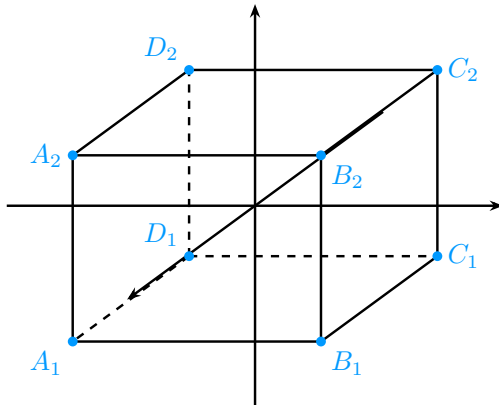
$$\langle (1, -1), (1, \sqrt{2}) \rangle < 0,$$

то јест темена B и C одговарају по једној 2 и 0-ћелији, редом. Заједно са $H_1 = H_3 = 0$, добијамо

$$H_k(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, 2, 4 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

као и $\chi(\mathbb{CP}^2) = 3$, што се наравно слаже са тврђењем из последице 1.

Пример 22. Посматрајмо $(S^2 \times S^2 \times S^2, a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3)$ са дејством торуса $\mathbb{T}^3$ које дефинисано раније у примеру 14. Већ смо се уверили да је одговарајућа моментна слика квадар, као на слици испод.



Фиксирајмо вектор

$$X = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$$

Једноставним рачуном долазимо до следећих закључака:

D_1 је једино теме које одговара ћелији димензије 6.

D_2 , A_1 и C_1 одговарају ћелијама димензије 4, док A_2 , B_1 и C_2 одговарају ћелијама димензије 2 и B_2 одговара јединственој 0-ћелији. Овим смо у потпуности одредили хомолошке групе многострукости $S^2 \times S^2 \times S^2$:

$$H_k(S^2 \times S^2 \times S^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, 6 \\ \mathbb{Z}^3, & k = 2, 4 \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

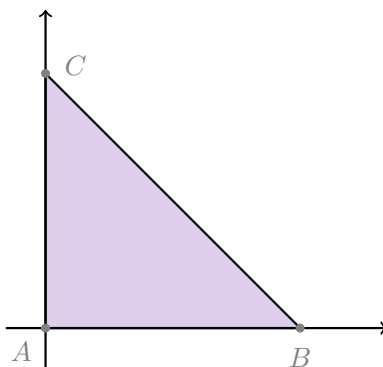
као и $\chi(S^2 \times S^2 \times S^2) = 8$. Овај резултат наравно можемо и проверити, на пример коришћењем Кинетове формуле.

Други поглед на хомологију

Испоставља се да ћелијску декомпозицију симплектичке торусне многострукости коју смо претходно добили можемо конструисати у потпуности без Морсове функције μ^X . Ова конструкција се у многоме ослања на закључке из леме 7 и ми ћемо је спровести на конкретним примерима изложеним у претходном делу рада.

Напомена 13. Сlike у наставку текста су илустративне природе, у смилу да су, ради прегледности, околине које цртамо на сликама нешто мање од скупова описаних у тексту. Ово не утиче ни на један од закључака који следе, јер су одговарајуће инверзне слике при моментном пресликавању еквиваријантно дифеоморфне, па је и добијена ћелијска декомпозиција у оба случаја иста.

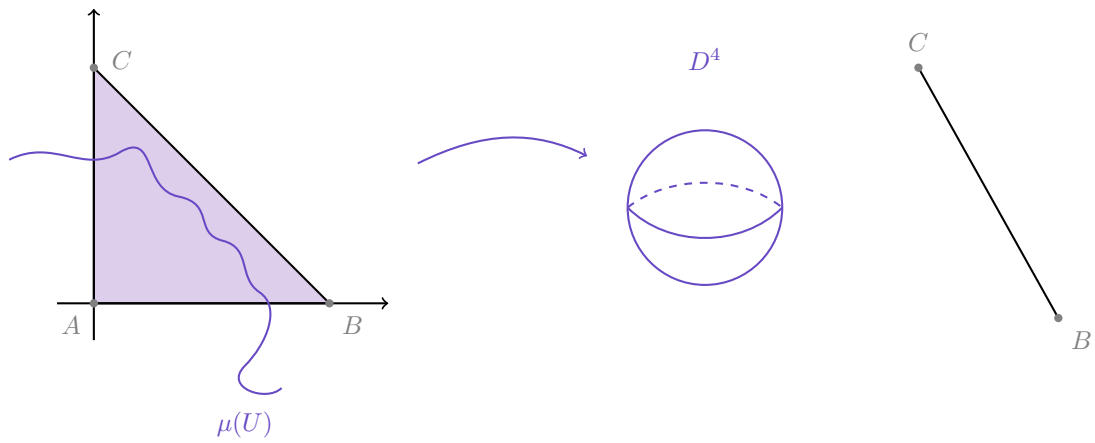
Пример 23. Посматрајмо поново многострукост $\mathbb{CP}^2$ и њену моментну слику.



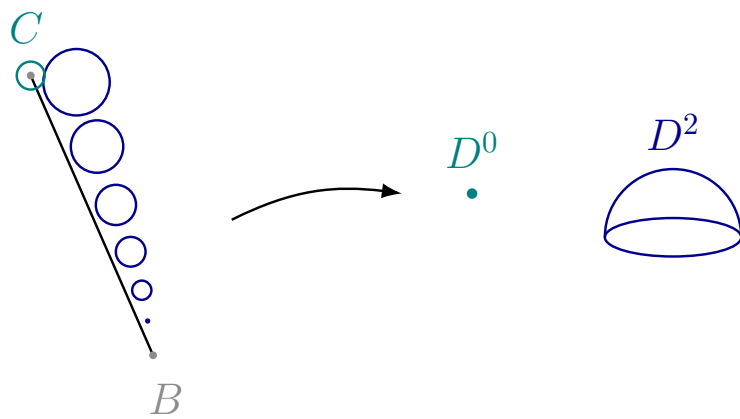
Слика 3.2

Према теореме 4, знамо да око сваке фиксне тачке постоји координатна околина чија је моментна слика управо стандардни „ћошак”. Нека је $U := \mu^{-1}(V)$, при чему је V околина темена политопа која садржи комплетну унутрашњост, као и ивице AC и BC без темена C и B . Приметимо да је околина U у овом случају управо D^4 (то јест, ћелија димензије 4).

Преостаје да разумемо којим тачкама одговара ивица BC , што сада није посебно тешко. Наиме, већ знамо да је инверзна слика темена тачка (то јест, 0-ћелија), док ивица без крајње тачке одговара управо дводимензионалном диску, што је илустровано на слици 3.4.



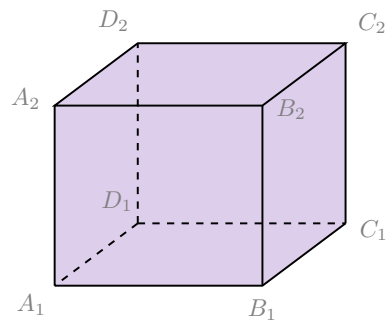
Слика 3.3



Слика 3.4

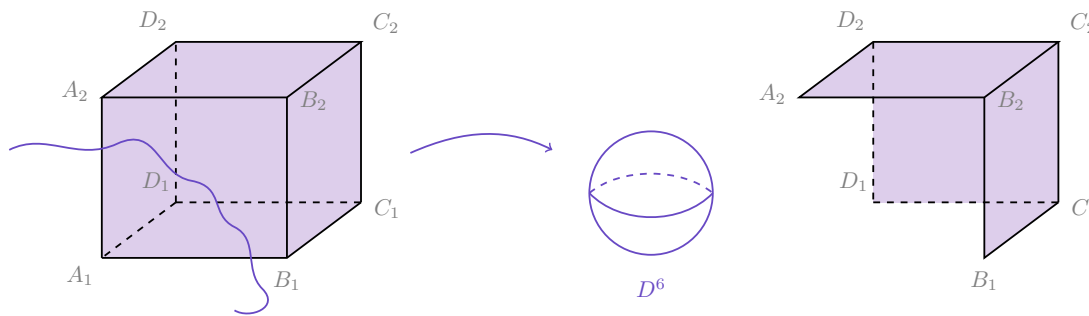
Видимо да смо добили исту декомпозицију као раније у примеру 21 и самим тим, наравно, исти закључак о хомологији простора $\mathbb{CP}^2$.

Пример 24. Посматрајмо поново многострукост $S^2 \times S^2 \times S^2$ са моментним поли-топом као на слици 3.5.



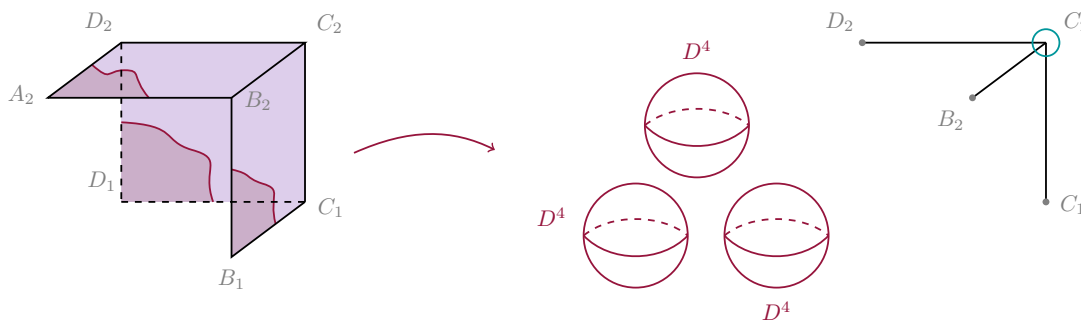
Слика 3.5

Као и у претходном примеру, прво ћемо издвојити стандардну околину темена — на пример A_1 — чија ће инверзна слика у овом случају бити диск D^6 .



Слика 3.6

Даље, уочимо на остатку политопа приказаном на слици 3.7 стандардне околине темена A_2 , B_1 и D_1 чије ће инверзне слике сада одговарати ћелијама димензије 4.



Слика 3.7

Коначно, инверзна слика темена C_2 је једна 0-ћелија, док за преостале три ивице добијамо три 2-ћелије. Приметимо поново да је добијена ћелијска композиција идентична као она добијена у примеру 22.

Општија последица постојања овакве ћелијске декомпозиције је одређивање хомолошких група само на основу броја страна политопа у свакој димензији. За многострукости димензије 4 није тешко приметити да ће $\dim H_2(M; \mathbb{Z})$ бити $k - 2$, ако са k означимо број ивица политопа (то јест, страна димензије 1), док је $H_0(M; \mathbb{Z}) \cong H_4(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Међутим, већ у случају многострукости димензије 6, ситуација је доста сложенија. Генерализација за многострукости произвољне димензије $2n$ може се наћи у [13].

3.2 Чернове класе

Претходно смо видели како се хомолошке групе многострукости могу одредити посматрањем њој одговарајућег политопа. Ово је само једна од великог броја предности које нам доноси овакав поглед на симплектичке торусне многострукости. Још један веома интересантан и подједнако значајан резултат јесте одређивање тоталне Чернове класе директно из политопа. Циљ овог поглавља је да докажемо следећу теорему.

Теорема 12. Нека је $(M_\Delta, \omega_\Delta, \mathbb{T}^n, \mu_\Delta)$ симплектичка торусна многострукост чија је моментна слика $\Delta := \mu_\Delta(M_\Delta)$ Делцанов политоп са d страна $F_1, \dots, F_d$ и нека је $u_k = \text{PD}[\mu_\Delta^{-1}(F_k)]$. Тада је тотална Чернова класа многострукости M_Δ

$$c(M_\Delta) = \prod_{k=1}^d (1 + u_k).$$

Специјално, $c_1(M_\Delta) = u_1 + u_2 + \dots + u_d = \text{PD}[\mu_\Delta^{-1}(\partial\Delta)]$ и за свако $j = \overline{1, n}$ важи

$$c_j(M_\Delta) = \sum_{|I|=j} \prod_{k \in I} u_k,$$

при чему I пролази партитивни скуп од $\{1, \dots, d\}$.

Излагање ће углавном пратити оно у [4], уз то што ћемо се у целом доказу ослањати на Делцанову конструкцију из главе 2, као и терминологију са којом смо се до сада упознали у овом раду.

3.2.1 Линијска раслојења придружена странама политопа

Нека је $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ Делцанов политоп са d страна дефинисан са

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v_k \rangle \geq \lambda_k, \ k = \overline{1, d}\},$$

при чему су $v_k \in \mathbb{Z}^n$ примитивни вектори нормала на сваку од страна, усмерени ка унутра. Даље, нека је са

$$F_k := \Delta \cap \{\langle x, v_k \rangle = \lambda_k\}$$

означена k -та страна политопа и нека је $(M_\Delta, \omega_\Delta, \mathbb{T}^n, \mu_\Delta)$ симплектичка торусна многострукост придружена политопу Δ . Прецизније, $M_\Delta = Z/N$, при чему је Z нулти ниво моментног пресликавања $i^* \circ \mu$, док је N $(d - n)$ -димензионални торус добијен као језгро пројекције $\pi: \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^n$, као што смо видели у 2.1.1. Додатно, нека је са $p: Z \longrightarrow M_\Delta$ означена количничка пројекција која је уједно и главно N -раслојење, што смо такође имали прилике да видимо у 2.1.1.

Дефиниција 22. Нека је $\chi_k: N \longrightarrow S^1$ карактер групе N , то јест, хомоморфизам група $N \longrightarrow S^1$, који је рестрикција пројекције $\text{pr}_k: \mathbb{T}^d \rightarrow S^1$ на k -ту координату са

целог тору са на Лијеву подгрупу N , за $k = \overline{1, d}$. Нека N дејствује на $Z \times \mathbb{C}$ са

$$t * (z, w) = (t * z, \chi_k(t) \cdot w).$$

Нека је $L_k := Z \times_N \mathbb{C}_{\chi_k}$ количнички простор од $Z \times \mathbb{C}$ у односу на ово дејство, то јест скуп класа еквиваленције $[z, w]$ у односу на релацију $(z, w) \sim (t * z, \chi_k(t) \cdot w)$, $t \in N$, при чему ознака $\mathbb{C}_{\chi_k}$ указује на то да N на другом фактору дејствује преко карактера χ_k , док је пројекција $\pi_k: L_k \rightarrow M_\Delta$ дата са $\pi_k([z, w]) = p(z)$, где је $p: Z \rightarrow M_\Delta$ количничка пројекција — што је добро дефинисано јер је p константно дуж N -орбита. Комплексно раслојење $\pi_k: L_k \rightarrow M_\Delta$ је *линијско раслојење придружено страни* F_k и његову прву Чернову класу означавамо са

$$u_k := c_1(L_k) \in H^2(M_\Delta; \mathbb{Z}).$$

Појам придруженог раслојења је значајан и у доказу инјективности Делцанове кореспонденције који је изложен у додатку Б. Ова дефиниција, иако оперативна, наизглед нема много везе са геометријом самог политопа. Циљ следеће напомене је да нас увери у супротно.

Напомена 14. Нека је $D_k := \mu_\Delta^{-1}(F_k) \subset M_\Delta$. Према лемми 5, D_k је затворена симплектичка подмногострукост кодимензије 2 — ово је управо S које се појављивало у доказу инјективности у глави 2. Приметимо да је $Z \cap \{z_k = 0\} = p^{-1}(D_k)$. Заиста, за $z \in Z$ важи следећи низ еквиваленција

$$p(z) \in D_k \iff \mu(p(z)) \in F_k \iff \langle \mu(p(z)), v_k \rangle = \lambda_k \iff z_k = 0.$$

Како је пројекција $p_k: Z \rightarrow \mathbb{C}$ на k -ту координату N -еквиваријантна, то можемо добро дефинисати сечење $s_k: M \rightarrow L_k$ са

$$s_k(p(z)) := [z, p_k(z)].$$

Овако дефинисано сечење s_k је трансверзално на нулто сечење. Заиста, претходно је еквивалентно са тим да је 0 регуларна вредност пресликавања $p_k|_Z$, то јест да је $(dp_k)_z: T_z Z \rightarrow \mathbb{C}$ сурјективно за свако $z \in Z$ такво да је $z_k = 0$, што није тешко доказати. Додатно, приметимо да важи

$$s_k(p(z)) = 0 \iff p_k(z) = 0 \iff p(z) \in D_k,$$

то јест $s_k^{-1}(0) = D_k$. Према познатој последици Томове теореме о изоморфизму (тврђење 12.8. у [7]), како је s_k трансверзално на нулто сечење комплексног линијског раслојења $L_k \rightarrow M_\Delta$, важи

$$u_k = c_1(L_k) = \text{PD}[D_k],$$

то јест u_k је Поенкареов дуал инверзне слике стране политопа F_k при моментном пресликавању. Дакле, u_k зависи само од многострукости и њене моментне слике.

Важно је нагласити да кохомолошке класе $u_1, \dots, u_d$ нису међусобно независне. Међу њима постоји n линеарних релација које се такође могу прочитати директно из политопа и управо то је предмет следеће леме.

Лема 10. За свако $\xi \in \mathbb{R}^n$ важи

$$\sum_{k=1}^d \langle \xi, v_k \rangle u_k = 0,$$

у $H^2(M_\Delta; \mathbb{Z})$. Другим речима, ако са $v_k = (v_k^1, \dots, v_k^n)$ означимо координате примитивних вектора нормале, за свако $j = \overline{1, n}$ важи

$$\sum_{k=1}^d v_k^j u_k = 0.$$

Доказ. Доказаћемо лему у случају $\xi = e_j$, док тврђење у општем случају следи директно из линеарности. Посматрајмо кратак тачан низ Лијевих алгебри који смо видели у 2.1.1

$$0 \longrightarrow \mathfrak{n} \xrightarrow{di} \mathbb{R}^d \xrightarrow{d\pi} \mathbb{R}^n \longrightarrow 0,$$

као и њему дуалан кратак тачан низ

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{(d\pi)^*} (\mathbb{R}^d)^* \xrightarrow{(di)^*} \mathfrak{n}^* \longrightarrow 0. \quad (*)$$

Како је $\chi_k = \text{pr}_k \circ i$, где је $i: N \hookrightarrow \mathbb{T}^d$, то важи

$$\begin{aligned} (d\chi_k)_e &= d(\text{pr}_k)_e \circ (di)_e \\ &= e_k^* \circ (di)_e \\ &= (di)^*(e_k^*). \end{aligned}$$

Прво, приметимо да важи

$$\sum_k \langle \xi, v_k \rangle e_k^* = (d\pi)^* \xi,$$

што се лако проверава евалуацијом обе стране на базним векторима e_j . Како је $(*)$ кратак тачан низ, то је $\text{im}(d\pi)^* = \ker(di)^*$, односно $(di)^*((d\pi)^*\eta) = 0$ важи за свако $\eta \in \mathbb{R}^n$. Стога,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^d \langle \xi, v_k \rangle (d\chi_k)_e &= (di)^* \left(\sum_{k=1}^d \langle \xi, v_k \rangle e_k^* \right) \\ &= (di)^*((d\pi)^*\xi) = 0 \end{aligned}$$

у $\mathfrak{n}^*$. Претходно нам гарантује да је извод хомоморфизма $\prod_{k=1}^d \chi_k^{\langle \xi, v_k \rangle}$ нула. Како је N повезана група, то је овај хомоморфизам константан, то јест тривијалан карактер групе N и самим тим је придружено раслојење $\bigotimes_k L_k^{\otimes \langle \xi, v_k \rangle}$ које одговара овом карактеру тривијално (тензорски производ придружених раслојења одговара производу

карактера). Коначно, како прва Чернова класа пролази кроз тензорски производ линијских раслојења као збир, важи

$$0 = c_1 \left(\bigotimes_k L_k^{\otimes \langle \xi, v_k \rangle} \right) = \sum_k \langle \xi, v_k \rangle c_1(L_k) = \sum_k \langle \xi, v_k \rangle u_k,$$

што је и требало доказати. $\square$

Напомена 15. Приметимо да смо се у претходном доказу ограничили на базне векторе ξ како би имало смисла посматрати хомоморфизме $\chi_k^{\langle \xi, v_k \rangle}$ и самим тим и њихов производ.

3.2.2 Цепане тангентног раслојења

Теорема 13. Нека је $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ Делцанов политоп са d страна и M_Δ њему придружена симплектичка торусна многострукост. Тада постоји изоморфизам између комплексних векторских раслојења над M_Δ ,

$$L_1 \oplus \cdots \oplus L_d \cong TM_\Delta \oplus \mathbb{C}^{d-n},$$

при чему је са $\mathbb{C}^{d-n}$ означено тривијално раслојење $M_\Delta \times \mathbb{C}^{d-n}$, док TM_Δ сматрамо комплексним раслојењем у односу на произвољну скоро комплексну структуру компатибилну са ω .

Доказ. Посматрајмо на $\mathbb{C}^d$ стандардне координате $(z_1, \dots, z_d)$ и стандардну комплексну структуру J_0 . Као што већ знамо, одговарајуће тангентно раслојење је тривијално и можемо га посматрати као суму

$$T\mathbb{C}^d \cong \bigoplus_{k=1}^d \mathbb{C} \cdot \frac{\partial}{\partial z_k}.$$

Дејство торуса $\mathbb{T}^d$ на $\mathbb{C}^d$ је комплексно линеарно, те индукује дејство на $T\mathbb{C}^d$ и то са

$$(d\varphi_t)_z = \varphi_t,$$

при канонској идентификацији $T\mathbb{C}^d \cong \mathbb{C}^d$. Прецизније, ако је $v = (v_1, \dots, v_d)$ тангентни вектор и $\varphi_t(z_1, \dots, z_d) = (t_1 z_1, \dots, t_d z_d)$ за $t = (t_1, \dots, t_d)$, важи

$$d\varphi_t \left(\frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_z \right) = t_k \cdot \frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_{\varphi_t(z)}.$$

Дакле, индуковано дејство поштује цепане тангентног раслојења и дејство на k -тој правој изгледа као множење са t_k . Посматрамо рестрикцију свега добијеног на $Z = (i^* \circ \mu)^{-1}\{0\} \subset \mathbb{C}^d$. Додатно, сетимо се да је дејство N на Z слободно и да је $p: Z \longrightarrow M_\Delta$ главно N -раслојење.

Посматрајмо k -ти члан суме $T\mathbb{C}^d$ над Z , то јест подраслојење

$$E_k := \bigsqcup_{z \in Z} \mathbb{C} \cdot \frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_z \cong Z \times \mathbb{C},$$

при чему је одговарајући изоморфизам $w \cdot \frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_z \mapsto (z, w)$. Иако ово јесте тривијално раслојење над Z , оно је снабдевано нетривијалним N -дејством,

$$t * (z, w) = (t * z, t_k w) = (t * z, \chi_k(t) \cdot w),$$

одакле можемо приметити да је $E_k/N \cong L_k$ и, даље,

$$(T\mathbb{C}^d|_Z)/N \cong \bigoplus_{k=1}^d L_k.$$

Да бисмо завршили доказ, преостаје да исти простор идентификујемо са $TM_\Delta \oplus \mathbb{C}^{d-n}$. У ту сврху, фиксирајмо $z \in Z$ и означимо са $\mathcal{V}_z := T_z(N * z)$ тангентни простор на орбиту тачке z , (реалне) димензије $d-n$. Како је Z регуларан скуп нивоа моментног пресликавања $i^* \circ \mu$, то је $T_z Z = \ker d(i^* \circ \mu)$, а раније у глави 1 смо видели да такође важи $\ker d(i^* \circ \mu) = (\mathcal{V}_z)^\omega$. Додатно, приметимо да је $J_0 \mathcal{V}_z \cap T_z Z = \{0\}$. Заиста, ако би важило $J_0 u \in T_z Z$ за неко $0 \neq u \in \mathcal{V}_z$, имали бисмо $\omega_0(u, J_0 u) = 0$, што наравно није могуће. Сада можемо уочити цепање

$$T_z \mathbb{C}^d \cong \underbrace{(\mathcal{V}_z \oplus J_0 \mathcal{V}_z)}_{=: \mathcal{K}_z} \oplus \underbrace{(T_z Z \cap J_0 T_z Z)}_{=: \mathcal{H}_z},$$

при чему су и $\mathcal{K}_z$ и $\mathcal{H}_z$ J_0 -инваријантни, комплексних димензија $d-n$ и n , редом.

(1) $\mathcal{K}/N$ је тривијално раслојење

Фиксирајмо базу $X_1, \dots, X_{d-n}$ Лијеве алгебре $\mathfrak{n}$. Инфинитезимални генератори $X_1^\#, \dots, X_{d-n}^\#$ су N -инваријантна векторска поља која разапињу $\mathcal{V}$ дуж Z . Последиочно, $X_1^\#, J_0 X_1^\#, \dots, X_{d-n}^\#, J_0 X_{d-n}^\#$ разапињу $\mathcal{K}$ и J_0 је N -инваријантна. Стога, важи

$$\mathcal{K} \cong Z \times (\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}),$$

при чему је $\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ комплексификација Лијеве алгебре $\mathfrak{n}$. Додатно, ово раслојење је N -еквиваријантно комплексно раслојење, при чему је дејство N на другој координати тривијално. Коначно,

$$\mathcal{K}/N \cong M_\Delta \times (\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{d-n},$$

што смо и желели да докажемо.

(2) $\mathcal{H}/N \cong TM_\Delta$

За почетак, приметимо да је $\mathcal{V}_z \cap \mathcal{H}_z = 0$. Заиста, како је J_0 инјективно, то важи

$$J_0(\mathcal{V}_z \cap J_0 T_z Z) = J_0 \mathcal{V}_z \cap J_0^2 T_z Z = J_0 \mathcal{V}_z \cap T_z Z = 0.$$

Додатно, како је $\dim T_z Z = \dim \mathcal{H}_z + \dim \mathcal{V}_z$, важи

$$T_z Z \cong \mathcal{V}_z \oplus \mathcal{H}_z.$$

Даље, како је $p: Z \rightarrow M_\Delta$ субмерзија и како су слојеви N -орбите, то је

$$\ker(dp_z|_{T_z Z}) = \mathcal{V}_z.$$

Из свега претходно добијеног, закључујемо да је

$$dp_z|_{\mathcal{H}_z}: \mathcal{H}_z \rightarrow T_{p(z)} M_\Delta \quad (*)$$

изоморфизам, то јест да је $\mathcal{H}$ једна хоризонтална дистрибуција. Даље, како је $\mathcal{H} \rightarrow Z$ N -еквиваријантно подраслојење, количник $\mathcal{H}/N \rightarrow M_\Delta$ је векторско раслојење димензије $2n$. Коначно, изоморфизам између $\mathcal{H}/N$ и TM_Δ можемо задати са

$$\begin{aligned} \mathcal{H}/N &\rightarrow TM_\Delta \\ [z, v] &\mapsto dp_z(v) \end{aligned}$$

и то завршава доказ. □

Сада имамо све што нам је неопходно да бисмо доказали главну теорему у овом делу рада.

Доказ теореме 12. Како је тотална Чернова класа тривијалног раслојења 1, то из теореме 13 добијамо

$$\begin{aligned} c(M_\Delta) &= c(TM_\Delta) \smile c(\mathbb{C}^{d-n}) = c(TM_\Delta \oplus \mathbb{C}^{d-n}) = c\left(\bigoplus_{k=1}^d L_k\right) \\ &= \prod_{k=1}^d c(L_k) = \prod_{k=1}^d (1 + u_k), \end{aligned}$$

при чему смо у последњој једнакости искористили да за линијско раслојење L_k важи $c(L_k) = 1 + u_k$. Закључак за Чернове класе одређеног реда добијамо директно, издвајањем елемента одговарајућег реда из тоталне Чернове класе и коришћењем чињенице да је $\partial\Delta = F_1 \cup \dots \cup F_d$. □

Да бисмо претходну формулу у потпуности свели на комбинаторне термине политопа, преостаје само да разјаснимо како се кохомолошке класе u_k множе.

Лема 11. Нека је $k_1 < k_2 < \dots < k_j$ растући поредак индекса. Тада важи

$$u_{k_1} \cdots u_{k_j} = \text{PD} \left[\mu_\Delta^{-1} (F_{k_1} \cap \dots \cap F_{k_j}) \right],$$

при чему са десне стране узимамо нулу ако је пресек страна политопа празан. Специјално, за $j = n$ важи

$$\langle u_{k_1} \cdots u_{k_n}, [M_\Delta] \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ако } F_{k_1}, \dots, F_{k_n} \text{ имају заједничко теме} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Напомена 16. Како је M_Δ затворена, повезана и оријентисана многострукост димензије $2n$ – оријентацију задаје форма запремине ω_Δ^n – то је $H_{2n}(M_\Delta; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, а канонски генератор $[M_\Delta]$ ове групе зовемо *фундаменталном класом*. Спаривање $\langle \cdot, \cdot \rangle$ је евалуација кохомолошке класе на хомолошкој; свакој кохомолошкој класи реда $2n$ оно придружује један цео број. Геометријски, ако се затворене оријентисане подмногострукости A и B комплементарних димензија секу трансверзално, важи

$$\langle \text{PD}[A] \smile \text{PD}[B], [M_\Delta] \rangle = A \cdot B,$$

при чему је $A \cdot B$ *индекс пресека*, то јест број тачака коначног скупа $A \cap B$ бројаних са знаком $+1$ или -1 , у зависности од тога да ли се у тачки p оријентација суме $T_p A \oplus T_p B$ поклапа са оријентацијом од $T_p M_\Delta$ или не. Како су све подмногострукости са којима се овде срећемо инваријантне у односу на $\mathbb{T}^n$ -инваријантну компатибилну скоро комплексну структуру J из леме 3 (видети доказ леме A5), њихове тангентне просторе оријентише J . Даље, због $T_p A \oplus T_p B = T_p M_\Delta$, J -оријентација суме се поклапа са J -оријентацијом од $T_p M_\Delta$, а она са оријентацијом задатом формом ω_Δ^n , јер је J компатибилна са ω_Δ . Дакле, свака тачка пресека доприноси са $+1$.

Доказ. Фиксирајмо индексе $k_1 < \cdots < k_j$ и посматрајмо сечење

$$\sigma := (s_{k_1}, \dots, s_{k_j})$$

раслојења $E := L_{k_1} \oplus \cdots \oplus L_{k_j}$, при чему су сечења s_{k_i} дефинисана као раније у напмени 14. Приметимо да је σ сечење наслеђено од $F: Z \rightarrow \mathbb{C}^j$,

$$F(z) = (p_{k_1}(z), \dots, p_{k_j}(z)) = (z_{k_1}, \dots, z_{k_j}),$$

такође аналогно као у напмени 14. Слично као раније, није тешко доказати да је 0 регуларна вредност пресликавања $F|_Z$, одакле следи да је σ трансверзално на нулто сечење раслојења E . Додатно, како је $\sigma^{-1}\{0\} = D_{k_1} \cap \cdots \cap D_{k_j}$ затворена подмногострукост од M_Δ кодимензије $2j$, по истој последици Томове теореме о изоморфизму коју смо користили у напмени 14, $c_j(E) = \text{PD}[\sigma^{-1}(0)]$. Коначно,

$$c_j(L_{k_1} \oplus \cdots \oplus L_{k_j}) = \prod_{i=1}^j c_1(L_{k_i}) = u_{k_1} \cdots u_{k_j},$$

то јест важи $u_{k_1} \cdots u_{k_j} = \text{PD} [D_{k_1} \cap \cdots \cap D_{k_j}]$. Специјално, у случају $j = n$ из чињенице да је Δ прост политоп можемо закључити да је $F_{k_1} \cap \cdots \cap F_{k_n}$ или празан скуп или тачно једно теме политопа Δ , чија је инверзна слика при моментном пресликавању једна тачка. Дакле,

$$\langle u_{k_1} \cdots u_{k_n}, [M_\Delta] \rangle = \langle \text{PD} [\text{pt}], [M_\Delta] \rangle = 1,$$

у случају да је пресек непразан и нула иначе. $\square$

Последица 2. За симплектичку торусну многострукост M_Δ димензије $2n$ чија је моментна слика Делцанов политоп Δ важи

$$\langle c_n(M_\Delta), [M_\Delta] \rangle = \text{број темена политопа } \Delta.$$

Доказ. Према теорему 12, члан реда $2n$ у производу $\prod_{k=1}^d (1 + u_k)$ је $\sum_{|I|=n} \prod_{k \in I} u_k$. Даље, по леми 11, сваки од ових сабирака у спаривању доприноси са 1, ако стране имају заједничко теме или иначе нулом. Како је политоп прост, свако теме је заједничко за тачно n страна, па ће самим тим бити избројано тачно једном, што завршава доказ. $\square$

Напомена 17. Уз познавање чињенице да је Чернова класа реда n заправо Ојлерова класа многострукости M_Δ , претходна последица нам даје још један доказ чињенице да је Ојлерова карактеристика $\chi(M_\Delta)$ управо број темена политопа Δ , што смо раније видели у последици 1.

3.2.3 Примери

У наредним примерима илустроваћемо теорему о тоталној Черновој класи на политопима које смо већ сретали у овом раду. Поступак ће у оба случаја бити исти: из политопа читамо примитивне векторе нормала, потом из ових вектора добијемо релације међу класама u_k , затим одредимо производе класа помоћу леме 11 и коначно просто помножимо факторе $(1 + u_k)$.

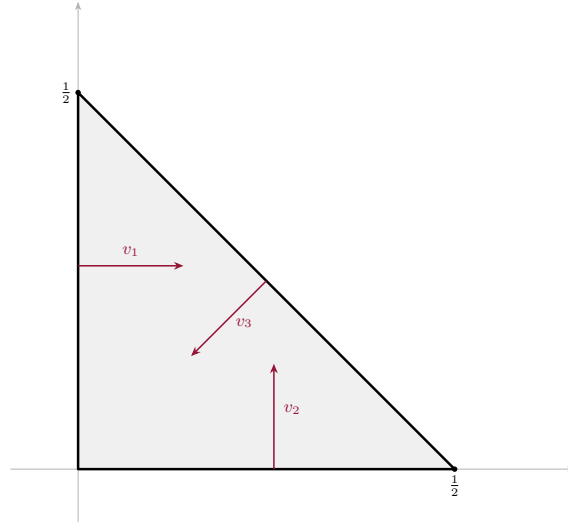
Пример 25. Посматрајмо већ добро познати политоп многострукости $\mathbb{CP}^2$, на слици 3.8. Примитивни вектори нормала на његове стране су $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ и $v_3 = (-1, -1)$. У складу са тим, политоп можемо записати у облику

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, v_1 \rangle \geq 0, \langle x, v_2 \rangle \geq 0, \langle x, v_3 \rangle \geq -\frac{1}{2} \right\},$$

што смо и раније имали прилике да видимо. Према леми 10, постоје две релације међу класама u_1 , u_2 и u_3 :

$$\xi = e_1 : u_1 - u_3 = 0,$$

$$\xi = e_2 : u_2 - u_3 = 0.$$



Слика 3.8

Дакле, закључујемо да важи $u_1 = u_2 = u_3 =: u$. Приметимо да овај закључак није неочекиван – свака од класа u_k је Поенкареов дуал подмногострукости $D_k = \mu_{\Delta}^{-1}(F_k)$, а инверзна слика сваке од три странице троугла је једна права у $\mathbb{CP}^2$, то јест један примерак $\mathbb{CP}^1$. Дакле, $u = \text{PD}[\mathbb{CP}^1] \in H^2(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Докажимо да је u генератор од $H^2(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z})$, при чему знамо да је кохомолошки прстен од $\mathbb{CP}^2$ једнак $\mathbb{Z}[h]/(h^3)$. За почетак, нека је $u = mh$, за неко $m \in \mathbb{Z}$ и генератор h . Из леме 11 добијамо

$$1 = \langle u_1 u_2, [\mathbb{CP}^2] \rangle = \langle u^2, [\mathbb{CP}^2] \rangle = m^2 \langle h^2, [\mathbb{CP}^2] \rangle,$$

па је $m = \pm 1$ и самим тим мора бити $u = \pm h$. Како се сваке две различите праве у $\mathbb{CP}^2$ секу трансверзално у једној тачки, према напомени 16 њихов индекс пресека је $+1$. Спаривањем u и h коначно добијамо $u = h$, а не $-h$. Даље, рачунамо

$$c(\mathbb{CP}^2) = \prod_{k=1}^3 (1 + u_k) = (1 + u)^3 = 1 + 3u + 3u^2 + u^3.$$

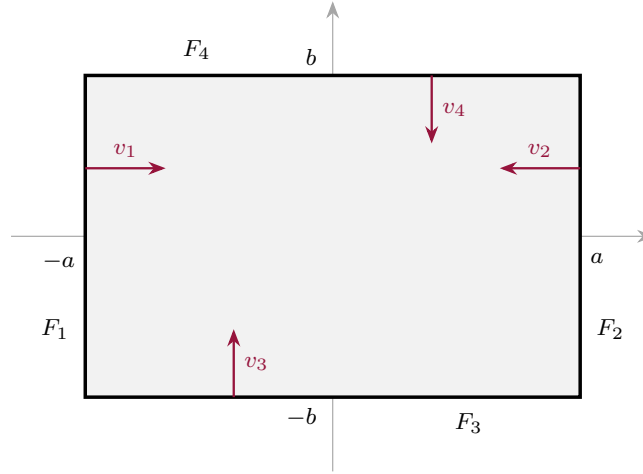
Како је $H^6(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}) = 0$, то је $u^3 = 0$ и важи

$$c_1(\mathbb{CP}^2) = 3u, \quad c_2(\mathbb{CP}^2) = 3u^2.$$

Спаривање друге Чернове класе са фундаменталном класом $[\mathbb{CP}^2]$ још једном потврђује раније добијен закључак – $\chi(\mathbb{CP}^2) = 3$:

$$\langle c_2(\mathbb{CP}^2), [\mathbb{CP}^2] \rangle = 3 \langle u^2, [\mathbb{CP}^2] \rangle = 3.$$

Пример 26. Посматрајмо сада многострукост $(S^2 \times S^2, a\omega_1 + b\omega_2)$ са дејством торуса $\mathbb{T}^2$ као раније у примеру 13, чија је моментна слика правоугаоник $\Delta = [-a, a] \times [-b, b]$, као на слици испод.



Слика 3.9

Примитивни вектори нормала који показују ка унутра су у овом случају $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (-1, 0)$, $v_3 = (0, 1)$ и $v_4 = (0, -1)$, док Δ можемо видети као скуп

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, v_1 \rangle \geq -a, \langle x, v_2 \rangle \geq -a, \langle x, v_3 \rangle \geq -b, \langle x, v_4 \rangle \geq -b\}.$$

Одредимо релације између u_1, u_2, u_3 и u_4 :

$$\xi = e_1 : u_1 - u_2 = 0,$$

$$\xi = e_2 : u_3 - u_4 = 0.$$

Дакле, $u_1 = u_2 =: \alpha$ и $u_3 = u_4 =: \beta$. Приметимо поново да добијене релације имају смисла и геометријски. Наиме, инверзне слике страница чији су нормални вектори v_1 и v_2 , то јест страница F_1 и F_2 , су $\{pt\} \times S^2$, док су инверзне слике горње и доње странице $S^2 \times \{pt\}$. Стога није неочекивано да u_1 и u_2 , односно u_3 и u_4 , одговарају истим кохомолошким класама. Дакле, α и β су кохомолошке класе дуалне подмногоструктурама $\{pt\} \times S^2$ и $S^2 \times \{pt\}$, редом, и оне чине базу од $H^2(S^2 \times S^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$.

Даље, како су F_1 и F_2 наспрамне странице правоугаоника, њихов пресек је празан, па по лемми 11 важи $\alpha^2 = u_1 u_2 = 0$ и, потпуно аналогно, $\beta^2 = u_3 u_4 = 0$. Са друге стране, како странице F_1 и F_3 јесу суседне, то је

$$\langle \alpha \beta, [S^2 \times S^2] \rangle = \langle u_1 u_3, [S^2 \times S^2] \rangle = 1.$$

Ово је поново сагласно са геометријском интуицијом, јер се подмногоструктури $\{pt\} \times S^2$ и $S^2 \times \{pt\}$ секу трансверзално и то у једној тачки. Коначно, рачунамо

$$c(S^2 \times S^2) = \prod_{k=1}^4 (1 + u_k) = (1 + \alpha)^2 (1 + \beta)^2.$$

Како је $\alpha^2 = \beta^2 = 0$, то је $(1 + \alpha)^2 = 1 + 2\alpha$ и $(1 + \beta)^2 = 1 + 2\beta$, па добијамо

$$c(S^2 \times S^2) = (1 + 2\alpha)(1 + 2\beta) = 1 + 2(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta.$$

Дакле, добили смо и $c_1(S^2 \times S^2) = 2\alpha + 2\beta$, као и $c_2(S^2 \times S^2) = 4\alpha\beta$, што поново потврђује раније изведен резултат о Ојлеровој карактеристици многострукости $S^2 \times S^2$, јер је

$$\langle c_2(S^2 \times S^2), [S^2 \times S^2] \rangle = 4 \langle \alpha\beta, [S^2 \times S^2] \rangle = 4.$$

Глава 4

Симплектичке торусне многострукости са контактном границом

Све многострукости са којима смо се до сада срили у овом раду биле су затворене. У глави 2 смо видели да Делцанова кореспонденција успоставља бијекцију између затворених симплектичких торусних многострукости и Делцанових политопа, те је природно запитати се шта се дешава када тај услов ослабимо. Циљ ове главе је да укажемо на богату теорију која се на овај начин отвара и да формулишемо неколико отворених питања која се у њој постављају. У даљем излагању ћемо се пре свега ослањати на [27] и [20] и већину резултата ћемо само формулисати или илустровати на примерима, без доказа.

4.1 Контактне многострукости као границе симплектичких

Подсетимо се најпре основних појмова из контактне геометрије. Нека је V глатка многострукост димензије $2n - 1$. Дистрибуција кодимензије 1 на V је глатка фамилија хиперравни $\xi \subset TV$, то јест, $\xi_p \leq T_p V$ је потпростор димензије $\dim V - 1$ и додељивање $p \mapsto \xi_p$ је глатко. Свака таква дистрибуција се локално може приказати као $\xi = \ker \alpha$ за неку диференцијалну 1-форму α . Ако притом за такво α важи

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge(n-1)} \neq 0,$$

дистрибуцију ξ називамо *контактном структуром*, а пар (V, ξ) *контактном многострукошћу*. Уколико је форма α глобално дефинисана, називамо је *контактном формом* на V , а контактну структуру ξ *кооријентабилном*. Подсетимо се такође да контактне структуре на затвореним тродимензионалним многострукостима долазе у два различита типа.

Дефиниција 23. Нека су (V_1, ξ_1) и (V_2, ξ_2) контактне многострукости димензије $2n-1$ и нека је $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ дифеоморфизам. За φ кажемо да је *контактоморфизам* ако је $d\varphi(\xi_1) = \xi_2$.

Дефиниција 24. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост. Векторско поље X на M (или на неком отвореном подскупу од M) је *Лиувилово* ако важи

$$\mathcal{L}_X \omega = \omega,$$

или, еквивалентно, $d(\iota_X \omega) = \omega$.

Еквивалентност два услова из претходне дефиниције непосредно следи из Картанове формуле и затворености форме ω :

$$\mathcal{L}_X \omega = d(\iota_X \omega) + \iota_X d\omega = d(\iota_X \omega).$$

Контактне форме се природно јављају на границама симплектичких многострукости, што је садржај следећег тврђења.

Тврђење 7. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост са границом и нека је X Лиувилово векторско поље дефинисано близу границе од M . Ако је X трансверзално на ∂M , онда је

$$\alpha := (\iota_X \omega)|_{\partial M}$$

контактна форма на ∂M . У том случају, кажемо да је граница *контактног типа*.

Доказ. Како је $d\alpha = \omega|_{\partial M}$, то је

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} = (\iota_X \omega) \wedge \omega^{n-1} = \frac{1}{n} \iota_X \omega^n,$$

што је форма запремине на ∂M управо зато што је ω^n форма запремине на M и X трансверзално на ∂M . $\square$

Пример 27. На $(\mathbb{R}^{2n}, \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k)$ посматрајмо векторско поље

$$X = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(x_k \frac{\partial}{\partial x_k} + y_k \frac{\partial}{\partial y_k} \right).$$

Директним рачуном проверавамо да је X Лиувилово векторско поље, односно да је $d(\iota_X \omega) = \omega$. Ако посматрамо рестрикцију стандардне симплектичке форме на

$$D^{2n} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2) \leq 1 \right\},$$

D^{2n} постаје симплектичка многострукост са границом димензије $2n$ и при томе је $\partial D^{2n} = S^{2n-1}$. Даље, нека је дата функција $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2).$$

Приметимо да је $f^{-1}\{1\} = S^{2n-1}$, па како је 1 регуларна вредност функције f , то је $T_p S^{2n-1} = \ker df_p$ у свакој тачки $p \in S^{2n-1}$. Додатно, векторско поље X је трансверзално на S^{2n-1} јер у свакој тачки $p \in S^{2n-1}$ важи

$$df_p(X_p) = \sum_{k=1}^n (2x_k \cdot \frac{1}{2}x_k + 2y_k \cdot \frac{1}{2}y_k) = \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2) = 1 \neq 0.$$

Дакле, према тврђењу 7, $S^{2n-1} = \partial D^{2n}$ је контактнoг типа, са контактном формом

$$\alpha_{st} = \iota_X \omega|_{S^{2n-1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k dy_k - y_k dx_k),$$

коју ћемо звати *стандардном*, а њено језгро *стандардном контактном структуром* на S^{2n-1} .

Дефиниција 25. Нека је (M, ω) компактна симплектичка многострукост са границом $V = \partial M$, нека је X Лиувилово поље дефинисано у околини границе и трансверзално на границу од M и нека је $\alpha = (\iota_X \omega)|_V$ индукована контактна форма на V .

- Ако X показује *ка споља* у односу на V , оријентација на V задата формом α поклапа се са оријентацијом на граници наслеђеном из M и тада кажемо да је граница многострукости M *конвексна*, а (M, ω) зовемо *јаким (конвексним) симплектичким попуњењем* контактне многострукости $(V, \ker \alpha)$.
- Ако X показује *ка унутра* у односу на V , кажемо да је граница многострукости M *конкавна*, а (M, ω) зовемо *конкавним симплектичким попуњењем* контактне многострукости $(V, \ker \alpha)$.

Дефиниција 26. За контактну структуру ξ на 3 – многострукости V кажемо да је *заврнута* (енг. *overtwisted*) ако постоји заврнути диск уложен у (V, ξ) , то јест диск чија је граница у свакој тачки тангентна на ξ . За контактну структуру кажемо да је *затегнута* (енг. *tight*) уколико није заврнута.

Напомена 18. Према теорему коју Ељашберг доказује у [16], постојање јаког попуњења контактне многострукости димензије 3 повлачи затегнутост контактне структуре, а исти закључак је касније доказан и у већим димензијама. Дакле, контактна структура на многострукости која је конвексна граница симплектичке је нужно затегнута, док контактне структуре на конкавним границама могу бити и затегнуте и заврнуте.

4.2 Торусна дејства на симплектичким многострукостима са границом

Следеће тврђење, које је у суштини специјалан случај тврђења 7, нам објашњава које импликације торусно дејство на симплектичкој многострукости има на њену границу као контактну многострукост.

Тврђење 8. Нека је (M^{2n}, ω) компактна симплектичка многострукост са ефективним, Хамилтоновим дејством торуса $\mathbb{T}^n$ и непразном границом $V = \partial M$ и нека постоји Лиувиллово поље X , дефинисано у околини границе $V = \partial M$ и трансверзално на границу. Тада је $(V, \ker(\iota_X \omega|_V))$ контактна многострукост са контактном структуром инваријантном у односу на дејство торуса $\mathbb{T}^n$.

Доказ. Торус $\mathbb{T}^n$ дејствује на M симплектоморфизмима и, последично, чува границу V . Лиувиллово векторско поље X не мора бити инваријантно у односу на дејство торуса, али увек постоји неко Лиувиллово векторско поље које то јесте и при томе је усмерено као X и такође трансверзално на границу. Заиста, можемо посматрати

$$\tilde{X} = \int_{\mathbb{T}^n} d\varphi_t(X) dt.$$

Покажимо најпре да је свако од поља $(d\varphi_t)(X)$ Лиувиллово. За произвољан тангентни вектор v у тачки p важи

$$\omega((d\varphi_t)(X), v) = \omega((d\varphi_t)(X), (d\varphi_t)((d\varphi_t)^{-1}(v))) = (\varphi_t^* \omega)(X, (d\varphi_t)^{-1}(v)),$$

а како дејство чува симплектичку форму, то јест важи $\varphi_t^* \omega = \omega$, добијамо

$$\iota_{d\varphi_t(X)} \omega = (\varphi_t^{-1})^* (\iota_X \omega).$$

Како је X Лиувиллово векторско поље, следи

$$d(\iota_{d\varphi_t(X)} \omega) = (\varphi_t^{-1})^* d(\iota_X \omega) = (\varphi_t^{-1})^* \omega = \omega,$$

па је $(d\varphi_t)(X)$ Лиувиллово поље за свако t . Одавде можемо закључити и да је $\tilde{X}$ Лиувиллово. Конкретно,

$$d(\iota_{\tilde{X}} \omega) = d\left(\omega\left(\int_{\mathbb{T}^n} (d\varphi_t)(X) dt, \cdot\right)\right) = d\left(\int_{\mathbb{T}^n} \omega((d\varphi_t)(X), \cdot) dt\right),$$

а како спољашњи извод комутира са интеграцијом по t , добијамо

$$d(\iota_{\tilde{X}} \omega) = \int_{\mathbb{T}^n} d(\iota_{d\varphi_t(X)} \omega) dt = \int_{\mathbb{T}^n} \omega dt = \omega \int_{\mathbb{T}^n} dt = \omega.$$

Даље, како $d\varphi_t$ чува трансверзалност на границу, свако од векторских поља $(d\varphi_t)(X)$ је трансверзално на V и показује на исту страну као X . Нека је f дефинишућа

функција границе, то јест глатка функција дефинисана у околини границе за коју је $V = f^{-1}(0)$ и $df \neq 0$ на V . Тада је $T_p V = \ker df_p$, па је вектор w трансверзалан на V и показује на исту страну као X тачно када је $df(w)$ истог знака као $df(X)$. Сада можемо закључити

$$df(\tilde{X}) = \int_{\mathbb{T}^n} df((d\varphi_t)(X)) dt \neq 0,$$

јер је подинтегрална функција непрекидна, нигде нула и сталног знака на компактном торусу. Дакле, и $\tilde{X}$ је трансверзално на V и показује на исту страну као X .

Нека је сада $\alpha = (\iota_{\tilde{X}}\omega)|_V$. Према тврђењу 7, α је контактна форма на V , а како су и $\tilde{X}$ и ω инваријантни, инваријантна је и форма α , па дејство торуса $\mathbb{T}^n$ на V чува $\xi = \ker \alpha$. Додатно, дејство на V је такође ефективно, јер ток инваријантног поља $\tilde{X}$ еквиваријантно идентификује околину границе са производом $(-\varepsilon, 0] \times V$, па елемент торуса који тривијално дејствује на V тривијално дејствује и на тој околини, а онда, због повезаности, и на целој многострукости M . $\square$

Сада можемо дефинисати централни појам у овој глави. Услов за димензију торуса у следећој дефиницији потпуно је аналоган услову $\dim \mathbb{T}^n = \frac{1}{2} \dim M$ из дефиниције симплектичке торусне многострукости – и у једном и у другом случају реч је о торусу максималне димензије који уопште може ефективно дејствовати на многострукости, чувајући дату структуру.

Дефиниција 27. *Контактна торусна многострукост* је кооријентисана контактна многострукост (V^{2n-1}, ξ) заједно са ефективним дејством торуса $\mathbb{T}^n$ које чува ξ . Прецизније, дејство је ефективно и $\varphi_t : V \longrightarrow V$ је контактоморфизам, за свако $t \in \mathbb{T}^n$.

Као што видимо из дефиниције, контактне торусне многострукости су објекти који постоје независно од симплектичких и имају различиту природу, што ћемо покушати да илуструјемо у наставку.

Дефиниција 28. *Моментно пресликавање* $H_\alpha : V \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ је пресликавање дефинисано са

$$\langle H_\alpha(p), X \rangle := \alpha_p(X^\#), \quad X \in \mathbb{R}^n,$$

при чему је $X^\#$ инфинитезимални генератор дејства придружен елементу X .

Напомена 19. За разлику од *затворених* симплектичких торусних многострукости, затворене контактне торусне многострукости на морају да имају особину да је инверзна слика сваке тачке при моментном пресликавању повезан скуп. Ову чињеницу илуструје пример 28.

Пример 28. Посматрајмо дејство торуса $\mathbb{T}^2$ на контактної многострукости

$$(\mathbb{T}^3, \ker(\cos(2\pi n\theta) d\theta_1 + \sin(2\pi n\theta) d\theta_2))$$

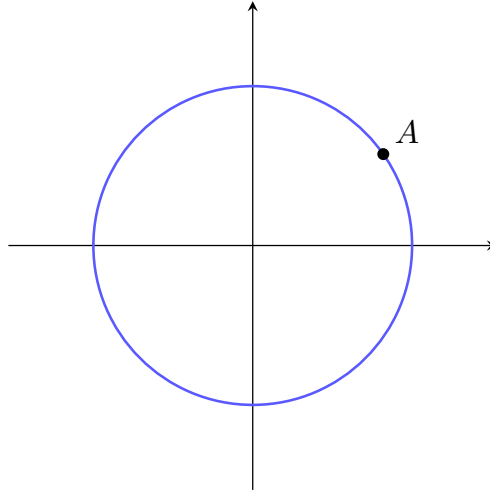
дефинисано са

$$(e^{it_1}, e^{it_2}) * (\theta, \theta_1, \theta_2) = (\theta, \theta_1 + t_1, \theta_2 + t_2).$$

Векторска поља која дефинишу ово дејство су $X_1^\# = \frac{\partial}{\partial \theta_1}$ и $X_2^\# = \frac{\partial}{\partial \theta_2}$, па је одговарајуће моментно пресликавање

$$H(\theta, \theta_1, \theta_2) = (\cos(2\pi n\theta), \sin(2\pi n\theta))$$

и моментна слика је круг, као на слици 4.1.



Слика 4.1 Моментна слика дејства торуса $\mathbb{T}^2$ на $\mathbb{T}^3$.

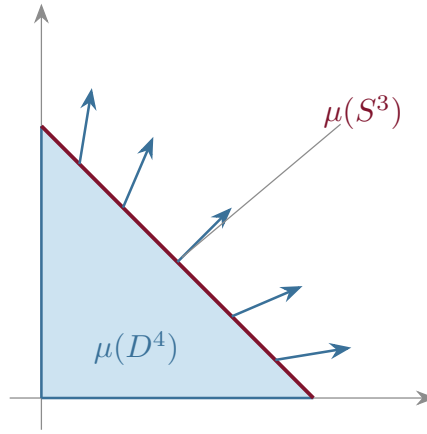
Ако изаберемо произвољну тачку A са овог круга, можемо приметити да је инверзна слика тачке A при H скуп

$$H^{-1}(A) = \left\{ \theta, \theta + \frac{1}{n}, \theta + \frac{2}{n}, \dots, \theta + \frac{n-1}{n} \right\} \times \mathbb{T}_{\theta_1, \theta_2}^2,$$

који има n компоненти повезаности.

Напомена 20. Важно је нагласити да претходна напомена важи и за симплектичке торусне многострукости са границом. Један такав пример илустрован је на слици 4.5, где је инверзна слика тачке A заправо унија две орбите. Наравно, исто важи и за произвољну тачку која припада шрафираној области на слици 4.5.

Пример 29. Вратимо се на пример 27. Лиувилово векторско поље X је радијално и показује од координатног почетка ка споља, а диск D^4 лежи управо са оне стране сфере са које је координатни почетак. Дакле, X показује из D^4 , па је граница конвексна и $(D^4, \omega_{\text{st}})$ је јако симплектичко попуњење многострукости (S^3, ξ_{st}) .

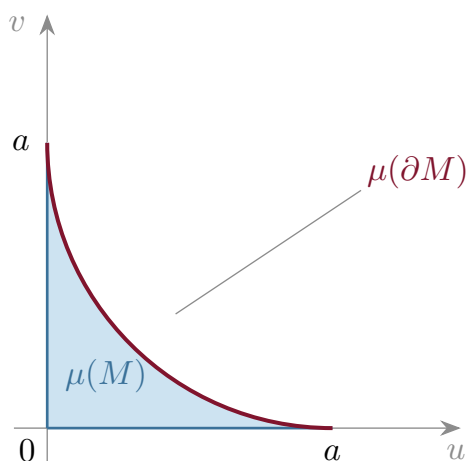


Слика 4.2 Моментна слика и смер Лиувиловог векторског поља.

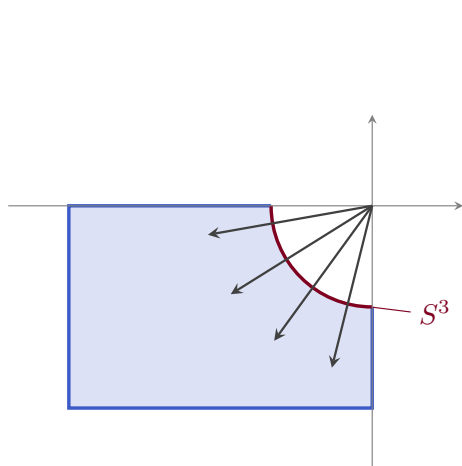
Напомена 21. Иако је моментна слика диска D^4 исти троугао који смо у глави 1 видели као Делцанов политоп многострукости $\mathbb{CP}^2$, јасно је да се не ради о истој многострукости. Делцанова кореспонденција из главе 2 успоставља бијекцију са *затвореним* симплектичким торусним многострукостима, па политопу као таквом одговара $\mathbb{CP}^2$, док диск D^4 има границу и није обухваћен овом класификацијом. Разлика се види у томе шта је инверзна слика хипотенузе при моментном пресликавању: у случају $\mathbb{CP}^2$ то је сфера која садржи фиксне тачке, док је у случају диска D^4 хипотенуза моментна слика границе, па је њена инверзна слика сфера S^3 на којој торус дејствује без фиксних тачака. Такође, у случају приказаном на слици 4.2, једино координатни почетак је теме политопа које одговара фиксној тачки дејства, док преостала два темена одговарају S^1 – орбитама, за разлику од $\mathbb{CP}^2$ и, уопште, затворених торусних многострукости, где знамо да свако од темена политопа увек одговара једној фиксној тачки.

Напомена 22. Одбацивањем претпоставке о томе да је симплектичка многострукост коју посматрамо *затворена* губимо и информацију о томе како у општем случају изгледа њена моментна слика – код многострукости које нису затворене, моментна слика не мора бити политоп. Већ међу областима у $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$, инваријантним у односу на стандардно $\mathbb{T}^n$ - дејство, које се називају *торусни домени*, моментне слике могу бити различите области у првом квадранту, чији криволинијски део границе одговара граничној хиперповрши. Један такав пример приказан је на слици 4.3.

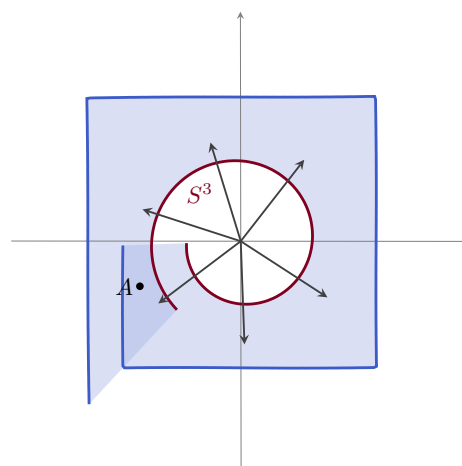
Пример 30. Примери симплектичких торусних многострукости са границом конкавног типа добијају се линеарним инсталацијама (енг. *линеар плумбингс*) диск раслојења над дводимензионалним сферама. Детаљан опис и конструкција ових многострукости могу се наћи у [30], док су примери одговарајућих моментних слика илустровани на сликама 4.4 и 4.5.



Слика 4.3 Моментна слика торусног домена са конвексном контактном границом у $\mathbb{C}^2$

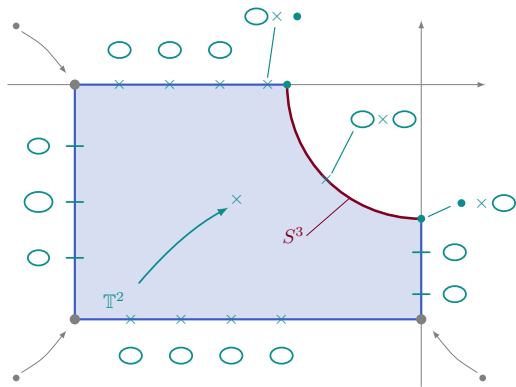


Слика 4.4 Симплектичка торусна многострукост са конкавном границом, при чему је граница сфера S^3 са затегнутом контактном структуром

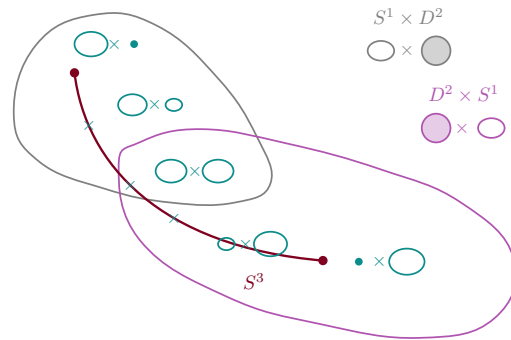


Слика 4.5 Симплектичка торусна многострукост са конкавном границом, при чему је граница сфера S^3 са заврнутом контактном структуром

Напомена 23. Посматрајмо моментну слику илустровану на слици 4.4. Три темена правоугаоника у овом случају одговарају фиксним тачкама дејства, док све остале тачке које припадају плавим ивицама одговарају S^1 -орбитама, а тачке у унутрашњости дводимензионалним торусима. Дакле, посебно је занимљиво посматрати црвени део границе политопа, чији крајеви одговарају S^1 -орбитама, а све унутрашње тачке торусима $\mathbb{T}^2$. Специјално, можемо приметити да се на овако нацртаној слици види како сферу S^3 можемо добити лепљењем два пуна торуса, $S^1 \times D^2$ и $D^2 \times S^1$, што је илустровано на слици 4.7.



Слика 4.6



Слика 4.7

4.3 Отворена питања

Рад ћемо закључити кратким прегледом питања која су у описаној области и даље отворена и која бисмо истакли као могуће правце даљег истраживања.

1. *Класификација симплектичких торусних многострукости са границом.*

Делцанова теорема из главе 2 у потпуности описује случај затворених многострукости, док у случају многострукости са границом класификација није позната. Конкретно – које се све моментне слике јављају у случају многострукости са конкавном или конвексном границом? Да ли се и у случају симплектичких торусних многострукости са границом може успоставити кореспонденција између ових и неких једноставнијих геометријских објеката, као што је то био случај у Делцановој теореди?

2. Међу примерима симплектичких торусних многострукости са конвексном границом се истичу торусни домени. Торусни домени су веома честа тема савремених истраживања – испитују се симплектичка улагања једног домена у други, као и симплектички капацитети, који се у овом случају могу израчунати из моментне слике. Било би веома занимљиво све ове особине испитивати на произвољној симплектичкој торусној многострукости са конвексном или конкавном границом, где до сада готово ништа није познато. Могу ли се и тада симплектички капацитети прочитати из моментне слике и када једна таква многострукост може уложити у другу симплектичким улагањем?

3. Као што смо већ поменули, торусни домени су пример симплектичких торусних многострукости са конвексном границом. Како описати симплектичке торусне многострукости са конвексном границом које нису торусни домени?

4. У димензији 3 свака контактна торусна многострукост јавља се као конкавна граница симплектичке торусне многострукости, што је доказано у [29] . Да ли поменуто тврђење важи и у димензијама већим од три?

Додатак А

Морсове и Морс-Ботове функције

А.1 Морсове функције

Нека је M глатка многострукост димензије n .

Дефиниција А1. За глатку функцију $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ кажемо да је *Морсова функција* на M ако су све њене критичне тачке недегенерисане.

Подсетимо се појмова који се јављају у претходној дефиницији. Тачка $p \in M$ је *критична тачка* функције f ако је $df_p = 0$. Критична тачка је *недегенерисана* ако је матрица Хесијана

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_p$$

несингуларна, при чему су $x_1, \dots, x_m$ локалне координате у околини тачке p . Приметимо да услов несингуларности матрице Хесијана не зависи од избора локалних координата. Нека је $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ глатка функција на глаткој многострукости M и нека је $p \in M$ критична тачка функције f .

Дефиниција А2. *Хесијан* функције f у тачки p је симетрично билинеарно пресликавање

$$d^2 f(p): T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

дефинисано са

$$d^2 f(p)(V_1, V_2) := V_1 \left(\tilde{V}_2(f) \right),$$

при чему је $\tilde{V}_2$ произвољно глатко векторско поље на M такво да је $\tilde{V}_2(p) = V_2$.

Није тешко доказати да је претходна дефиниција заиста добра, као и да овако дефинисаном пресликавању у координатама заиста одговара матрица Хесијана коју смо раније поменули.

Подсетимо се познате чињенице из линеарне алгебре — свако симетрично билинеарно пресликавање $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ може се дијагонализовати. Штавише, можемо га представити дијагоналном матрицом која на дијагонали има само 0, 1 или -1 .

Дефиниција А3. *Индекс* симетричног билинеарног пресликавања је број јединица са знаком $-$ у претходно наведеном дијагоналном запису.

Дефиниција A4. Индекс критичне тачке p функције f је индекс њеног Хесијана $d^2 f(p)$.

Лема A1. (Морсова лема) Нека је $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ глатка функција на глаткој многострукости M и нека је $p \in M$ недегенерисана критична тачка функције f индекса λ . Тада постоје координате на M у околини тачке p у којима функција f има облик

$$f(x) = f(p) - (x_1)^2 - \dots - (x_\lambda)^2 + (x_{\lambda+1})^2 + \dots + (x_m)^2.$$

Специјално, из Морсове леме непосредно следи да су недегенерисане критичне тачке нужно изоловане.

Нека је f Морсова функција на M . За $a \in \mathbb{R}$ означимо

$$M^a := f^{-1}(-\infty, a] = \{p \in M \mid f(p) \leq a\}.$$

Теорема A1. (Морс [36], Милнор [34])

- (а) Нека је $a < b$ и претпоставимо да је скуп $f^{-1}[a, b]$, који чине све тачке $p \in M$ за које је $a \leq f(p) \leq b$, компактан и да не садржи ниједну критичну тачку функције f . Тада је M^a дифеоморфно са M^b . Штавише, M^a је деформациони ретракт од M^b , па је инклузија $M^a \hookrightarrow M^b$ хомотопска еквиваленција.
- (б) Нека је p недегенерисана критична тачка индекса λ и нека је $f(p) = c$. Претпоставимо да је, за неко $\varepsilon > 0$, скуп $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ компактан и да не садржи ниједну критичну тачку функције f осим тачке p . Тада, за све довољно мале ε , скуп $M^{c+\varepsilon}$ има хомотопски тип простора $M^{c-\varepsilon}$ са залепљеном λ -ћелијом.
- (ц) Ако је сваки од скупова M^a компактан, онда многострукост M има хомотопски тип CW-комплекса који за сваку критичну тачку индекса λ има по једну ћелију димензије λ .

Нека је $b_k(M) := \dim H_k(M)$ k -ти Бетијев број многострукости M .

Теорема A2. (Морсове неједнакости, [36]) Нека је M компактна многострукост, f Морсова функција на M и нека је C_λ број критичних тачака функције f индекса λ . Тада важи:

- (а) $b_\lambda(M) \leq C_\lambda$,
- (б) $\sum_{\lambda} (-1)^\lambda b_\lambda(M) = \sum_{\lambda} (-1)^\lambda C_\lambda$, и
- (ц) $b_\lambda(M) - b_{\lambda-1}(M) + \dots \pm b_0(M) \leq C_\lambda - C_{\lambda-1} + \dots \pm C_0$.

Дефиниција А5. *Савршена Морсова функција* је Морсова функција за коју у претходном тврђењу све неједнакости постају једнакости.

Последица А1. Ако су све критичне тачке Морсове функције f парног индекса, онда је f савршена Морсова функција.

А.2 Морс–Ботове функције

Дефиниција А6. За глатку функцију $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ кажемо да је *Морс–Ботова* ако је скуп критичних тачака $\text{Crit } f$ унија подмногострукости многострукости M и ако је за свако $p \in \text{Crit } f$ индуковано пресликавање

$$d^2f(p): T_pM/T_pC \times T_pM/T_pC \rightarrow \mathbb{R}$$

недегенерисано, при чему је са C означена критична подмногострукост која садржи тачку p .

Критичне подмногострукости Морс–Ботове функције зовемо и *критичним многострукостима*. Приметимо да је Морсова функција специјалан случај Морс–Ботове – то је управо случај у ком су све критичне многострукости димензије нула, то јест изоловане тачке, па је количник T_pM/T_pC цео простор T_pM .

Дефиниција А7. *Индекс* повезане критичне многострукости C је димензија негативног сопственог потпростора Хесијана функције f на нормалном раслојењу од C , у ознаци n^- . Слично, *коиндекс* од C је димензија позитивног сопственог потпростора Хесијана на нормалном раслојењу од C . Ове димензије не зависе од избора тачке $x \in C$, па индекс и коиндекс произвољне критичне тачке $x \in C$ дефинишемо као индекс и коиндекс многострукости C .

Нека је (M, g) затворена повезана Риманова многострукост и $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ глатка функција. *Градијент* функције f је векторско поље ∇f јединствено одређено условом

$$df(v) = g(v, \nabla f), \quad v \in TM.$$

Хесијан функције f у тачки p је симетрична билинеарна форма $d^2f(p): T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$, као што смо већ видели. Овој форми можемо придружити линеарни оператор

$$\nabla^2 f(p): T_pM \rightarrow T_pM,$$

јединствено одређен условом

$$g(\nabla^2 f(p) u, v) = d^2f(p)(u, v), \quad u, v \in T_pM,$$

који ћемо такође звати Хесијаном у тачки p . Приметимо да је оператор $\nabla^2 f(p)$ самоадјунгован у односу на метрику g , што одговара симетричности билинеарне форме $d^2f(p)$.

Скуп критичних тачака Морс–Ботове функције се састоји од коначно много повезаних критичних многострукости. За сваку критичну многострукост C и свако $p \in C$ тангентни простор се цепа на директну суму

$$T_x M = T_x C \oplus E_x^+ \oplus E_x^-,$$

при чему су E_x^+ и E_x^- разапети позитивним, односно негативним сопственим просторима оператора $\nabla^2 f(x)$.

Нека је $\varphi_t: M \rightarrow M$ негативни градијентни ток, то јест важи $\frac{d}{dt}\varphi_t = -\nabla f \circ \varphi_t$, $\varphi_0 = \text{id}$. Скуп тачака чије трајекторије конвергирају ка C када $t \rightarrow +\infty$ је подмногострукост $W^s(C)$, коју зовемо *стабилном многострукошћу* од C и која је дуж C тангентна на $TC \oplus E^+$. Аналогно, тачке чије трајекторије конвергирају ка C када $t \rightarrow -\infty$ чине *нестабилну многострукост* $W^u(C)$, тангентну на $TC \oplus E^-$. Како функција f опада дуж трајекторија тока φ_t , а многострукост је затворена, свака трајекторија конвергира некој критичној многострукости, па важи

$$M = \bigcup_C W^s(C) = \bigcup_C W^u(C).$$

За индекс и коиндекс критичне многострукости C важе следеће једнакости:

$$\begin{aligned} n^-(C) &= \dim W^u(C) - \dim C = \text{codim } W^s(C), \\ n^+(C) &= \dim W^s(C) - \dim C = \text{codim } W^u(C). \end{aligned}$$

Лема А2. (*Морс–Ботова лема*) Нека је $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Морс–Ботова функција на глаткој многострукости M димензије n , нека је $p \in \text{Crit}(f)$ и нека је C критична многострукост која садржи тачку p , кодимензије m , индекса $n^-(C) = k$. Тада постоје координате на M у околини тачке x у којима функција f има облик

$$f = f(x) - x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_m^2.$$

Специјално, за $m = n$ добијамо управо Морсову лему А1.

Лема А3. Нека је $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Морс – Ботова функција на затвореној, повезаној многострукости M чије критичне многострукости све имају индекс и коиндекс различит од 1. Тада је скуп нивоа $f^{-1}(c)$ повезан за свако $c \in \mathbb{R}$.

Доказ. Означимо са C_0 унију свих критичних многострукости индекса нула. За њих је $\dim W^s(C) = n$, па је $W^s(C_0)$ отворен скуп. За све преостале критичне многострукост индекс је различит од нуле, а по претпоставци и од 1, те је индекс барем 2. Стога је комплемент скупа $W^s(C_0)$ коначна унија подмногострукости кодимензије бар 2, па је отворен скуп $W^s(C_0)$ повезан, а како је C_0 његов деформациони ретракт, он је и сам повезан. Прецизније, постоји тачно једна критична

многострукост индекса нула. Како је C_0 повезана, функција f је на њој константна, а како су тачке индекса нула управо локални минимуми, та константа је $\min f$ и важи $f^{-1}(\min f) = C_0$. Дакле, $f^{-1}(\min f)$ је повезан. Применом истог аргумента на $-f$, чији су индекс и коиндекс замењени, добијамо да постоји тачно једна критична многострукост коиндекса нула и да је $f^{-1}(\max f)$ повезан. Доказ у општем случају се може наћи у [31]. $\square$

У свакој од наредних помоћних лема претпостављамо да је (M^{2m}, ω) затворена, повезана симплектичка многострукост на којој је дефинисано Хамилтоново дејство $\varphi: \mathbb{T}^n \longrightarrow \text{Symp}(M, \omega)$ са моментним пресликавањем $\mu: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Лема А4. Постоји скоро-комплексна структура J на M која је компатибилна са ω и која је инваријантна у односу на дејство торуса, то јест важи $d\varphi_t \circ J = J \circ d\varphi_t$, за све $t \in \mathbb{T}^n$ (или, еквивалентно, $\varphi_t^* J = J$ за све $t \in \mathbb{T}^n$).

Доказ. Како увек постоји скоро-комплексна структура компатибилна са ω (тврђење 4.1.1 у [31]), можемо изабрати $J_0: TM \longrightarrow TM$ тако да важи $J_0^2 = -\text{id}$ и

$$\omega(J_0 u, J_0 v) = \omega(u, v),$$

за све $u, v \in TM$ и $\omega(u, J_0 u) > 0$ за $u \neq 0$. Додатно, израз $g_0(\cdot, \cdot) := \omega(\cdot, J_0 \cdot)$ дефинише Риманову метрику на M . Како је торус $\mathbb{T}^n$ компактна група, то је изразом

$$g_{inv} = \int_{\mathbb{T}^n} \varphi_t^* g \, d\mu(t)$$

добро дефинисана Риманова метрика на M која је инваријантна у односу на дејство, а што је директна последица инваријантности Харове мере μ на $\mathbb{T}^n$. Коначно, скоро-комплексна структура коју на стандардан начин добијамо полазећи од инваријантне метрике (видети тврђење 2.5.6 у [31]), ће и сама бити инваријантна. $\square$

Лема А5. Нека је $G \subset \mathbb{T}^n$ подгрупа. Тада је скуп фиксних тачака рестрикције дејства G на M , $\text{Fix}(G) = \bigcap_{t \in G} \text{Fix}(\varphi_t)$, симплектичка подмногострукост од M .

Доказ. Нека је $p \in \text{Fix}(G)$ и посматрајмо

$$d\varphi_t|_p: T_p M \longrightarrow T_p M, \quad \text{за } t \in G.$$

Желимо да покажемо да је $\text{Fix}(G)$ подмногострукост од M инваријантна у односу на скоро-комплексну структуру J компатибилну са ω , одакле директно закључујемо да је симплектичка, према леми 1. Посматрајмо на M скоро-комплексну структуру из леме А4. Како је дејство симплектичко и скоро-комплексна структура инваријантна у односу на дејство, то $d\varphi_t$ чува и одговарајућу инваријантну метрику g . Даље, посматрајмо експоненцијално пресликавање $\exp: T_p M \longrightarrow M$ у односу на ову метрику, које је такође еквиваријантно, у смислу да важи

$$\exp_p(d\varphi_t|_p(X)) = \varphi_t(\exp_p(X)), \quad \text{за } t \in G \text{ и } X \in T_p M$$

(изометрије сликају геодезијске у геодезијске). Одаберимо околину U од $0 \in T_p M$ на којој је $\exp_p$ дифеоморфизам и нека је $V := \exp_p(U)$. Да бисмо доказали да је $\text{Fix}(G)$ заиста подмногоструктурност од M , довољно је уочити да важи

$$\exp_p^{-1}(\text{Fix}(G) \cap V) = U \cap \bigcap_{t \in G} \ker(I - d\varphi_t|_p).$$

За то је довољно приметити следеће: ако је $X \in U$, тада важи

$$\exp_p(X) \in \text{Fix}(G) \iff \varphi_t(\exp_p(X)) = \exp_p(X), \quad \text{за све } t \in G.$$

Из еквиваријантности експоненцијалног пресликавања закључујемо да претходно значи исто што и $\exp_p(X) = \exp_p(d\varphi_t|_p(X))$, за све $t \in G$.

Како је рестрикција $\exp_p$ на U инјективна, ово је даље еквивалентно са

$$d\varphi_t|_p(X) = X,$$

за све $t \in G$ и, коначно, са

$$X \in \bigcap_{t \in G} \ker(I - d\varphi_t|_p).$$

Одавде последично закључујемо и да је

$$T_p \text{Fix}(G) = \bigcap_{t \in G} \ker(I - d\varphi_t|_p).$$

Како је $\ker(I - d\varphi_t|_p)$ инваријантно у односу на скоро-комплексну структуру, таква је и подмногоструктурност $\text{Fix}(G)$ и то завршава доказ. $\square$

Лема А6. Функција $\mu^X = \langle \mu, X \rangle: M \longrightarrow \mathbb{R}$ је Морс–Ботова функција чије су критичне многострукости парне димензије и парног индекса, за свако $X \in \mathbb{R}^n$. Додатно, скуп критичних тачака функције μ^X , $\text{Crit}(\mu^X) = \bigcap_{t \in T_X} \text{Fix}(\varphi_t)$, је симплектичка подмногоструктурност, при чему је

$$T_X = (\{s \cdot X + k \mid s \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^n\}) / 2\pi\mathbb{Z}^n$$

затворен подторус генерисан са X .

Доказ. Како је ω недегенерисана, $d\mu^X(p) = 0$ ако и само ако је p нула векторског поља $X^\#$, које је генератор дејства. Дакле, скуп критичних тачака функције μ^X можемо видети на следећи начин:

$$\text{Crit}(\mu^X) = \{p \in M \mid X^\#(p) = 0\} = \text{Fix}\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Претпоставимо за почетак да X има линеарно независне координате над $\mathbb{Q}$. Тада је скуп $\{sX + k \mid s \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^n\}$ густ у $\mathbb{R}^n$. Ако је p фиксна тачка једнопараметарске

подгрупе $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$, онда из непрекидности дејства закључујемо да је p фиксна тачка затворања ове подгрупе, а што је цео торус $\mathbb{T}^n$. Дакле, важи

$$\text{Crit}(\mu^X) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^n} \text{Fix}(\varphi_t).$$

Према лемџ А5, постављајући $G = \mathbb{T}^n$, $\text{Crit}(\mu^X)$ је симплектичка подмногострукост од M . Да бисмо комплетирали доказ, преостаје да се уверимо у две ствари. За почетак, да би μ^X била Морс–Ботова функција, треба доказати да је Хесијан функције μ^X недегенерисан у сваком правцу трансверзалном на $\text{Crit}(\mu^X)$. Затим ћемо показати да се нормално раслојење подмногострукости $\text{Crit}(\mu^X)$ цепа на директну суму стабилног и нестабилног подраслојења, као и да је свако од њих парног ранга у свакој тачки. Фиксирајмо тачку $p \in \text{Crit}(\mu^X)$ и посматрајмо Хесијан функције μ^X

$$\nabla^2 \mu^X(p): T_p M \longrightarrow T_p M.$$

Приметимо да за $\mathbb{T}^n$ -инваријантну скоро-комплексну структуру J и њој одговарајућу Риманову метрику g на M важи $X^\# = J\nabla \mu^X$. Са једне стране, из дефиниције градијента функције μ^X знамо да за све $v \in T_p M$ важи

$$d\mu^X(v) = g(\nabla \mu^X, v) = \omega(\nabla \mu^X, Jv) = -\omega(J\nabla \mu^X, v),$$

при чему смо у овом низу једнакости користили компатибилност J са ω . Са друге стране, како је μ^X Хамилтонијан векторског поља $X^\#$ (по дефиницији), важи и $-d\mu^X(v) = \omega(X^\#, v)$. Коначно, закључак $X^\# = J\nabla \mu^X$ следи из недегенерисаности симплектичке форме ω . Даље, приметимо да важи

$$\begin{aligned} d(X^\#(p)) &= d(J_p \nabla \mu^X(p)) \\ &= dJ_p \underbrace{\nabla \mu^X(p)}_0 + J_p \cdot d(\nabla \mu^X)(p) \\ &= J_p \cdot \nabla^2 \mu^X(p), \end{aligned}$$

и означимо

$$\Phi_t^X := \exp(tJ_p \nabla^2 \mu^X(p)) = d(\varphi_{\exp(tX)})|_p.$$

Сада можемо приметити да је $\ker \nabla^2 \mu^X(p)$ управо скуп фиксних тачака пресликавања Φ_t^X . Како су координате вектора X линеарно независне над $\mathbb{Q}$, претходно поменути скуп одговара скупу фиксних тачака матрица $d\varphi_t|_p$ за све $t \in \mathbb{T}^n$ и, последично, важи

$$T_p \text{Crit}(\mu^X) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^n} \ker(I - d\varphi_t|_p) = \ker \nabla^2 \mu^X(p),$$

чиме смо доказали да је функција μ^X Морс–Ботова. Даље, приметимо да Φ_t^X чува g и комутира са J_p , за свако $t \in \mathbb{R}$, то јест важи

$$(\Phi_t^X)^* g_p = g_p, \quad \text{као и} \quad \Phi_t^X J_p = J_p \Phi_t^X.$$

Диференцирањем друге једнакости по t и евалуирањем у $t = 0$ долазимо до следећег закључка:

$$\begin{aligned}\Phi_t^X J_p &= J_p \Phi_t^X \Big/ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \\ (J_p \nabla^2 \mu^X(p)) J_p &= J_p (J_p \nabla^2 \mu^X(p)) \\ J_p \nabla^2 \mu^X(p) J_p &= J_p^2 \nabla^2 \mu^X(p) = -\nabla^2 \mu^X(p) \Big/ \cdot J_p \\ J_p \nabla^2 \mu^X(p) &= \nabla^2 \mu^X(p) J_p,\end{aligned}$$

то јест Хесијан функције μ^X комутира са скоро комплексном структуром. Ова чињеница ће нам бити кључна у доказу J -инваријантности сопствених потпростора од $\nabla^2 \mu^X(p)$, а одакле ћемо закључити и да је сваки од њих парне димензије. Како је Хесијан самоадјунгован у односу на Риманову метрику, $T_p M$ се цепа на директну суму реалних потпростора $E_\lambda := \ker(\nabla^2 \mu^X(p) - \lambda I)$. Ако је $v \in E_\lambda$ сопствени вектор, онда важи

$$\nabla^2 \mu^X(p) (J_p v) = J_p \nabla^2 \mu^X(p) v = J_p (\lambda v) = \lambda (J_p v),$$

то јест $J_p v$ је такође сопствени вектор и E_λ је инваријантан у односу на J_p . Овим смо завршили доказ у случају да су координате вектора X линеарно независне над $\mathbb{Q}$. Приметимо да смо овде поново доказали да је $T_p \text{Crit}(\mu^X)$ симплектички потпростор од $T_p M$, али на другачији начин у односу на доказ изложен у претходној леми. Доказ у општем случају се изводи на исти начин, посматрањем рестрикције дејства на затворен подторус T_X . $\square$

Лема А7. Скуп нивоа $\mu^{-1}(\eta)$ је повезан за сваку регуларну вредност $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по n , то јест по димензији торуса. У случају $n = 1$, тврђење следи директно из леме 5 и леме А3. Даље, претпоставимо да тврђење из теореме важи за Хамилтоново дејство торуса димензије $n - 1$. Додатно, претпоставимо да је моментно пресликавање дејства торуса $\mathbb{T}^n$ несводљиво (у случају да је μ сводљиво, оно нема регуларних вредности).

Функција $\mu^X = \sum_{j=1}^n X_j \mu_j$ није константна ни за једно $X \in \mathbb{R}^n$ и у овом случају $Z = \bigcup_{X \neq 0} \text{Crit}(\mu^X)$ је у ствари пребројива унија правих подмногострукости од M . Према Беровој теорему о категорији, скуп $M \setminus Z$ је густ у M . Додатно, $p \in M \setminus Z$ ако и само ако су $d\mu_1(p), \dots, d\mu_n(p)$ линеарно независни, одакле закључујемо да је скуп $M \setminus Z$ отворен.

Даље, покажимо да је пресек скупа регуларних вредности пресликавања μ и слике од μ густ у $\mu(M)$. Ово је директна последица чињенице да је $M \setminus Z$ густ у M и Сардове теореме. Сличан аргумент гарантује да је скуп тачака $\eta \in \mu(M)$ таквих да је $(\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ регуларна вредност пресликавања $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ такође густ у $\mu(M)$. Даље, нека је $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ регуларна вредност од μ и додатно претпоставимо да је $(\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ регуларна вредност од $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1})$. Покажимо да је

$\mu^{-1}(\eta)$ повезан. Према индуктивној хипотези, многострукост $Q := \bigcap_{j=1}^{n-1} \mu_j^{-1}(\eta_j)$ је повезана. Посматрајмо рестрикцију функције μ_n на Q . Тачка $p \in Q$ је критична тачка функције $\mu_n|_Q$ ако и само ако постоје $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ такви да је

$$\sum_{j=1}^{n-1} X_j d\mu_j(p) + d\mu_n(p) = 0. \quad (*)$$

Приметимо да $(*)$ заправо значи да је p критична тачка функције $\mu^X : M \rightarrow \mathbb{R}$, где је $X = (X_1, \dots, X_{n-1}, 1) \in \mathbb{R}^n$. Према леми 5, скупови критичних тачака функције μ^X су парно-димензионалне многострукости парног индекса. Нека је $C \subset M$ критична многострукост функције μ^X којој припада тачка p и докажимо да се C и Q секу трансверзално у p , то јест да важи $T_p M = T_p C + T_p Q$. Претходно важи ако и само ако су рестрикције линеарних функционала $d\mu_j(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ на $T_p C$, за $j = \overline{1, n-1}$ линеарно независне. Према леми 5, C је симплектичка подмногострукост од M . Како Хамилтонов ток од μ^X комутира са током векторског поља X_j , из претходног можемо закључити да он чува критичну многострукост C . Ако ток чува подмногострукост C , онда је векторско поље које га генерише тангентно на C у свакој тачки $p \in C$. Даље, ако са X_j означимо векторско поље чији је Хамилтонијан μ_j , важи $X_j(p) \in T_p C$, за $j = \overline{1, n-1}$ и за све $p \in C$. Према претпоставци, како су $d\mu_1(p), \dots, d\mu_{n-1}(p)$ линеарно независни и ω недегенерисана, то су и $X_1(p), \dots, X_{n-1}(p)$ линеарно независни у $T_p M$, а затим и у $T_p C$. Како је C симплектичка подмногострукост, то је $\omega|_{T_p C}$ недегенерисана и за сваки ненула вектор $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$ постоји ненула вектор $\xi \in T_p C$ такав да важи

$$0 \neq \omega \left(\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j X_j(p), \xi \right) = - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j d\mu_j(p) \xi.$$

Коначно, линеарни функционали $d\mu_j(p) : T_p C \rightarrow \mathbb{R}$ су линеарно независни, то јест C и Q се секу трансверзално у p . Додатно, како је C симплектичка подмногострукост од M , то важи и $T_p M = T_p C \oplus (T_p C)^\omega$, где је

$$(T_p C)^\omega = \{ v \in T_p M \mid \omega_p(u, v) = 0, \text{ за све } u \in T_p C \}$$

симплектички ортогонал од $T_p C$. Одавде даље закључујемо да је $T_p Q \cap (T_p C)^\omega$ комплемент од $T_p C \cap T_p Q = T_p(C \cap Q)$ у $T_p Q$. Како је $T_p C = \ker \nabla^2 \mu^x(p)$, можемо закључити да је $\nabla^2 \mu^x(p) = 0$ на $T_p(C \cap Q)$, али на $T_p Q \cap (T_p C)^\omega$ Хесијан остаје недегенерисан и $C \cap Q$ је критична многострукост парног индекса и коиндекса за $\mu^X|_Q$. Како се $\mu_n|_Q$ и μ^X разликују само за константу $\sum_{j=1}^{n-1} X_j \mu_j$, исти закључак важи и за $\mu_n|_Q$. Овим смо доказали да је функција $\mu_n : Q \rightarrow \mathbb{R}$ Морс–Ботова функција чије су критичне многострукости парног индекса и, додатно, како је η регуларна вредност од μ то је и η_n регуларна вредност од $\mu_n|_Q$. Поново по леми А3 следи да је скуп нивоа $\mu^{-1}(\eta) = Q \cap \mu_n^{-1}(\eta_n)$ повезан. Овим смо завршили доказ

у случају када је η регуларна вредност од μ и $(\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ регуларне вредност од $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1})$. У општем случају, закључак следи из тога што је скуп оваквих тачака густ у $\mathbb{R}^n$. □

Додатак Б

Други приступ доказу Делцанове кореспонденције

Доказ егзистенције

Нека је Δ Делцанов политоп који је, стандардно, описан као скуп

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, v_i \rangle \geq \lambda_i, i = \overline{1, d}\},$$

при чему су $v_i \in \mathbb{Z}^n$, $i = \overline{1, d}$, примитивни вектори нормале на свакој од d страна политопу Δ који показују ка унутра и $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, d}$. Додатно, означимо поново са λ уређену d -торку $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$.

Како је свака Лијева група паралелизабилна, тангентно раслојење торуза $\mathbb{T}^n$ је тривијално и важи $T(\mathbb{T}^n) \cong \mathbb{T}^n \times \mathfrak{t}^n$, ако са $\mathfrak{t}^n$ означимо одговарајућу Лијеву алгебру. Одавде једноставно закључујемо да важи и $T^*\mathbb{T}^n \cong \mathbb{T}^n \times (\mathfrak{t}^n)^*$ и на $T^*(\mathbb{T}^n)$ посматрајмо симплектичку форму на која се у локалним координатама изражава као

$$\omega_{\text{st}} = \sum_{k=1}^n dq_k \wedge dp_k.$$

Даље, приметимо да се множење у групи $\mathbb{T}^n$ подиже до симплектоморфизма на котангентном раслојењу и то на следећи начин.

Ако је $\varphi_t: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, $\varphi_t(x) = x \cdot t$, онда је

$$\begin{aligned} \varphi_t^\# : T^*\mathbb{T}^n &\longrightarrow T^*\mathbb{T}^n \\ \varphi_t^\#(x, v) &= (\varphi_t(x), ((d\varphi_t)_x)^{-1})^*v), \end{aligned}$$

симплектоморфизам. Дејство Лијеве групе $\mathbb{T}^n$ на $T^*\mathbb{T}^n$ дефинисано са $t \mapsto \varphi_t^\#$ зовемо *стандардним дејством* и оно у локалним координатама изгледа као

$$(p'_1, \dots, p'_n) * (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \longmapsto (p_1 + p'_1, \dots, p_n + p'_n, q_1, \dots, q_n).$$

Лако се можемо уверити у то да је стандардно дејство Хамилтоново, са моментним пресликавањем $\text{pr}_2: \mathbb{T}^n \times (\mathfrak{t}^n)^* \rightarrow (\mathfrak{t}^n)^*$,

$$\text{pr}_2(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = (q_1, \dots, q_n).$$

Нека је $\rho_\Delta: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^n$ хомоморфизам Лијевих група дефинисан са

$$(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d}) \mapsto \left(e^{i \sum_{k=1}^d a_k v_k^1}, \dots, e^{i \sum_{k=1}^d a_k v_k^n} \right).$$

Приметимо да је $(D\rho_\Delta)_e: \mathbb{R}^d \cong \mathfrak{t}^d \rightarrow \mathfrak{t}^n \cong \mathbb{R}^n$ управо пресликавање π са почетка оригиналног доказа егзистенције, јер важи

$$\begin{aligned} (D\rho_\Delta)_e(e_k) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho_\Delta(1, \dots, e^{it}, \dots, 1) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (e^{itv_k^1}, \dots, e^{itv_k^n}) = v_k. \end{aligned}$$

Посматрајмо дејство d -димензионалног торуса $\mathbb{T}^d$ на $T^*(\mathbb{T}^n)$ дефинисано композицијом ρ_Δ са стандардним дејством $\mathbb{T}^n$ на $T^*\mathbb{T}^n$ које смо раније дефинисали. Овако дефинисано дејство је Хамилтоново са моментним пресликавањем

$$\nu_\Delta = (D\rho_\Delta)^* \circ \text{pr}_2,$$

до на константу, при чему је $(D\rho_\Delta)^*: (\mathfrak{t}^n)^* \rightarrow (\mathfrak{t}^d)^*$ адјунговани оператор од $(D\rho_\Delta)_e$, те важи

$$\langle (D\rho_\Delta)_e^* \xi, e_k \rangle = \langle \xi, ((D\rho_\Delta)_e(e_k)) \rangle = \langle \xi, v_k \rangle,$$

и, последично,

$$(D\rho_\Delta)_e^* \xi = \sum_{k=1}^d \langle \xi, v_k \rangle \cdot e_k,$$

за произвољно $\xi \in (\mathfrak{t}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$. Фиксирајмо моментно пресликавање $\nu_\Delta: T^*\mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ дефинисано са

$$\nu_\Delta(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = (D\rho_\Delta)_e^* \circ \text{pr}_2(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) - \lambda.$$

Ако означимо $(p_1, \dots, p_n)$ са p и $(q_1, \dots, q_n)$ са q , добијамо

$$\nu_\Delta(p, q) = \sum_{k=1}^d \langle q, v_k \rangle e_k - (\lambda_1, \dots, \lambda_d).$$

Уочимо дејство торуса $\mathbb{T}^d$ на симплектичкој многострукости $(\mathbb{C}^d, \frac{i}{2} \sum_{k=1}^d dz_k \wedge d\bar{z}_k)$ дефинисано са $(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d}) * (z_1, \dots, z_d) = (e^{-i\theta_1} z_1, \dots, e^{-i\theta_d} z_d)$. Слично као у ранијем примеру (овде са обрнутим знаком), ово дејство је Хамилтоново са моментним пресликавањем $(z_1, \dots, z_d) \mapsto -\frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_d|^2)$.

Коначно имамо све што је неопходно да бисмо формулисали и доказали следеће тврђење:

Тврђење А1. Нека је $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ Делцанов политоп који има d страна. Посматрајмо производ многострукости $T^*\mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^d$ са симплектичком формом

$$\sum_{k=1}^n dq_k \wedge dp_k + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^d dz_k \wedge d\bar{z}_k,$$

дејством торуза $\mathbb{T}^d$ на сваком од фактора дефинисаним као раније и моментним пресликавањем

$$\mu: ((p, q), z) \mapsto \sum_{k=1}^d \langle q, v_k \rangle e_k - (\lambda_1, \dots, \lambda_d) - \frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_d|^2).$$

Тада је дејство торуза $\mathbb{T}^d$ слободно на нултом нивоу пресликавања μ , па је простор добијен симплектичком редукцијом симплектичка многострукост. Важи и више – то је заправо симплектичка торусна многострукост димензије $2n$ чија је моментна слика управо политоп Δ .

Симплектичку торусну многострукост добијену на овај начин ћемо означавати са $(E^\Delta, \omega^\Delta)$ и зваћемо је *Лерманова симплектичка торусна многострукост придружена политопу Δ* .

Доказ. Нека је $((p, q), z) \in \mu^{-1}(\{0\})$, тј. важи

$$\sum_{k=1}^d \langle q, v_k \rangle e_k = \lambda + \frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_d|^2).$$

Ако је $z_k \neq 0$, k -ти фактор у $\mathbb{T}^d$ свакако слободно дејствује на $((p, q), z)$. Дакле, треба проверити шта се дешава на оним k за које је $z_k = 0$. Нека је I скуп свих таквих k и посматрајмо

$$T_I = \{(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{T}^d \mid t_k = 1 \text{ за } k \notin I\}.$$

По аналогном аргументу као раније у доказу егзистенције, рестрикција $\rho_\Delta|_{T_I}$ је инјективна, па како $\mathbb{T}^n$ слободно дејствује на $T^*\mathbb{T}^n$, исто ради и T_I . Дакле, дејство $\mathbb{T}^d$ на $\mu^{-1}(\{0\})$ је слободно, па применом теореме 8 добијамо симплектичку многострукост $(E^\Delta, \omega^\Delta)$.

Добијена многострукост наслеђује и $\mathbb{T}^n$ -дејство индуковано стандардним дејством $\mathbb{T}^n$ на $T^*\mathbb{T}^n$ чије је моментно пресликавање $[((p, q), z)] \mapsto q$. Приметимо да је овакво дејство добро дефинисано јер $\mathbb{T}^d$ -дејство чува q . Коначно, $q \in (\mathfrak{t}^n)^*$ је у моментној слици за неко $((p, q), z) \in \mu^{-1}(\{0\})$ ако и само ако постоји $z \in \mathbb{C}^d$ такво да важи

$$\sum_{k=1}^d \langle q, v_k \rangle e_k = \lambda + \frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_d|^2),$$

тј.

$$\langle q, v_k \rangle \geq \lambda_k, \quad \text{за } k = \overline{1, d},$$

а што управо значи $q \in \Delta$. □

Доказ јединствености

У претходном одељку је доказан део Делцанове теореме који се односи на егзистенцију симплектичке многострукости која одговара политопу Δ . Као и у оригиналном Делцановом доказу, доказ инјективности је доста сложенији и за њега ће нам бити неопходно да дефинишемо још неколико појмова. Један од њих је природно уопштење Делцановог политопа — *Делцанов полиедар*.

Дефиниција А8. *Конвексан полиедар* у $\mathbb{R}^n$ је скуп облика

$$P = \bigcap_{i=1}^d \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v_i \rangle \geq c_i\},$$

за коначно много $v_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $c_i \in \mathbb{R}$.

Одмах из дефиниције видимо да полиедар има исту презентацију преко коначног пресека полупростора као и политоп, с тим што у случају конвексног полиедра скуп P не мора бити ограничен. За конвексан полиедар Δ кажемо да је *Делцанов* ако је прост, рационалан и гладак, при чему се ове особине дефинишу исто као у случају политопа. Овакви објекти се природно појављују у класификацији некомпактних торусних многострукости.

Дефиниција А9. Нека је Δ n -димензионални Делцанов полиедар са d страна и нека је $(M, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ Хамилтонов $\mathbb{T}^n$ -простор. *Простор добијен сечењем* $(M, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ у односу на Δ је Хамилтонов $\mathbb{T}^n$ -простор добијен симплектичком редукцијом на нултом нивоу производ многострукости $M \times \mathbb{C}^d$ са симплектичком формом $\omega + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^d dz_k \wedge d\bar{z}_k$, дијагоналним дејством торуса $\mathbb{T}^d$ дефинисаном као у доказу егзистенције, као и моментним пресликавањем

$$(p, z) \mapsto \sum_{k=1}^d \langle \mu(p), v_k \rangle e_k - \lambda - \frac{1}{2} (|z_1|^2, \dots, |z_d|^2).$$

Специјално, приметимо да је простор добијен сечењем

$$(T^*\mathbb{T}^n, \sum_{k=1}^n dq_k \wedge dp_k, \mathbb{T}^n, pr_2),$$

у односу на политоп Δ управо Лерманова симплектичка торусна многострукост $(E^\Delta, \omega^\Delta)$.

Сада смо коначно спремни да пређемо на доказ главног тврђења.

Теорема А3. Нека је $(M^{2n}, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ симплектичка торусна многострукост чија је моментна слика $\Delta := \mu(M)$. Тада је $(M^{2n}, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ еквиваријантно симплектоморфна Лермановој симплектичкој торусној многострукости $(E^\Delta, \omega^\Delta)$, придруженој политопу Δ .

Доказ. Нека је $\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, v_k \rangle \geq \lambda_k, k = 1, \dots, d\}$ и фиксирајмо $k_1 \in \{1, \dots, d\}$. Означимо са Δ_1 страну политопа која одговара индексу k_1 , то јест

$$\Delta_1 := \Delta \cap \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, v_{k_1} \rangle = \lambda_{k_1}\}.$$

Даље, нека је $S := \mu^{-1}(\Delta_1) \subset M$. Приметимо да је S компонента повезаности скупа критичних тачака $\mu^{v_{k_1}}$, односно скупа фиксних тачака подгрупе

$$T := \{\exp(tv_{k_1}) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

и као таква је симплектичка подмногострукост од M , према леми 5, и то кодимензије 2. Према томе, у свакој тачки $p \in M$ важи

$$T_p M = T_p S \oplus (T_p S)^\omega$$

и можемо говорити о симплектичком нормалном раслојењу $(TS)^\omega \longrightarrow S$ чији је сваки слој $(T_p S)^\omega$, те је раслојење димензије 2. На $(TS)^\omega$ можемо задати структуру хермитског линијског раслојења и то на следећи начин. По леми 3, постоји компатибилна $\mathbb{T}^n$ -инваријантна скоро комплексна структура $J : (TS)^\omega \longrightarrow (TS)^\omega$ у односу на коју сваки слој $(T_p S)^\omega$ можемо идентификовати са $\mathbb{C}$, а последично и $(TS)^\omega$ можемо посматрати као једнодимензионално комплексно раслојење. Даље, уколико фиксирамо Риманову метрику $g(u, v) := \omega(u, Jv)$, скаларни производ на раслојењу можемо дефинисати по слојевима са $h_p(u, v) = g_p(u, v) - i \cdot \omega(u, v)$, за $u, v \in (T_p S)^\omega$. Дефинисани скаларни производ природно дефинише норму на сваком слоју $(T_p S)^\omega$ са $\|v\|_p := \sqrt{h_p(v, v)}$. Сада можемо посматрати јединично сферно раслојење $Q \longrightarrow S$ које је подраслојење од $(TS)^\omega \longrightarrow S$. Прецизније,

$$Q = \{v \in (TS)^\omega \mid \|v\| = 1\}.$$

- $\Pi_S : Q \rightarrow S$ је $\mathbb{T}^n$ -еквиваријантно главно S^1 -раслојење

$Q|_p$ је јединични круг унутар $(T_p S)^\omega \cong \mathbb{C}$ на ком можемо посматрати стандардно S^1 -дејство множењем, тј.

$$v \longmapsto e^{is} \cdot v.$$

Како ово дејство чува норму индуковану са h , то се посматрано дејство рестрикује на дејство на $Q|_p$. На јединичном кругу у $\mathbb{C}$ ово дејство је заправо ротација, па је оно слободно и транзитивно чиме смо доказали да је $Q \longrightarrow S$ заиста главно S^1 -раслојење. Да бисмо доказали да је раслојење $\mathbb{T}^n$ -еквиваријантно треба видети како $\mathbb{T}^n$ дејствује на Q . За почетак, како је μ $\mathbb{T}^n$ -инваријантно, то се дејство може рестриковати са M на S , то јест можемо посматрати

$$\varphi_t|_S : S \longrightarrow S, \quad \text{за } t \in \mathbb{T}^n.$$

Даље, можемо посматрати $d\varphi_t|_p : T_p M \longrightarrow T_{t*p} M$, за $p \in S$. Како φ_t слика S у S , то $d\varphi_t|_p$ слика $T_p S$ у $T_{t*p} S$ и додатно, како је φ_t симплектоморфизам, то $d\varphi_t|_p$ слика

$(T_p S)^\omega$ у $(T_{t*p} S)^\omega$, односно важи

$$d\varphi_t|_p((T_p S)^\omega) = (T_{t*p} S)^\omega.$$

Конечно, дејство $\mathbb{T}^n$ на $(TS)^\omega$ можемо дефинисати са

$$t * v := d\varphi_t|_p(v), \quad \text{за } v \in (T_p S)^\omega.$$

Овако дефинисано дејство слика слој над p линеарним изоморфизмом у слој над $t * p$. Додатно, како φ_t чува ω , J и g , то $d\varphi_t|_p$ такође чува ω , J и g . Специјално, $d\varphi_t|_p$ чува норму $\|\cdot\|_p$ и управо је то разлог због ког се $\mathbb{T}^n$ -дејство са $(TS)^\omega$ може рестриковати на Q .

Да бисмо доказали да је $Q \longrightarrow S$ заиста $\mathbb{T}^n$ -еквиваријантно главно S^1 -раслојење, треба проверити два услова:

1. $\Pi_S(t * v) = t * \Pi_S(v)$, за $t \in \mathbb{T}^n$, $v \in Q$ — важи директно из дефиниције дејства $\mathbb{T}^n$ на Q ,
2. $t * (s * v) = s * (t * v)$, за $t \in \mathbb{T}^n$, $s \in S^1$, $v \in Q$, односно дејство комутира са S^1 -дејством на Q

Ако фиксирамо $v \in Q|_p$, $t \in \mathbb{T}^n$ и $s \in S^1$, приметимо да заправо треба доказати

$$d\varphi_t|_p(s \cdot v) = s \cdot (d\varphi_t|_p(v)),$$

што је еквивалентно са тим да је $d\varphi_t$ комплексно линеарно пресликавање, а што следи из $\mathbb{T}^n$ -инваријантности скоро комплексне структуре J .

Даље, посматрајмо раслојење придружено главном раслојењу $\Pi_S : Q \longrightarrow S$, које дефинишемо на следећи начин. Посматрајмо S^1 дејство на $Q \times \mathbb{C}$,

$$e^{it} * (v, z) = (e^{it} \cdot v, e^{-it} \cdot z)$$

Тотални простор придруженог раслојења је $Q \times_{S^1} \mathbb{C} = Q \times \mathbb{C} / S^1$, док је одговарајућа пројекција $\pi : Q \times_{S^1} \mathbb{C} \longrightarrow S$

$$\pi([v, z]) = \Pi_S(v)$$

Како се сваки вектор $0 \neq v \in (T_p S)^\omega$ може на јединствен начин записати у облику $v = r \cdot u$, за $r = \|v\| > 0$ и $u \in Q|_p$ јединични вектор, то тачке из $(TS)^\omega$ одговарају уређеним паровима (u, z) уз додатну идентификацију $(u, z) \sim (e^{it}u, e^{-it}z)$. Из претходног можемо закључити да важи $(TS)^\omega \cong Q \times_{S^1} \mathbb{C}$.

Наш следећи циљ ће бити да $(TS)^\omega$ снабдемо затвореном 2-формом. У ту сврху, можемо одабрати $\mathbb{T}^n$ -инваријантну форму конекције α на Q , то јест $\mathbb{T}^n$ -инваријантну 1-форму на Q која задовољава

$$i_X \alpha = 1 \quad \text{и} \quad i_X d\alpha = 0,$$

при чему је X векторско поље које је генератор S^1 -дејства на Q . Конкретно, оваква форма увек постоји за главна раслојења, а еквиваријантност постижемо као и раније, коришћењем компактности торуса. На $Q \times \mathbb{C}$ дефинишемо 2-форму $\tilde{\omega}$ са

$$\tilde{\omega} = \Pi_S^* \omega_S + \omega_{\mathbb{C}} + \frac{1}{2} d(|z|^2 \alpha).$$

Јасно, $\tilde{\omega}$ је затворена форма. Да бисмо могли да тврдимо да $Q \times_{S^1} \mathbb{C}$ – а самим тим и $(TS)^w$ – наслеђује ову форму из простора $Q \times \mathbb{C}$, неопходно је проверити следећа два услова.

1. $\tilde{\omega}$ је инваријантна у односу на S^1 -дејство на $Q \times \mathbb{C}$ — јасно важи јер је свака од форми $\Pi_S^* \omega_S$, $\omega_{\mathbb{C}}$ и $d(|z|^2 \alpha)$ инваријантна у односу на посматрано дејство.
2. $\tilde{\omega}$ се анулира на вертикалном правцу, то јест важи $i_{\tilde{X}} \tilde{\omega} = 0$, при чему је са $\tilde{X}$ означен генератор дејства S^1 на $Q \times \mathbb{C}$

Да бисмо се уверили да је испуњен услов 2, одредимо прво одговарајући генератор дејства. Већ смо видели да S^1 дејствује на $Q \times \mathbb{C}$ са

$$e^{it} * (p, z) = (e^{it} \cdot p, e^{-it} z)$$

Ако на $\mathbb{C}$ посматрамо поларне координате, ово дејство има облик

$$e^{it} * (p, r, \theta) = (e^{it} \cdot p, r, \theta - t),$$

из ког јасно видимо да важи $\tilde{X} = X - \frac{\partial}{\partial \theta}$.

Дакле, заправо треба доказати $i_{X - \frac{\partial}{\partial \theta}} \tilde{\omega} = 0$. Посматрајмо $\tilde{\omega}$ у поларним координатама:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \Pi_S^* \omega_S + r dr \wedge d\theta + \frac{1}{2} d(r^2 \cdot \alpha) \\ &= \Pi_S^* \omega_S + r dr \wedge d\theta + r dr \wedge \alpha + \frac{1}{2} r^2 d\alpha \end{aligned}$$

Ако са π означимо пројекцију $\pi : Q \times \mathbb{C} \rightarrow S$, $(v, z) \mapsto \Pi_S(v)$, можемо приметити да важи $d\pi(X) = d\pi\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = 0$, а самим тим и $i_{X - \frac{\partial}{\partial \theta}} \Pi_S^* \omega_S = 0$. Даље, како је $i_X(r dr \wedge d\theta) = 0$ и $i_{-\frac{\partial}{\partial \theta}}(r dr \wedge d\theta) = r dr$, добијамо $i_{X - \frac{\partial}{\partial \theta}} \omega_{\mathbb{C}} = r dr$. Преостаје да израчунамо контракције форми $r dr \wedge \alpha$ и $\frac{1}{2} r^2 d\alpha$. Како је $i_X \alpha = 1$, то важи $i_X(r dr \wedge \alpha) = -r dr$ а из $i_X d\alpha = 0$ добијамо и $i_X\left(\frac{1}{2} r^2 d\alpha\right) = 0$. Коначно, из $i_{-\frac{\partial}{\partial \theta}}(r dr \wedge \alpha) = 0 = i_{-\frac{\partial}{\partial \theta}}\left(\frac{1}{2} r^2 d\alpha\right)$ заједно са свим претходно добијеним закључујемо да важи

$$i_{X - \frac{\partial}{\partial \theta}} \tilde{\omega} = r dr - r dr = 0,$$

то јест $\tilde{\omega}$ се заиста анулира на вертикалном правцу.

Ако са p означимо количничку пројекцију $Q \times \mathbb{C} \rightarrow Q \times_{S^1} \mathbb{C} \cong (TS)^w$, постоји јединствена форма $\omega_{(TS)^w}$ таква да важи $p^* \omega_{(TS)^w} = \tilde{\omega}$ и ова форма је такође затворена. Додатно, $\omega_{(TS)^w}$ је недегенерисана – а самим тим и симплектичка – у околини

нултог сечења у $(TS)^\omega$. Да бисмо се уверили у претходно, прво треба уочити да је довољно недегенерисаност проверити у околини нултог сечења у $Q \times \mathbb{C}$. Нека је нулто сечење у $Q \times \mathbb{C}$ означено са S_0 . У свакој тачки која припада S_0 је $z = 0$, па је рестрикција форме $\tilde{\omega}$ на S_0 заправо

$$\tilde{\omega}|_{S_0} = \Pi_S^* \omega_S + \omega_{\mathbb{C}}$$

и додатно, како су ω_S и $\omega_{\mathbb{C}}$ недегенерисане форме, то је и $\tilde{\omega}|_{S_0}$ недегенерисана. Заиста, како је недегенерисаност отворено својство, то ће форма $\tilde{\omega}$ бити недегенерисана и у некој отвореној околини нултог сечења у $Q \times \mathbb{C}$, а исто важи и за $\omega_{(TS)^\omega}$ у околини нултог сечења у $(TS)^\omega$. Дакле, околина нултог сечења у $(TS)^\omega$ заједно са формом $\omega_{(TS)^\omega}$ је симплектичка многострукост.

Према теорему о симплектичкој околини (теорема 3.4.10. у [МцД-С]), постоји симплектоморфизам Φ између цевасте околине од S у M и од нултог сечења S_0 у $(TS)^\omega$. Додатно, уз одговарајуће изборе, овај симплектоморфизам можемо учинити $\mathbb{T}^n$ -еквиваријантним.

- $(TS)^\omega$ можемо реконструисати сечењем $(Q \times \mathbb{R}, \omega_{Q \times \mathbb{R}} = \Pi_S^* \omega_S + d(t\alpha))$ са S^1 -дејством у односу на $[0, +\infty)$

Посматрајмо S^1 -дејство на $Q \times \mathbb{R}$ које ротира прву координату:

$$e^{it} * (v, t) = (e^{it} \cdot v, t)$$

Векторско поље које генерише ово дејство је

$$\tilde{X} = (X, 0)$$

На сличан начин као и раније, добијамо $i_{\tilde{X}} \omega_{Q \times \mathbb{R}} = -dt$, па је овако задато дејство Хамилтоново, са моментним пресликавањем $\mu = pr_2$, то јест μ је просто пројекција на другу координату. Присетимо се конструкције многострукости добијене сечењем у односу на полиедар. Кренућемо од $Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ са симплектичком формом $\Omega = \omega_{Q \times \mathbb{R}} + \omega_{\mathbb{C}}$ и посматраћемо дијагонално S^1 -дејство,

$$e^{it} * (v, t, z) = (e^{it} \cdot v, t, e^{-it} \cdot z).$$

Слично као и раније, може се проверити да је овако задато дејство Хамилтоново, са моментним пресликавањем

$$\nu(v, t, z) = t - \frac{1}{2}|z|^2.$$

Сада нас интересује скуп нивоа $\nu^{-1}(0) = \{(v, t, z) \mid t = \frac{1}{2}|z|^2\}$. Приметимо да је свака тачка из $\nu^{-1}(0)$ у потпуности одређена координатама v и z , односно важи $Q \times \mathbb{C} \cong \nu^{-1}(0)$. Узимањем количника $\nu^{-1}(0)/S^1$ добијамо $Q \times_{S^1} \mathbb{C} \cong (TS)^\omega$, што је и требало показати.

- Постоји $\mathbb{T}^n$ -еквиваријантан дифеоморфизам између $Q \times \mathbb{R}^+$ и $(TS)^\omega \setminus S_0$ који чува 2-форме

Приметимо за почетак да је комплемент нултог сечења у $(TS)^\omega$ изоморфан са $Q \times_{S^1} (\mathbb{C} \setminus \{0\})$, где је свака тачка класа еквиваленције $[v, z]$, $z \neq 0$. Како свака оваква класа има тачно једног представника ком је z координата позитиван реалан број, можемо дефинисати следеће пресликавање:

$$\begin{aligned} \Psi : Q \times (0, \infty) &\longrightarrow Q \times_{S^1} (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cong (TS)^\omega \setminus S_0 \\ (v, t) &\longmapsto [v, \sqrt{2t}] \end{aligned}$$

Докажимо да је овако дефинисано Φ тражени дифеоморфизам. Заиста, није тешко уверити се у то да је Φ $\mathbb{T}^n$ -еквиваријантан дифеоморфизам. Докажимо и да Φ заиста чува одговарајуће форме, односно да важи $\Psi^* \omega_{(TS)^\omega} = \omega_{Q \times \mathbb{R}}$. У ту сврху, уочимо

$$\begin{aligned} s : Q \times (0, +\infty) &\longrightarrow Q \times \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ (v, t) &\longmapsto (v, \sqrt{2t}). \end{aligned}$$

Како смо са p означили количничку пројекцију $Q \times \mathbb{C} \longrightarrow Q \times_{S^1} \mathbb{C}$, приметимо да Ψ можемо видети као композицију $\Psi = p \circ s$

$$\begin{array}{ccccc} Q \times (0, \infty) & \xrightarrow{s} & Q \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) & \xrightarrow{p} & Q \times_{S^1} (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \\ & & \searrow \Psi & \nearrow & \end{array}$$

Дакле,

$$\begin{aligned} \Psi^* (\omega_{(TS)^\omega}) &= (p \circ s)^* (\omega_{(TS)^\omega}) \\ &= s^* (p^* \omega_{(TS)^\omega}) \\ &= s^* \omega_{Q \times \mathbb{C}}, \end{aligned}$$

односно треба доказати да је $s^* \omega_{Q \times \mathbb{C}} = \omega_{Q \times \mathbb{R}}$, што се једноставно провери.

Пре него што изложимо конструкцију која је суштина овог доказа, било би корисно подсетити се свега што смо до сада постигли. Наиме, конструисали смо $\mathbb{T}^n$ -еквиваријантан симплектоморфизам $\Phi : U \longrightarrow U_0 \subset (TS)^\omega$, при чему је $U \subset M$ околина од S , док је U_0 околина нултог сечења $S_0 \subset (TS)^\omega$. Затим, конструисали смо такође $\mathbb{T}^n$ -еквиваријантан дифеоморфизам Ψ између $Q \times \mathbb{R}^+$ и $(TS)^\omega \setminus S_0$, који додатно чува и одговарајуће 2-форме. Комбиновање ових резултата нам омогућава да, за довољно мало ε , идентификујемо $Q \times (0, \varepsilon)$ са $U_\varepsilon \setminus S$, при чему је U_ε поново околина од S у M . Конкретно, можемо посматрати композицију

$$\begin{aligned} \chi &:= \Phi^{-1} \circ \Psi : Q \times (0, \varepsilon) \longrightarrow M \setminus S \\ \chi(v, t) &= \Phi^{-1}([v, \sqrt{2t}]) \end{aligned}$$

Овако дефинисано χ је $\mathbb{T}^n$ -еквиваријантан симплектоморфизам између $Q \times (0, \varepsilon)$ и пробушене цевасте околине $U_\varepsilon \setminus S \subset M \setminus S$.

Коначно, посматрајмо простор

$$M_1 := \left((M \setminus S) \sqcup (Q \times (-\varepsilon, \varepsilon)) \right) / \sim,$$

при чему вршимо идентификацију $Q \times (-\varepsilon, \varepsilon) \ni (v, t) \sim \chi(v, t) \in M \setminus S$. Како је χ дифеоморфизам на своју слику, то је овако добијен простор заиста глатка многострукост. Даље, на M_1 можемо дефинисати симплектичку форму ω_1 са

$$\omega_1 = \begin{cases} \omega, & \text{на } M \setminus S \\ \omega_{Q \times \mathbb{R}}, & \text{на } Q \times (-\varepsilon, \varepsilon) \end{cases}$$

Како је $\chi^* \omega = \omega_{Q \times \mathbb{R}}|_{Q \times (0, \varepsilon)}$, то је ω_1 добро дефинисано, а како су ω и $\omega_{Q \times \mathbb{R}}$ симплектичке и ω_1 је заиста симплектичка. Како је χ такође $\mathbb{T}^n$ -еквиваријантно, на M_1 можемо дефинисати $\mathbb{T}^n$ -дејство баш онако како бисмо и очекивали — на $M \setminus S$ торус дејствује као на M , док на $Q \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ дејствује као на $Q \times \mathbb{R}$. Додатно, овако дефинисано дејство је Хамилтоново, са моментним пресликавањем које је на $M \setminus S$ баш μ , док на $Q \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ постоји јединствено моментно пресликавање такво да важе следеће три особине

- (1) $\langle \mu_1(v, t), v_{k_1} \rangle = \lambda_{k_1} + t, \quad (v, t) \in Q \times (-\varepsilon, \varepsilon)$
- (2) $\mu_1(v, 0) = \mu_S(\Pi_S(v))$
- (3) $\mu_1|_{\{t > 0\}} = \mu \circ \chi.$

У овом тренутку у доказу природно се поставља питање шта смо заиста постигли претходном конструкцијом. Одговор на ово питање се крије у следећем запажању. За тачку $(v, t) \in Q \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, стабилизатор у односу на $T = \{\exp(s \cdot v_{k_1}) \mid s \in \mathbb{R}\}$ је тривијалан, јер T на Q дејствује слободно. Специјално, тачке облика $(v, 0)$ нису фиксне тачке овог дејства, за разлику од одговарајућих тачака у M које су чиниле скуп S . Дакле, на многострукости M_1 више нема фиксних тачака у односу на дејство подгрупе T . Оно што је посебно лепо код ове конструкције је чињеница да M можемо реконструисати из M_1 сечењем у односу на $H_1 = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, v_{k_1} \rangle \geq \lambda_{k_1}\}$, што није тешко проверити.

Претходни поступак можемо наставити за сваку од страна политопа Δ чиме добијамо низ простора $M_1, \dots, M_d$ са својством да је дејство торуса на коначном простору M_d слободно, као и да је свако M_{k-1} добијено сечењем M_k у односу на одговарајући полупростор, ако смо M означили са M_0 . Прецизније, добили смо низ

$$M = (M_1)_{H_1} = (M_2)_{H_1 \cap H_2} = \dots = (M_d)_\Delta.$$

Како је дејство торуса на M_d слободно, то је M_d еквиваријантно симплектоморфан отвореном подскупу $U \subseteq T^*\mathbb{T}^n$ који садржи све тачке чија слика при моментном пресликавању припада политопу Δ . Како у конструкцију сечења у односу на Δ значај имају само такве тачке, простори добијени сечењем од U и од $T^*\mathbb{T}^n$ се поклапају, па је

$$M = (M_d)_\Delta \cong U_\Delta = (T^*\mathbb{T}^n)_\Delta = (E^\Delta, \omega^\Delta),$$

што завршава доказ.

□

Литература

- [1] Д. Милинковић. Увод у рачун на многострукостима. скрипта, <http://poincare.matf.bg.ac.rs/~milinko/skripta/globalna.pdf>.
- [2] V. I. Arnold. Mathematical Methods of Classical Mechanics. *Graduate Texts in Mathematics* 60, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [3] M.F. Atiyah. Convexity and commuting Hamiltonians. *Bull. London Math. Soc.*, 14(1):1–15, 1982.
- [4] M. Audin. *Torus Actions on Symplectic Manifolds*. Birkhäuser, 2004.
- [5] A. Banyaga, D. Hurtubise. Lectures on Morse Homology. *Texts in the Mathematical Sciences* 29, Springer, Dordrecht, 2004. doi:10.1007/978-1-4020-2696-6.
- [6] R. Bott. Lectures on Morse theory, old and new. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 7 (1982), 331–358.
- [7] R. Bott, L.W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer, 1982.
- [8] C.P. Boyer, K. Galicki. A note on toric contact geometry. *Journal of Geometry and Physics* 35 (2000), 288–298. arXiv:math/9907043.
- [9] V.M. Buchstaber, T.E. Panov. *Toric Topology*. American Mathematical Society, 2015. <https://arxiv.org/abs/1210.2368>.
- [10] A. Cannas da Silva. Symplectic Toric Manifolds. белешке са летње школе *Symplectic Geometry of Integrable Hamiltonian Systems*, Centre de Recerca Matemàtica, Барселона, 2001. people.math.ethz.ch/~acannas/Papers/toric.pdf.
- [11] A. Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Springer, 2008.
- [12] R. Cardona Aguilar. Symplectic toric manifolds, Delzant Theorem and integrable systems. завршни рад, Universitat Politècnica de Catalunya, 2017. <https://upcommons.upc.edu/handle/2117/106116>.
- [13] M.W. Davis, T. Januszkiewicz. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions. *Duke Math. J.*, 62(2):417–451, 1991.
- [14] T. Delzant. Hamiltoniens périodiques et images convexes de l’application moment. *Bull. Soc. Math. France*, 116(3):315–339, 1988.

- [15] J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk. *Lie Groups*. Springer, 2000.
- [16] Y. Eliashberg. Filling by holomorphic discs and its applications. *Geometry of Low-Dimensional Manifolds*, vol. 2 (Durham, 1989), *London Mathematical Society Lecture Note Series* 151, Cambridge University Press, 1990, 45–67.
- [17] J.B. Etnyre, K. Honda. On symplectic cobordisms. *Mathematische Annalen* 323 (2002), 31–39.
- [18] W. Fulton. Introduction to Toric Varieties. *Annals of Mathematics Studies* 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [19] D. Gay. Explicit concave fillings of contact three-manifolds. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 133 (2002), no. 3, 431–441.
- [20] H. Geiges. An Introduction to Contact Topology. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 109, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [21] V. Guillemin, S. Sternberg. Convexity properties of the moment mapping. *Invent. Math.*, 67(3):491–513, 1982.
- [22] V. Guillemin, S. Sternberg. *Symplectic Techniques in Physics*. Cambridge University Press, 1990.
- [23] A. Hatcher. Vector Bundles and K-Theory, 2017. <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf>.
- [24] Y. Karshon, L. Kessler, M. Pinsonnault. A compact symplectic four-manifold admits only finitely many inequivalent toric actions. *Journal of Symplectic Geometry* 5 (2007), 139–166.
- [25] A. Kirillov, Jr. *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. Cambridge University Press, 2008.
- [26] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2013.
- [27] E. Lerman. Contact toric manifolds. *Journal of Symplectic Geometry* 1 (2003), no. 4, 785–828. arXiv:math/0107201.
- [28] E. Lerman. Symplectic cuts. *Mathematical Research Letters* 2 (1995), no. 3, 247–258.
- [29] A. Marinković, L. Starkston. On contact 3-manifolds that admit a nonfree toric action. *Bulletin of the London Mathematical Society* 58 (2026). arXiv:2501.09386.
- [30] A. Marinković, J. Nelson, A. Rechtman, L. Starkston, S. Tanny, L. Wang. Properties of contact toric structures and concave boundaries of linear plumbings. *Transactions of the American Mathematical Society*, у штамп. arXiv:2501.08451.

- [31] D. McDuff, D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University Press, 2017.
- [32] E. Meinrenken. Symplectic Geometry, 2024. скрипта, University of Toronto, <https://www.math.toronto.edu/mein/teaching/LectureNotes/symplectic.pdf>.
- [33] W.J. Merry. Differential Geometry, 2021. скрипта, ETH Zürich, [https://www2.math.ethz.ch/will-merry/files/Merry%20-%20Differential%20Geometry%20\(2021\).pdf](https://www2.math.ethz.ch/will-merry/files/Merry%20-%20Differential%20Geometry%20(2021).pdf).
- [34] J. Milnor. Morse Theory. *Annals of Mathematics Studies* 51, Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [35] J.W. Milnor, J.D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Princeton University Press, 1974.
- [36] M. Morse. The Calculus of Variations in the Large. *American Mathematical Society Colloquium Publications* 18, American Mathematical Society, New York, 1934.
- [37] M. Symington. Four dimensions from two in symplectic topology. *Topology and Geometry of Manifolds (Athens, GA, 2001)*, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* 71, 153–208, American Mathematical Society, 2003.