

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ



Александра Стојановић

ГЕОМЕТРИЈА КОНИКА И ЊИХОВИХ ПРАМЕНОВА

Мастер рад

Београд, 2026.

Ментор:

проф. др Мирослава Антић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Милош Ђорић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Иван Димитријевић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Мами и баки

Садржај

Предговор	2
1 Основне особине кривих другог реда	3
1.1 Конике	3
1.2 Аналитичка дефиниција и класификација кривих другог реда	6
1.3 Жижна својства коника	9
1.4 Оптичка својства коника	12
2 Класични резултати везани за конике	16
2.1 Пројективна раван	16
2.2 Дезаргова теорема	16
2.3 Пројективна пресликавања	18
2.4 Представљање пројективних пресликавања	19
2.4.1 Конике у пројективним пресликавањима	20
2.5 Дворамера	22
3 Праменови кругова	25
3.1 Пол и полара	25
3.2 Паскалова теорема	31
3.3 Брианшонова теорема	36
3.4 Понселеова теорема за кругове	38
4 Праменови коника	40
4.1 Пол и полара за конике	40
4.2 Прамен коника	42
4.3 Понселеова теорема	47
Литература	51

Предговор

Први извори знања о коникама се јављају у 4. веку пре нове ере у старој Грчкој. Менехмо се сматра првим грчким математичарем који је узучавао конике. Решавајући проблем удвостручења коцке, открио је елипсу, хиперболу и параболу. Еуклидово дело о коникама је написано, али није сачувано. Аполоније из Перге у 3. веку пре нове ере је написао чувено дело "Конике". У том делу је темељно развијена теорија конусних пресека и уведени су појмови које и данас користимо елипса, хипербола и параболола.

Током образовања(средње школе и факултети сродни Математичком) у почетку конике изучавамо у аналитичкој геометрији, где су оне везане за координатни систем и свака коника је представљена својом једначином у одређеном запису.

У пројективној геометрији слика је доста другачија. Она нам доноси нове битне особине коника и важна тврђења која смо дефинисали и поделили у 4 главе. Све као целина нам комплентно дефинише геометрију коника и њихових праменова, што је и тема овог рада.

У првој глави је дефинисан појам коника, представљене су основне особине кривих другог реда и на основну тога њихова подела. Извели смо им канонске једначине и класификовали их. Навели смо јако важна жијсна својства елипсе, хиперболе и параболе, као и оптичка својства уско повезана са Фермаовим принципом.

Друга глава је везана за класичне и лепе резултате коника у пројективној геометрији, која су нам направила добру базу за даљу разраду главне теме. Овде смо дефинисали пројективно пресликавање, доказали Дезаргову теорему и њен обрат, дефинисали дворазмеру, као једну од основних инваријанти(пројективна пресликавања не мењају дворазмеру) пројективне геометрије, представили пројективна пресликавања и конике у њима и дошли до значајних закључака.

У трећој глави се бавимо праменовима кругова, који нам праве велики, леп и значајан увод за прамен коника. Дефинишемо поларну кореспонденцију круга(пол и полара), потенцију тачке у односу на круг, радикалну осу и радикални центар кругова, прамен кругова(хиперболички, елиптички и параболички). Представљамо и доказујемо Паскалову теорему, а пре исте и две теореме, које нам служе у доказу. Такође, представљамо и доказујемо Брианшонову теорему и Поенселеову теорему за кругове.

Четврта глава садржи најважније резултате о коникама и њиховим праменовима, што је главна тема овог рада. Овде смо дефинисали поларну кореспонденцију коника, типове праменова коника и Поенселеову теорему која нам приказује важна својства прамена коника и њихову повезаност.

Желим да изразим велику захвалност свом ментору проф. др Мирослави Анђић на огромној помоћи у изради рада, стипендији, издвојеном времену да детаљно и врло јасно предложи идеју, корекцију као и стручну сујестину.

Захвалност дујем и осталим члановима комисије др Милошу Ђорићу и проф. др Ивану Димиријевићу на сарадњи, стручним савештањима и издвојеном времену за реализацију одбране мастер рада.

Велико хвала и мом малом кругу драгих људи.

Посебну захвалност изражавам особама којима је рад и посвећен за сваки вид подршке на мом животној путу до сада.

Глава 1

Основне особине кривих другог реда

1.1 Конике

У овом поглављу увешћемо појам коника и кривих другог реда, и показати да се у недегенерисаном случају ради о истим кривама. Показаћемо такође и неке од њихових особина.

Нека су i и s две праве у простору које се секу у тачки S . Кружни конус са теменом S је површ која се добија ротацијом праве i око осе s .

Слике праве i при ротацијама око праве s називају се *изводнице*, а права s је *оса конуса*.

Конусни пресек је пресек конуса са произвољном равни π . *Коника* је специјалан случај конусног пресека, тј. коника је пресек конуса и равни π која не садржи теме конуса.

Уколико раван π садржи теме S конуса, кажемо да је конусни пресек дегенерисан. Тај пресек је тада или тачка S , или једна изводница, ако се раван π и конус додирују, или се пресек састоји од две праве, изводнице које се секу у тачки S .

Ми смо заинтересовани управо за недегенерисани случај — случај коника.

Нека раван π сече све изводнице кружног конуса са врхом S . Претпоставимо да π није нормално на s . Посматрајмо сферу уписану у конус која додирује раван π у тачки F_1 . Нека је σ раван која садржи тачке додира сфере и конуса. Нека је l права пресека равни π и σ . Нека је X тачка у пресеку конуса и равни π . Нека је Y пресек праве SX са равни σ , а Z пројекција тачке X на праву l . Показаћемо да је однос XU и XZ *константан*, тј. да не зависи од избора тачке X .

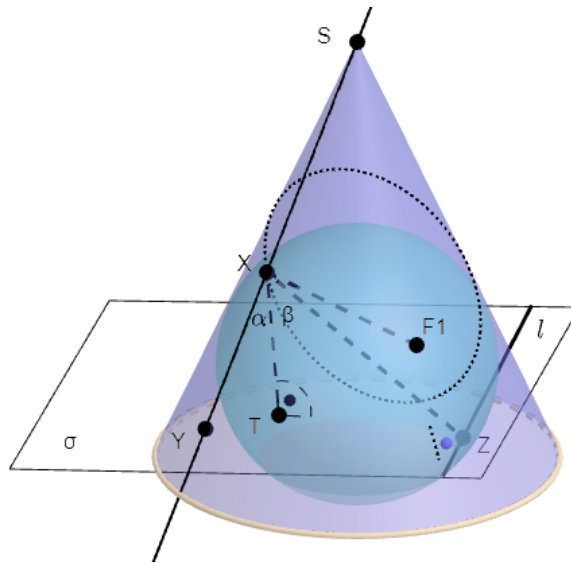
Нека је T пројекција тачке X на раван σ . Однос XT и XU не зависи од X и једнак је косинусу угла између изводнице конуса и његове осе (означимо тај угао са α). Однос XT и XZ такође не зависи од X и једнак је косинусу угла између равни π и осе конуса (означимо

тај угао са β). Према томе,

$$\frac{XY}{XZ} = \frac{XY}{XT} \cdot \frac{XT}{XZ} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

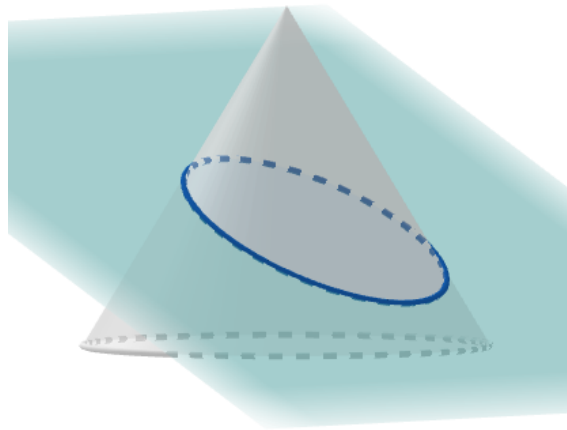
Пошто су XF_1 и XY једнаке (као тангенте дужи на сферу из тачке X), следи да је однос XF_1 и XZ константан.

Теорема 1.1. *За сваку конику постоји права l таква да је за сваку тачку на коници однос растојања до тачке F_1 и до те праве константан. Тај однос назива се ексцентрицитет конике. Права l је директриса, а тачка F_1 је жижа или фокус конике.*



Слика 1.1: Ексцентрицитет

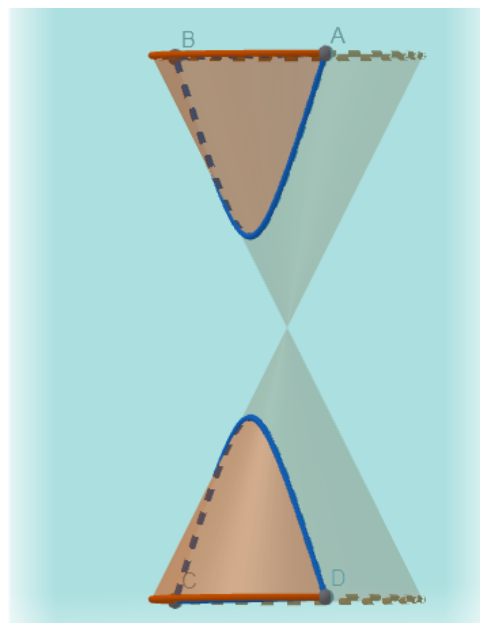
Нека је раван μ нормална на праву s у тачки S . Нека раван π сече све изводнице конуса тако да се пресек налази са исте стране равни μ . Тада постоје две сфере које су уписане у конус и које додирују раван π , па коника има два пара жижа-директриса (F_1, l_1) и (F_2, l_2) . Може се показати да су одговарајући ексцентрицитети једнаки и мањи од јединице. Ова коника се назива **елипса**.



Слика 1.2: Елипса

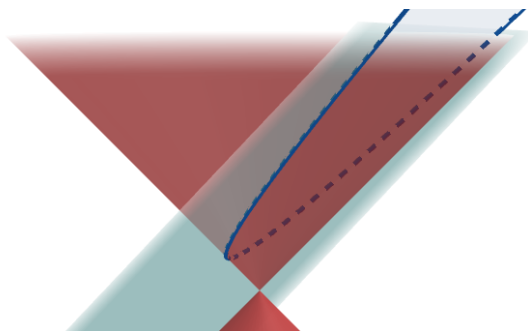
Посебно, ако је раван π нормална на s , равни σ и π су паралелне, па неформално можемо сматрати да је пресек бесконачно далека права; конусни пресек је круг, а раван σ додирује сферу у центру круга. Зато можемо да сматрамо да је **круг** гранични случај елипсе где је ексцентрицитет $e = 0$.

Уколико раван π сече све изводнице конуса, али коника има тачке са обе стране равни π , такође постоје две сфере које додирују и раван σ и конус, па добијена коника такође има два пара жижа-директриса (F_1, l_1) и (F_2, l_2) . Може се показати да је и у овом случају ексцентрицитет увек исти и већи од 1. Добијена коника се назива **хипербола**.



Слика 1.3: Хипербола

Уколико π не сече све изводнице конуса већ је са неком од њих паралелна, онда постоји само једна сфера која је тангентна и на конус и на раван σ , па постоји само један пар жижа-директриса. Тада се може показати да су углови α и β једнаки и да је ексцентрицитет 1. Ову конику зовео **парабола**.



Слика 1.4: Парабола

1.2 Аналитичка дефиниција и класификација кривих другог реда

Нека су (x, y) произвољне Декартове координате у равни π . Сада ћемо наћи једначине коника.

Нека су (f_1, f_2) координате жиже и нека директриса има једначину

$$l: \cos \gamma x + \sin \gamma y + a = 0.$$

Како је растојање тачке са координатама (x, y) до праве l једнако

$$|\cos \gamma x + \sin \gamma y + a|,$$

видимо да су елипса, парабола и хипербола описане квадратним једначинама

$$\frac{(x - f_1)^2 + (y - f_2)^2}{(\cos \gamma x + \sin \gamma y + a)^2} = e^2$$

Такође и круг има квадратну једначину.

Дефиниција 1.2. Крива другог реда је скуп тачака чије координате у неком (и самим тим у било ком) Декартовом координатном систему задовољавају једначину другог реда:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0. \quad (1.1)$$

Може се показати да, ако је детерминанта матрице

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}$$

једнака нули, онда једначина (1.1) представља празан скуп, тачку, две паралелне праве или две праве које се секу.

У том случају кажемо да је крива другог реда дегенерисана.

За сваку недегенерисану криву постоји координатни систем у коме њена једначина има прилично једноставан облик. Сада ћемо описати основну идеју која стоји иза овог резултата.

Најпре, ротирајмо координатни систем за угао φ . То значи да у једначини (1.1) координате x и y треба заменити редом са

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi \quad \text{и} \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

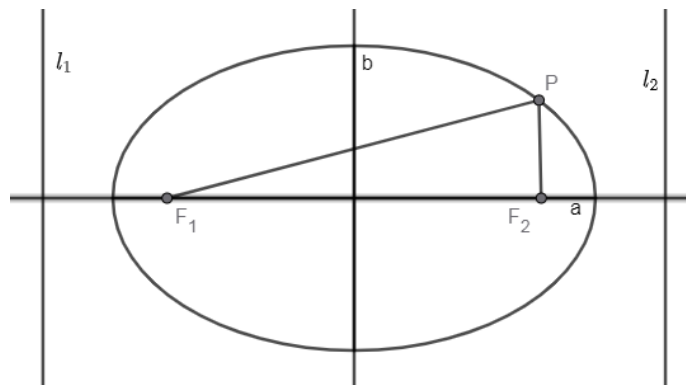
Избором одговарајућег угла φ можемо учинити да коефицијент уз xy постане једнак нули.

Затим транслирамо координатни почетак у тачку (x_0, y_0) , тј. заменимо x са $x + x_0$, а y са $y + y_0$. Избором одговарајућег пара (x_0, y_0) можемо трансформисати једначину (1.1) у један од три канонска облика (I), (II) или (III).

За $e < 1$ добијамо канонску једначину **елипсе**

$$(I) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0, \quad (1.2)$$

са центром у координатном почетку, са жижама у тачкама $(\pm \sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, директрисама датим једначинама $x = \pm \frac{a}{e}$ и са великом и малом полуосом (тј. половинама дужина одговарајућих оса) једнаким редом a и b . У специјалном случају $a = b$, елипса (I) је круг.



Слика 1.5: Елипса; F_1 и F_2 жиже, l_1 и l_2 директрисе, a и b осе

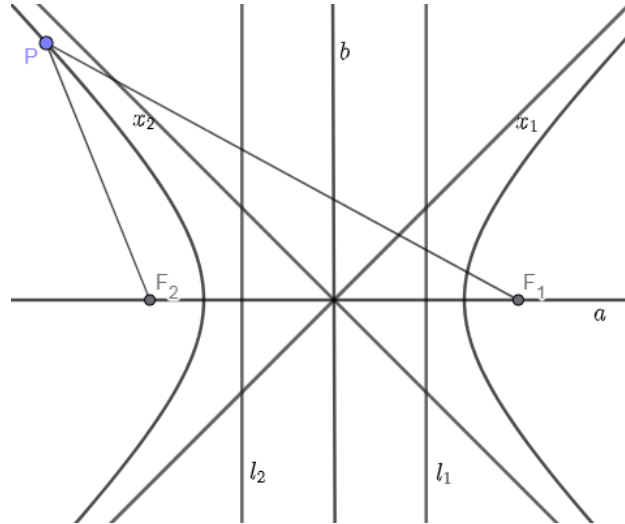
За $e > 1$ добијамо канонску једначину **хиперболе**

$$(II) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad (1.3)$$

она сече своју реалну осу у две тачке међусобно удаљене $2a$. Величине a и b називају се, редом, реална и имагинарна полуоса хиперболе. Праве

$$\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$$

су асимптоте хиперболе (праве којима се хипербола приближава када $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$), а тачке $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ су њене жиже, док су директрисе дате једначинама $x = \pm \frac{a}{e}$. У случају када је $a = b$, хипербола (II) је једнакостранична.

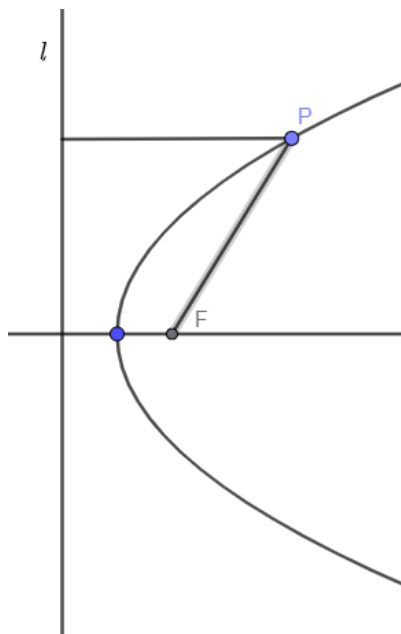


Слика 1.6: Хипербола; F_1 и F_2 жиже, l_1 и l_2 директрисе, a и b осе, x_1 и x_2 асимптоте

За $e = 1$ добијамо канонску једначину **параболе**

$$(III) \quad y^2 = 2px, \quad p > 0, \quad (1.4)$$

чија се оса поклапа са x -осом, жижа се налази у тачки $(p/2, 0)$, а директриса је дата једначином $x = -p/2$.



Слика 1.7: Парабола; F жижа, l директриса

1.3 Жижна својства коника

Показаћемо сада једно занимљиво својство које имају елипсе и хиперболе. Оне имају два пара жижа-директриса (F_1, l_1) и (F_2, l_2) и при том су директрисе паралелне праве. Можемо растојања произвољне тачке са једне такве конике да запишемо

$$d(P, F_1) = e d(P, l_1)$$

$$d(P, F_2) = e d(P, l_2).$$

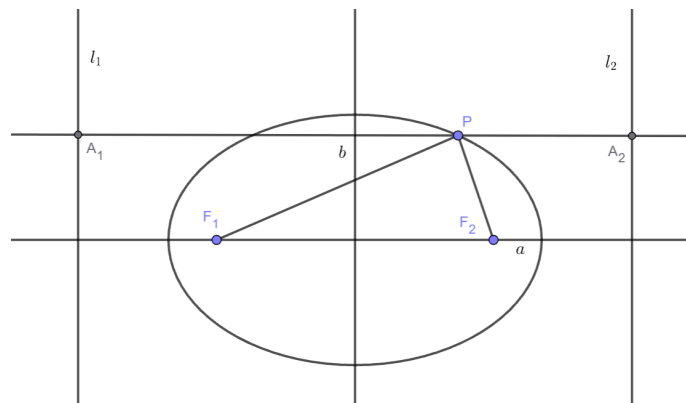
Нека је права p права паралелна x -оси и нека су њени пресеци са директрисама редом A_1 и A_2 . Тада је $d(P, l_i) = PA_i$.

У случају елипсе, где се произвољна тачка елипсе налази између две директрисе, сабирањем претходних једначина добијамо

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = e (d(P, l_1) + d(P, l_2)) = e(PA_1 + PA_2) = eA_1A_2 = 2a,$$

а десна страна једнакости је константа.

Теорема 1.3. Збир растојања произвољне тачке елипсе од њених жижа је константан и једнак великој оси елипсе $2a$.



Слика 1.8: F_1 и F_2 су жиже; l_1 и l_2 директрисе; a и b велика и мала полуоса

У случају хиперболе, њене тачке се не налазе у делу равни између директриса. Одузимањем претходне две једначине добијамо

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = e(d(P, l_1) - d(P, l_2)),$$

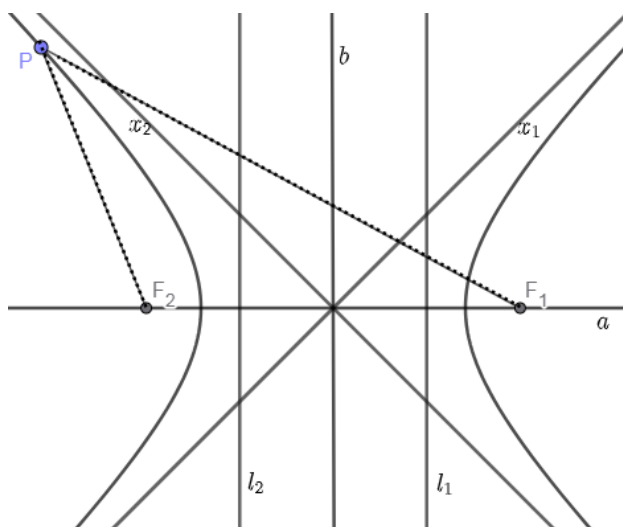
односно

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = e d(l_1, l_2) = e|PA_1 - PA_2| = 2a.$$

Зато важи тврђење:

Теорема 1.4. *Абсолютна вредност разлике растојања произвољне тачке хиперболе од њених жижа је константна и једнака великој оси хиперболе $2a$.*

Уочимо, при том, да разлици $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$ одговара једна страна хиперболе, а разлици $d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a$ друга.



Слика 1.9: F_1 и F_2 су жиже; l_1 и l_2 директрисе; x_1 и x_2 асимптоте; a и b реална и имагинарна оса

Напомена 1.5. Збир растојања од било које тачке унутар елипсе до жижа је мањи, а од било које тачке ван елипсе већи од дужине велике осе.

Напомена 1.6. Нека је d разлика растојања од било које тачке на хиперболи до жижа F_1 и F_2 , и нека је G грана хиперболе унутар које лежи F_1 . Тада за тачке X ван(унутар) G величина $XF_2 - XF_1$ мања је(већа) од d .

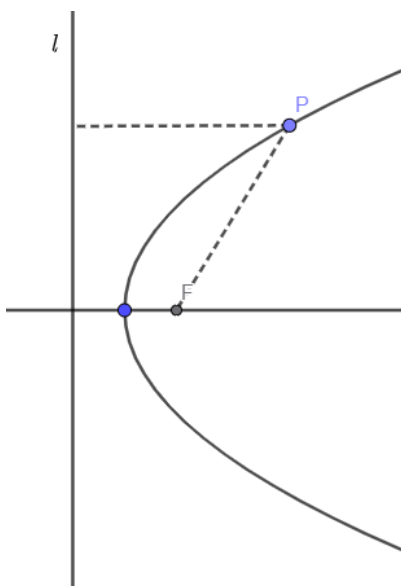
У случају параболе, која има једну жижу и једну директрису, за тачке које се налазе на њој, важи следећа једнакост:

$$d(P, F) = e d(P, l)$$

Пошто је ексцентрицитет параболе једнак 1, важи:

$$d(P, F) = d(P, l)$$

Теорема 1.7. *Растојање произвољне тачке параболе до њене жиже је једнак растојању те тачке до њене директрисе.*



Слика 1.10: F је жижа; l директриса

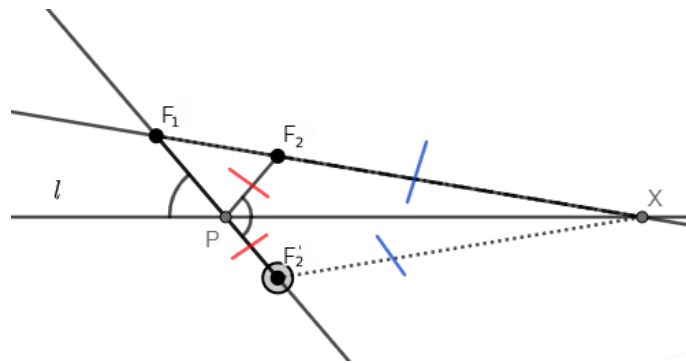
Напомена 1.8. За тачке унутар параболе растојање до жиже је мање од растојања до директрисе, а за тачке ван параболе важи супротно.

Посматрамо фамилију елипси са жижом у фиксној тачки које пролазе кроз другу задату тачку. Ако дозволимо да се друга жижа бесконачно удаљава, тада ће те елипсе тежити параболи са истом жижом и осом паралелном изабраном правцу. Сличан експеримент важи и за хиперболе. Дакле, парабола је гранични случај и елипсе и хиперболе.

1.4 Оптичка својства коника

Као што је познато, ако се светлосни зрак одбија од огледала, онда је угао одбијања једнак углу упада. Ово је повезано са такозваним *Фермаовим принципом*, који тврди да се светлост увек креће дуж најкраћег пута. Сада ћемо доказати да је тај пут заиста најкраћи.

Нека је дата права l и нека су тачке F_1 и F_2 са исте стране те праве. Желимо да нађемо тачку P на правој l такву да је збир растојања од P до F_1 и од P до F_2 минималан.



Слика 1.11: Фермаов принцип

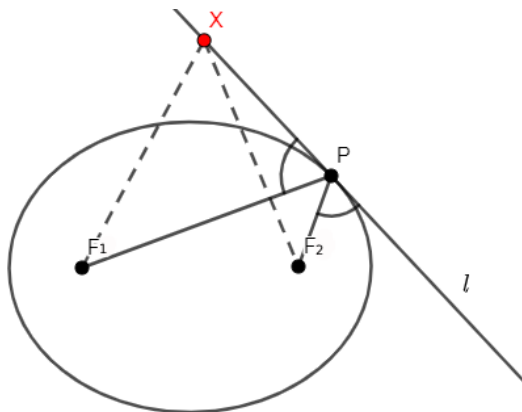
Нека је тачка F'_2 симетрична тачки F_2 у односу на праву l . Јасно је да за сваку тачку X на правој l важи

$$F_2X = F'_2X.$$

Према томе, потребно је наћи тачку P такву да је збир растојања од P до F_1 и од P до F'_2 што мањи.

Очигледно је да се минимум постиже када тачка P лежи на дужи $F_1F'_2$ у тачки њеног пресека са правом l . Тада важи да су углови $\angle F_2PX$ и $\angle XPF'_2$ једнаки.

Теорема 1.9 (Оптичко својство елипсе). *Нека је права l танјентна елипсе у тачки P . Тада је права l симетрала спољашњеј угла $\angle F_1PF_2$.*



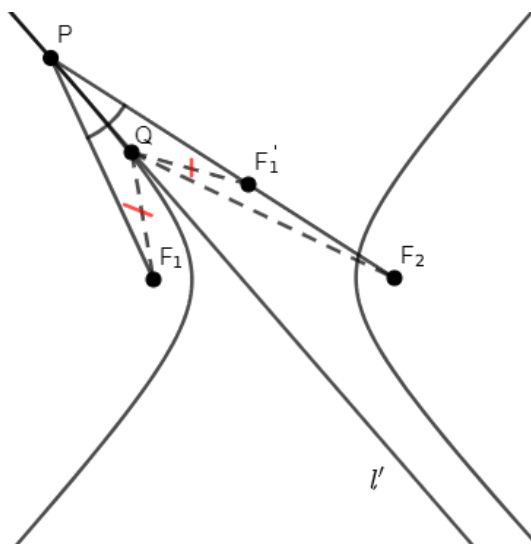
Слика 1.12: Оптичко својство елипсе

Доказ. Нека је X произвољна тачка праве l , различита од P . Пошто је тачка X изван елипсе, важи

$$XF_1 + XF_2 > PF_1 + PF_2,$$

односно, од свих тачака праве l , тачка P има најмањи збир растојања до тачака F_1 и F_2 . То значи да су углови које заклапају праве PF_1 и PF_2 са правом l једнаки. $\square$

Теорема 1.10 (Оптичко својство хиперболе). *Ако је права l тангенција на хиперболу у тачки P , онда је l симетрала угла $\angle F_1PF_2$, где су F_1 и F_2 жиже хиперболе.*



Слика 1.13: Оптичко својство хиперболе

Доказ. Претпоставимо да симетрала l' угла $\angle F_1PF_2$ сече хиперболу у још једној тачки Q (која лежи на истој грани као и P). Ради једноставности, претпоставимо да тачка P лежи на грани ближој жижи

F_1 . Нека је F'_1 тачка симетрична F_1 у односу на праву l' . Тада важи

$$PF_1 = PF'_1, \quad QF_1 = QF'_1.$$

Поред тога, тачке F_2 , F'_1 и P леже на истој правој. Према томе,

$$F_2P - PF_1 = F_2Q - QF_1,$$

па следи

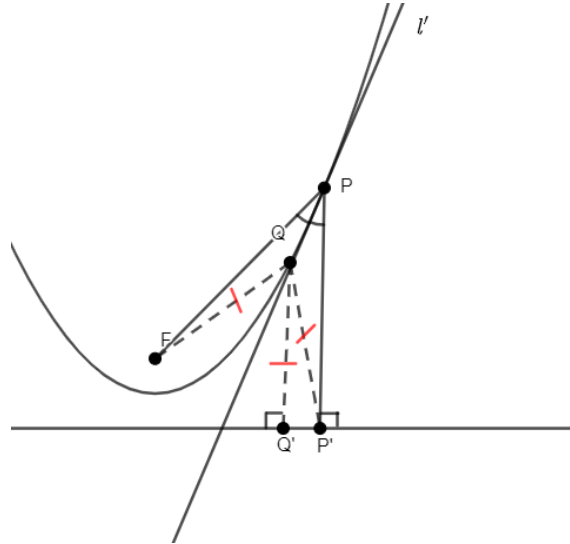
$$F_2F'_1 = F_2P - PF'_1 = F_2Q - QF'_1.$$

Али, по неједнакости троугла, у троуглу $F_2QF'_1$ важи

$$F_2F'_1 > F_2Q - QF'_1,$$

што је противречност. □

Теорема 1.11 (Оптичко својство параболе). *Нека је права l тангенција на параболу у тачки P . Нека је P' пројекција тачке P на директрису. Тада је l симетрала угла $\angle FPP'$.*



Слика 1.14: Оптичко својство параболе

Доказ. Претпоставимо да симетрала угла $\angle FPP'$ (означимо је са l') сече параболу у још једној тачки, рецимо у Q , чија је пројекција на директрису Q' . По дефиницији параболе важи

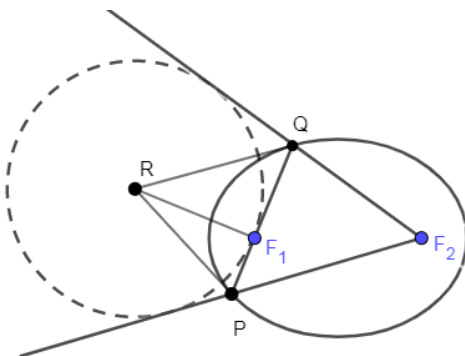
$$FQ = QQ'.$$

С друге стране, троугао FPP' је једнакокраки, па је симетрала угла при P уједно и средишња нормала дужи FP' . Према томе, за сваку тачку Q на тој симетрали важи

$$QP' = QF = QQ'.$$

Међутим, то је немогуће, јер је Q' једина тачка на директриси параболе која је најближа тачки Q . □

Теорема 1.12 (Описана кружница и тетива елипсе). Нека $\overline{PQ}$ елиipse садржи жижу F_1 , а нека је R тачка пресека тангенци на елиipse у тачкама P и Q . Тада је R центар описане кружнице троугла F_2PQ , а F_1 је тачка додире те кружнице са страном PQ .



Слика 1.15: Описана кружница и тетива елипсе

Доказ. Према оптичком својству елипсе, PR и QR су симетрале спољашњих углова троугла F_2PQ . Дакле, тачка R је центар једне споља описане кружнице. Тачка додир (означимо је са F'_1) те кружнице и одговарајуће странице, као и тачка F_2 , деле обим троугла на једнаке делове, тј.

$$F'_1P + PF_2 = F'_1Q + QF_2.$$

Међутим, тачка F_1 има то својство и таква тачка је јединствена. Према томе, F'_1 и F_1 се поклапају. $\square$

Последица 1.13. Права која сјаја жижу елиipse и тачку пресека тангенци на елиipse у крајњим тачкама тетиве која садржи ту жижу, ујравна је на ту тетиву.

За хиперболу, Теорема 1.11 такође важи, али се описана кружница замењује уписаном кружницом.

Глава 2

Класични резултати везани за конике

2.1 Пројективна раван

У овом поглављу ћемо дефинисати пројективна пресликавања, као она која сликају праве у праве. При таквој трансформацији паралелне праве не морају остати паралелне.

Међутим, ако посматрамо обичну еуклидску раван, паралелне праве ће се пресликавати у паралелне, јер је трансформација бијективна.

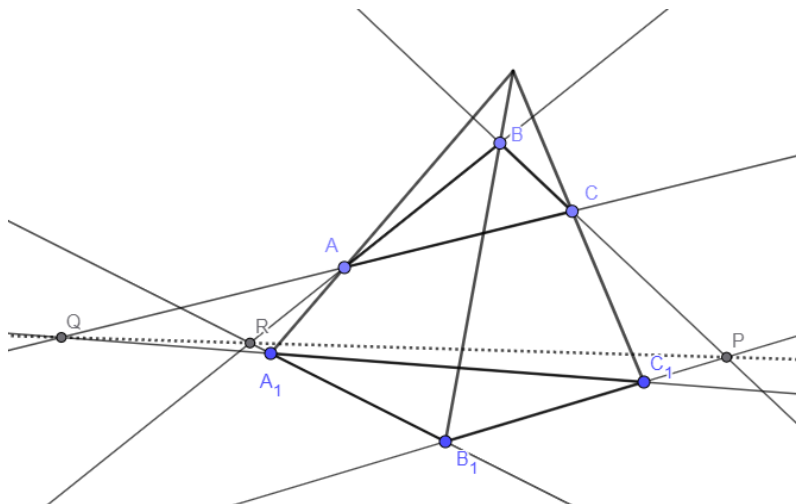
Из тог разлога уводи се такозвана *бесконечно далека права*.

Тачке те праве, које се називају и *бесконечно далеке тачке*, посматрају се као пресеци паралелних правих, а свака бесконачно далека тачка сматра се заједничком свим правама истог паралелног прамена правих.

Тако допуњена раван назива се **пројективна раван**.

2.2 Дезаргова теорема

Теорема 2.1 (Дезаргова теорема). *Нека су ABC и $A_1B_1C_1$ два троугла таква да су праве AA_1 , BB_1 , CC_1 праве једној прамена. Тада су тачке (коначне или бесконачне) $\{P\} = BC \cap B_1C_1$, $\{Q\} = AC \cap A_1C_1$, $\{R\} = AB \cap A_1B_1$ колинеарне.*



Слика 2.1: Дезаргова теорема

Доказ. Претпоставимо најпре да троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ припадају различитим равнима π и π_1 .

С обзиром на то да су праве AA_1 и BB_1 компланарне, такве су и праве AB и A_1B_1 , па се секу у тачки R (коначној или бесконачној).

Тачка R припада и равни π и равни π_1 , па припада њиховом пресеку.

Слично, и тачке P и Q припадају пресеку равни π и π_1 .

Уколико равни π и π_1 нису паралелне, тај пресек је коначна права равни π , а могуће је да је једна од тачака P, Q, R њена бесконачна тачка.

Ако су равни π и π_1 паралелне, тачке P, Q, R припадају бесконачно далекој правој равни π .

Претпоставимо сада да су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ у истој равни π . Нека се праве AA_1, BB_1, CC_1 секу у тачки O (коначној или бесконачној). Нека је O_1 тачка изван равни π и O_2 тачка таква да су O, O_1, O_2 колинеарне. Праве O_1O_2 и AA_1 су компланарне јер се секу у тачки O . Зато су и праве O_1A и O_2A_1 компланарне, па се секу у тачки A_2 .

Слично, постоје и пресеци $O_1B \cap O_2B_1 = \{B_2\}$, $O_1C \cap O_2C_1 = \{C_2\}$. При томе троугао $A_2B_2C_2$ припада некој равни $\pi_1 \neq \pi$.

Праве AA_2, BB_2, CC_2 припадају једном прамену, па се, на основу првог дела доказа, праве BC и B_2C_2 , AC и A_2C_2 , AB и A_2B_2 секу у колинеарним тачкама P, Q, R , које при том припадају пресеку $\pi \cap \pi_1$, односно представљају пресеке правих B_2C_2, A_2C_2, A_2B_2 са равни π .

Слично, и праве AA_1, BB_1, CC_1 припадају једном прамену, па се праве BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 , AB и A_1B_1 редом секу у тачкама продора B_2C_2, A_2C_2, A_2B_2 са равни π . Зато се и праве BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 , AB и A_1B_1 секу у тачкама P, Q, R , које су колинеарне. $\square$

Теорема 2.2 (Обрнута Дезаргова теорема). *Нека су ABC и $A_1B_1C_1$ два троугла таква да су пресеци $\{P\} = BC \cap B_1C_1$, $\{Q\} = AC \cap A_1C_1$, $\{R\} = AB \cap A_1B_1$ колинеарне тачке (коначне или бесконачне). Тада праве AA_1 , BB_1 , CC_1 припадају једном прамену.*

Доказ. Нека троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ припадају различитим равнима π и π_1 . Тада тачке P , Q , R припадају пресеку равни $\pi \cap \pi_1$. Праве AB и A_1B_1 су компланарне, па су компланарне и праве AA_1 и BB_1 . Нека се оне секу у тачки O (коначној или бесконачној). Нека је пресек праве OC и равни π_1 тачка C_2 .

Тада, на основу Дезаргове теореме, права A_1C_2 садржи тачку Q , а права B_1C_2 садржи тачку P . Према томе $\{C_2\} = A_1Q \cap B_1P$, односно $C_2 = C_1$, те тврђење важи.

Уколико троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ припадају истој равни π , нека је O_1 тачка изван равни π . Нека је A_2 тачка праве O_1A , и нека је π_1 раван која садржи праву PQ и тачку A_2 . Она сече праве O_1B и O_1C у тачкама B_2 и C_2 (коначним или бесконачним).

Тада су пресеци $A_1B_1 \cap A_2B_2$, $B_1C_1 \cap B_2C_2$, $A_1C_1 \cap A_2C_2$ колинеарне тачке, па су, по првом делу доказа, праве A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 праве истог прамена.

Нека права O_1O_2 продире раван π у тачки O . Праве AO_1 и A_1O_2 су компланарне и припадају некој равни σ , па тачке A , A_1 , O_2 припадају и равни σ и равни π , односно A , A_1 , O су колинеарне. Слично, и праве BB_1 и CC_1 садрже тачку O . $\square$

2.3 Пројективна пресликавања

Дефиниција 2.3. Трансформација пројективне равни која сваку праву (укључујући и бесконачно далеку праву) пресликава у праву, назива се *пројективна трансформација*.

Из дефиниције следи да пројективне трансформације образују групу, односно да је композиција две пројективне трансформације опет пројективна трансформација.

Приметимо да су међу подгрупама ове групе и групе афиних трансформација које чувају паралелност правих (односно трансформације које чувају бесконачно далеку праву), као и групе сличности и кретања.

Показаћемо да је свака пројективна трансформација композиција централне пројекције и кретања простора које раван пројекције пресликава у полазну раван.

Свака пројективна трансформација може се представити као композиција две трансформације, од којих прва конику пресликава у круг.

Друга трансформација круг може пресликати само у конику.

Ово показује да су пројективне трансформације веома погодне за рад са коникама. Односно, да пројективна пресликавања сликају конике у конике.

Приметимо да хипербола сече бесконачно далеку праву у две тачке.

Те тачке одређују правце асимптота хиперболе.

Парабола додирује бесконачно далеку праву у тачки која одређује правац осе параболе.

Коначно, елипса нема заједничких тачака са бесконачно далеком правом.

2.4 Представљање пројективних пресликавања

Нека су π и π_1 различите равни и O тачка ван њих. Уочимо да се централним пројектовањем из тачке O равни π на раван π_1 праве (коначне или бесконачне) сликају у праве. Композиција пројективног пресликавања и изометрије простора која слика раван π_1 на раван π је пројективно пресликавање равни π у себе.

Нека су E, F, G и E_1, F_1, G_1 две тројке колинеарних тачака равни π . Нека је π_1 произвољна раван различита од π .

Произвољним централним пројектовањем равни π на раван π_1 , тачке E, F, G се сликају у E_2, F_2, G_2 . Раван π_1 можемо одабрати тако да E_2G_2 није паралелно равни π .

Нека је σ раван која садржи тачку E_1 и праву E_2G_2 .

Транслација равни π_1 којом се E_2 слика у E_1 чува колинеарност тачака и слика F_2 и G_2 у F_3 и G_3 , где права F_3G_3 сече раван π у E_1 .

Нека је

$$\{O\} = F_1F_3 \cap G_1G_3.$$

Тада централно пројектовање равни σ на π са центром у O слика тачке E, F, G у E_1, F_1, G_1 .

Дакле важи следећа лема.

Лема 2.4. *Ако су E, F, G и E_1, F_1, G_1 две тројке колинеарних тачака равни π , постоји (бар једно) пројективно пресликавање које слика E, F, G у E_1, F_1, G_1 .*

Доказ. Нека су A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 две четворке тачака од којих ниједне три у једној четворци нису колинеарне. Нека се редом праве AB и CD , A_1B_1 и C_1D_1 секу у E и E_1 , праве AD и BC , A_1D_1 и B_1C_1 секу у F и F_1 , а праве AC и A_1C_1 секу праве EF и E_1F_1 у G и G_1 .

Због претходне леме можемо претпоставити да је $E = E_1$, $F = F_1$, $G = G_1$. Посматрајући троуглове ABC и $A_1B_1C_1$, из обрнуте Дезаргове теореме добијамо да праве AA_1 , BB_1 , CC_1 припадају истом прамену.

Слично, применом обрнуте Дезаргове теореме на троуглове ACD и $A_1C_1D_1$ видимо да су и праве AA_1 , CC_1 , DD_1 из истог прамена, те све четири праве припадају једном прамену.

Уочимо најпре да, уколико кренемо од тачака A, B, C и произвољног пројективног пресликавања, претпостављајући да су тачке E, F, G на правама AB , BC и AC колинеарне и фиксне (што можемо претпоставити због леме 2.4), слика D_1 произвољне тачке D праве AF одређена је на јединствен начин, јер DD_1 припада одговарајућем прамену а тачка D_1 припада и правој A_1F .

Нека је X произвољна тачка праве EG , а D пресек правих AF и CX . Како су праве AA_1 , CC_1 , DD_1 из истог прамена, због Дезаргове теореме пресек правих CD и C_1D_1 припада правој EG , односно, CD и C_1D_1 се секу у X , па је и X фиксна тачка. $\square$

Дакле, важи следећа лема.

Лема 2.5. *Нека су A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 две четворке тачака од којих ниједне три у једној четворци нису колинеарне. Тада постоји јединствено пројективно пресликавање равни које слика A, B, C, D у A_1, B_1, C_1, D_1 .*

Са друге стране, ако су A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 две четворке тачака од којих ниједне три у једној четворци нису колинеарне, а притом су праве AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 праве једног прамена, онда, слично као у доказу обрнуте Дезаргове теореме, постоји четворка тачака A_2, B_2, C_2, D_2 које припадају некој равни π_1 и два централна пројектовања којима се прво четворка $ABCD$ слика у $A_2B_2C_2D_2$, а затим $A_2B_2C_2D_2$ у $A_1B_1C_1D_1$.

Дакле постоји композиција централних пројектовања и изометрија простора којом се једна четворка слика у другу.

Према томе, сваку пројективну трансформацију равни можемо представити као композицију централних пројектовања и изометрија простора.

2.4.1 Конике у пројективним пресликавањима

Прво уочимо да је сваки конусни пресек пројективно еквивалентан кругу (пресеку конуса и равни ортогоналне на осу), јер се одговарајући круг и конусни пресек сликају један у други централном пројекцијом из врха конуса.

Зато су и сваке две конике пројективно еквивалентне кругу, па су и међусобно пројективно еквивалентне.

Покажимо да ће се произвољним пројективним пресликавањем коника сликати у конику. Довољно је показати и да се централним пројектовањем једне равни на другу, коника слика у конику.

Нека је S центар пројектовања и нека је дата произвољна коника у равни π која не садржи тачку S . Праве које садрже тачку S и тачке

конике чине квадратни конус. Показаћемо да је то површ другог реда, односно да је описана квадратном једначином.

Прво посматрајмо конику у равни π и тачку S која не припада тој равни.

Можемо посматрати координатни систем простора такав да је тачка S координатни почетак, а раван π дата једначином

$$z = z_0 = \text{const}, \quad z_0 \neq 0.$$

Тада је једначина конике

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (2.1)$$

Посматрајмо тачке правих које садрже S и тачке конике. Оне чине квадратни конус, а његове тачке су дате са

$$(X, Y, Z) = (tx, ty, tz_0), \quad t \in R,$$

где важи (2.1).

Елиминацијом параметра t добијамо

$$t = \frac{Z}{z_0}, \quad x = \frac{Xz_0}{Z}, \quad y = \frac{Yz_0}{Z},$$

па је једначина квадратног конуса(као и било које површи другог реда)

$$a'_{11}X^2 + 2a'_{12}XY + a'_{22}Y^2 + 2a'_{13}XZ + 2a'_{23}YZ + a'_{33}Z^2 = 0.$$

где је $a'_{11} = a_{11}z_0^2$, $a'_{12} = a_{12}z_0^2$, $a'_{22} = a_{22}z_0^2$, $a'_{13} = a_{13}z_0$, $a'_{23} = a_{23}z_0$, $a'_{33} = a_{33}$.

Ако је

$$A = (a'_{ij}), \quad A = A^T,$$

тада матрично можемо записати претходну једначину

$$(X \ Y \ Z) A (X \ Y \ Z)^T = 0.$$

Уколико променимо координатни систем у простору (односно посматрамо раван π задату другом једначином), та промена се може записати као

$$(X \ Y \ Z)^T = M(X_1 \ Y_1 \ Z_1)^T,$$

где је M ортогонална матрица, односно

$$MM^T = E.$$

Тада је једначина квадратног конуса

$$(X_1 \ Y_1 \ Z_1) M^T A M (X_1 \ Y_1 \ Z_1)^T = 0,$$

односно поново квадратна једначина.

Дакле, једначина квадратног конуса са врхом у координатном почетку је

$$b_{11}X^2 + 2b_{12}XY + b_{22}Y^2 + 2b_{13}XZ + 2b_{23}YZ + b_{33}Z^2 = 0. \quad (2.2)$$

Сада пројектујемо почетну конику на раван π_1 са центром пројектовања у тачки S . Тражени скуп тачака је пресек добијене квадратне конике и равни π_1 .

Поново можемо претпоставити да је дат координатни систем у ком је тачка S координатни почетак, а раван π_1 дата једначином

$$Z = 1.$$

Коника у равни π и тачка S одређују квадратни конус са једначином (2.2), а његов пресек са равни $Z = 1$ има једначину

$$b_{11}X^2 + 2b_{12}XY + b_{22}Y^2 + 2b_{13}X + 2b_{23}Y + b_{33} = 0,$$

па је тражена пројекција на раван π_1 такође коника.

Показали смо да важи следећа теорема.

Теорема 2.6. *Пројективним пресликавањем равни коника се слика у конику.*

Покажимо да било којих пет тачака у општем положају, односно таквих да никоје три од њих нису колинеарне, одређује јединствену конику. Пресликајмо пројективним пресликавањем четири од њих у темена квадрата са координатама ± 1 .

Лако се проверава да су конике које пролазе кроз та темена облика

$$ax^2 + (1 - a)y^2 = 1.$$

Сада је јасно да тачно једна крива овог облика може да прође кроз дату тачку у равни.

Касније ћемо показати да постоји јединствена коника која је тангентна на пет датих правих у општем положају.

2.5 Дворазмера

Нека су A и B две пројективне тачке и p права коју оне одређују. Тада произвољна пројективна тачка C припада правој p ако и само ако је вектор $\vec{C}$ линеарна комбинација вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, односно ако постоје α и β такви да је $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$. При том важи да је $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Уочимо и да је $k\alpha\vec{A} + k\beta\vec{B}$ такође вектор који одговара тачки C , односно да су α и β одређени до на коефицијент сразмерности. Ако је $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, тада је $B = C$ односно $A = C$. Ако $\alpha \neq 0$, онда за $k = \frac{1}{\alpha}$ добијамо да је један од вектора колинеарних са $\vec{C}$ једнак $\vec{A} + \frac{\beta}{\alpha}\vec{B}$.

Нека су сада $C \neq D$ тачке праве p различите од A и B , и нека је $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$ и $\vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$. Тада је сваки од коефицијената $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ различит од нуле, а с обзиром да је $C \neq D$ важи и да је $\frac{\beta}{\alpha} \neq \frac{\delta}{\gamma}$.

Дефиниција 2.7. Број $(A, B; C, D) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}$ називамо *дворазмером* тачака A, B, C, D .

Теорема 2.8. *Пројективне трансформације чувају дворазмеру тачака на правој.*

Лема 2.9. *Нека се пројективном трансформацијом колинеарне тачке A, B, C и D сликају у тачке A', B', C' и D' , тада важи:*

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D').$$

Доказ. Као што је раније показано, свака пројективна трансформација може се посматрати као композиција централних пројектовања и кретања простора. Довољно је показати тврђење за централна пројектовања. Нека је P центар те пројекције

Тада важи:

$$\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{S_{ACP} \cdot S_{BDP}}{S_{ADP} \cdot S_{BCP}},$$

јер је површина сваког од тих троуглова једнака половини производа дужине одговарајућег сегмента и удаљености тачке P од праве која садржи те тачке.

С друге стране, површина троугла се може изразити као половина производа страница и синуса угла између њих. Ради прегледности, нека је угао између PA и PB једнак α , између PB и PC једнак β , а између PC и PD једнак γ .

Тада добијамо:

$$S_{ACP} \cdot S_{BDP} = (AP \cdot CP \cdot \sin(\alpha + \beta)) \cdot (BP \cdot DP \cdot \sin(\beta + \gamma)),$$

$$S_{ADP} \cdot S_{BCP} = (AP \cdot DP \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma)) \cdot (BP \cdot CP \cdot \sin \beta).$$

Одавде следи:

$$\frac{S_{ACP} \cdot S_{BDP}}{S_{ADP} \cdot S_{BCP}} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin \beta}.$$

Пошто овај однос не зависи од праве на којој се тачке налазе, добијамо:

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D').$$

□

Ово својство омогућава дефинисање дворазмере четири праве које се секу у једној тачки као дворазмере њихових пресека са произвољном правом. Очигледно, ова вредност је такође инваријантна у односу на пројективне трансформације.

Дворазмера правих a, b, c, d означава се као $(ab; cd)$.

Дефиниција 2.10. Четири различите колинеарне тачке A, B, C и D су *хармонијски сирећуће* или *хармонијски конјуговане* ако је $(A, B; C, D) = -1$. Тада пишемо $H(A, B; C, D)$.

Лема 2.11. *Ако су A, B, C, D четири хармонијски сјрећнуће шачке, онда важи:*

$$H(A, B; C, D) \Rightarrow H(A, B; D, C), \quad H(B, A; C, D), \quad H(C, D; A, B).$$

Замена места тачака унутар једног пара мења вредност дворазмере, односно важи $(A, B, D, C) = (A, B, C, D)^{-1}$. У случају да су тачке хармонијски конјуговане $H(A, B, C, D)$ повлачи $H(A, B, D, C)$. Замена самих парова не мења вредност дворазмере.

Глава 3

Праменови кругова

3.1 Пол и полара

Дефиниција 3.1. Поларна кореспонденција у односу на круг са центром O и полупречником r свакој тачки равни различитој од O придружује праву a која је нормална на OA и која сече полуправу OA у тачки која је инверзна тачки A у односу на дату кружницу.

Права a се назива *полара тачке A* , а тачка A се назива *пол* праве a .

Полара тачке O дефинише се као бесконачно удаљена права, док се полара тачке у бесконачности дефинише као права кроз O нормална на паралелне праве које пролазе кроз ту тачку.

Дефиниција 3.2. Нека су A и B две тачке и k коника у равни. Нека права AB сече конику у тачкама P и Q . Ако важи

$$H(A, B; P, Q),$$

онда кажемо да су тачке A и B *хармонијски спрејнуће* у односу на конику.

Нека је круг

$$k: x^2 + y^2 = r^2,$$

и нека је A тачка равни тог круга. Без умањења општости можемо претпоставити да је

$$A = (a, 0).$$

Тада инверзна тачка A' има координате

$$A' = \left(\frac{r^2}{a}, 0 \right),$$

а једначина поларе тачке A је

$$x = \frac{r^2}{a}.$$

Покажимо да полара садржи све тачке које су хармонијски спрегнуте са тачком A у односу на круг k .

Нека је

$$X\left(\frac{r^2}{a}, t\right)$$

произвольна тачка поларе. Тада су параметарске једначине праве AX

$$\begin{aligned} x &= \lambda \frac{r^2 - a^2}{a} + a, & \lambda \in R. \\ y &= \lambda t, \end{aligned}$$

Тачкама A и X одговарају вредности параметра $\lambda = 0$, односно $\lambda = 1$.

Права AX може сећи круг у две различите тачке, додиривати круг (када је тангента) или не сећи круг. У последњем случају можемо сматрати да права сече круг у две имагинарне тачке.

Пресечне тачке добијају се за вредности параметара λ_1 и λ_2 , које су решења једначине

$$\left(\lambda \frac{r^2 - a^2}{a} + a\right)^2 + \lambda^2 t^2 = r^2,$$

односно

$$\lambda^2 \left[\left(\frac{r^2 - a^2}{a} \right)^2 + t^2 \right] + 2\lambda(r^2 - a^2) + (a^2 - r^2) = 0. \quad (3.1)$$

Решењима λ_1 и λ_2 одговарају пресечне тачке праве AX и круга k . Ако су решења реална и различита, добијају се две различите тачке P и Q . Ако је решење двоструко, тачке P и Q се поклапају, док у случају комплексно-конјугованих решења добијамо имагинарне пресеке.

Тачке P , Q , A и X су хармонијски спрегнуте ако и само ако важи

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{AQ}} = -\frac{\overrightarrow{PX}}{\overrightarrow{XQ}},$$

односно

$$\frac{0 - \lambda_1}{\lambda_2 - 0} = -\frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - 1},$$

што је еквивалентно услову

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_1\lambda_2.$$

Из једначине (3.1), применом Вијетових формула, добијамо

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2(r^2 - a^2)}{\left(\frac{r^2 - a^2}{a}\right)^2 + t^2},$$

и

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{a^2 - r^2}{\left(\frac{r^2 - a^2}{a}\right)^2 + t^2}.$$

Пошто је

$$a^2 - r^2 = -(r^2 - a^2),$$

непосредно следи да важи

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_1\lambda_2.$$

Дакле, полара је геометријско место свих тачака равни које су хармонијски спрегнуте са полом у односу на круг.

Теорема 3.3. Нека су A и a , односно B и b , редом њарови њол-њолара у односу на даџи круї. Тада џачка A њриџада њолари b ако и само ако џачка B њриџада њолари a .

Уочимо и следеће.

Ако тачка A припада кругу k , онда је њена полара уједно и тангента на круг у тачки A .

Ако тачка A припада спољашњости круга, нека су P и Q додирне тачке тангенти повучених из тачке A на круг k . Тада инверзна тачка A' припада правој PQ , а сама полара је управо права PQ .

Дефиниција 3.4. Нека је P тачка равни круга k са центром у тачки O и полупречником r . Поџенција џачке P у односу на круг k једнака је величини

$$OP^2 - r^2.$$

Уочимо да тачке које припадају спољашњости круга k имају позитивну потенцију, тачке које припадају унутрашњости круга имају негативну потенцију, док тачке које припадају самом кругу имају потенцију једнаку нули.

На потпуно аналоган начин може се дефинисати и потенција тачке у односу на сферу.

Лема 3.5. Нека њрава која њролази кроз џачку P сече круї у џачкама X и Y . Тада њроизвод $PX \cdot PY$ не зависи од избора њраве и једнак је аџсолуџној вредноџи њоџенције џачке P у односу на круї.

Доказ. Нека постоје две праве које пролазе кроз тачку P тако да прва сече круг у тачкама A и B , а друга у тачкама C и D . Довољно је показати да важи

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Очигледно су троуглови PAC и PDB слични, па важи:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB},$$

одакле следи:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Потребно је показати да ова вредност једнака апсолутној вредности потенције тачке P у односу на круг.

Посматрајмо праву која садржи тачке O и P . Тада је производ растојања од тачке P до пресечних тачака те праве са кругом једнак:

$$(OP + r)(OP - r),$$

где је O центар круга, а r њен полупречник.

Очигледно важи:

$$(OP + r)(OP - r) = OP^2 - r^2.$$

□

Аналогно тврђење важи и за сфере. Нека је X произвољна тачка, а p и q две праве које садрже тачку X и секу сферу у тачкама A и B , односно C и D .

Раван која садржи праве p и q сече сферу по кругу, па се на основу претходно доказаног директно добија да производ

$$XA \cdot XB$$

не зависи од избора праве p .

Ако посматрамо праву OX , где је O центар сфере, добијамо да је тражени израз једнак апсолутној вредности потенције тачке X у односу на дату сферу.

Теорема 3.6. *Скупи тачака једне равни које имају исту потенцију у односу на два дапа неконцентрична круга је права.*

Доказ. Нека се два круга секу у тачкама A и B . Покажимо да је скуп свих тачака које имају исту потенцију у односу на ова два круга управо права AB .

Нека је P произвољна тачка на правој AB . Тада је апсолутна вредност потенције тачке P у односу на оба круга једнака производу

$$PA \cdot PB.$$

Дакле, свака тачка на правој AB има исту потенцију у односу на оба круга.

Нека је X произвољна тачка која не припада правој AB . Претпоставимо да тачка X има исту потенцију у односу на оба круга. Права XA није тангентна на бар један од два круга па га сече у још једној тачки M . Нека сече други круг у тачки N . Уколико је тангентна на други круг сматрамо да је $A = N$. Ако је потенција тачке X у односу на два круга била иста тада би важило $XM = XN$, односно X је средиште дужи MN . Тачка A такође припада дужи MN . С обзиром да се тачка X разликује од A , она припада једној од отворених дужи MA или NA , на пример, нека припада MA . Тада је X у унутрашњости првог круга, а у спољашњости другог, па је потенција тачке X у односу на први круг негативна, а у односу на други

позитивна, што није могуће. Дакле, тачке праве AB су једине које имају исту потенцију у односу на оба круга.

Нека су O_1 и O_2 центри ових кругова. Уочимо да је права AB нормална на праву O_1O_2 .

Сада доказујемо теорему у случају када кругови немају заједничке тачке или се додирују у једној тачки. У ту сврху користимо користан трик.

Посматрајмо две сфере које секу дату раван по круговима које посматрамо и које се при том секу. Уколико је Y произвољна тачка ван равни кругова, сфере које садрже тачку Y и дате кругове испуњавају овај услов. Пресек сфера је тада круг који садржи тачку Y и припада равни σ која је ортогонална на правој која садржи центре сфера S_1 и S_2 .

Истим аргументима лако добијамо да је скуп свих тачака простора које имају исту потенцију у односу на две сфере раван која садржи пресечни круг l двеју сфера.

Тачке које имају исту потенцију у односу на дате кругове имају и исту потенцију у односу на сфере, па припадају равни круга l . Дакле, у питању су тачке пресечне праве равни π и равни круга l . □

Праву из претходне теореме називамо *радикалном осом* тих кругова.

Нека су O_1 и O_2 , односно S_1 и S_2 , центри одговарајућих кругова и сфера. Праве O_1S_1 и O_2S_2 су паралелне и ортогоналне на раван π , па припадају једној равни α која је нормална на раван π .

С обзиром на то да раван α садржи праву S_1S_2 , која је нормална на раван пресечног круга l , следи да је раван α нормална и на ту раван, па самим тим и на њен пресек са равни π , односно на радикалну осу два круга.

Одатле следи да је и права O_1O_2 нормална на радикалну осу.

Специјално, у случају када се кругови додирују у једној тачки, радикална оса садржи њихову додирну тачку и нормална је на праву O_1O_2 . Другим речима, радикална оса је њихова заједничка тангента.

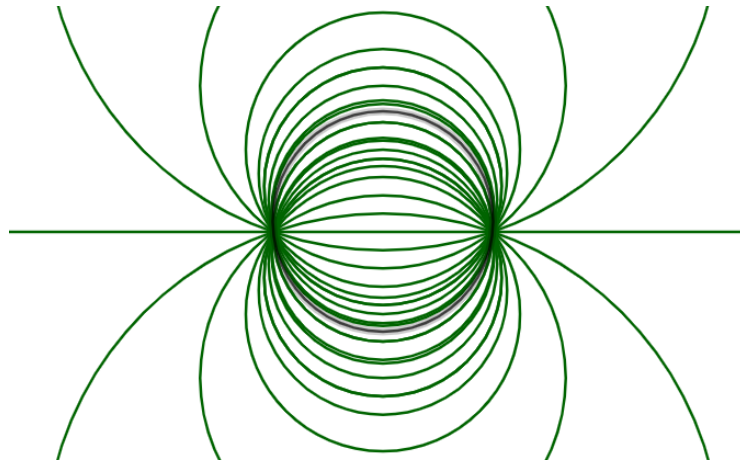
Нека су дата три круга. Ако њихови центри не леже на једној правој, онда постоје два пара тих кругова чије се радикалне осе секу. Потенције њихове пресечне тачке у односу на сва три круга су једнаке, па зато и трећа радикална оса такође пролази кроз ту тачку.

Та тачка се назива *радикални центар* три круга.

Ако центри кругова леже на једној правој, онда су радикалне осе паралелне (тј. секу се у бесконачно далекој тачки) или се поклапају. У последњем случају, када кругови у паровима имају исту радикалну осу, кажемо да су *коаксијални*.

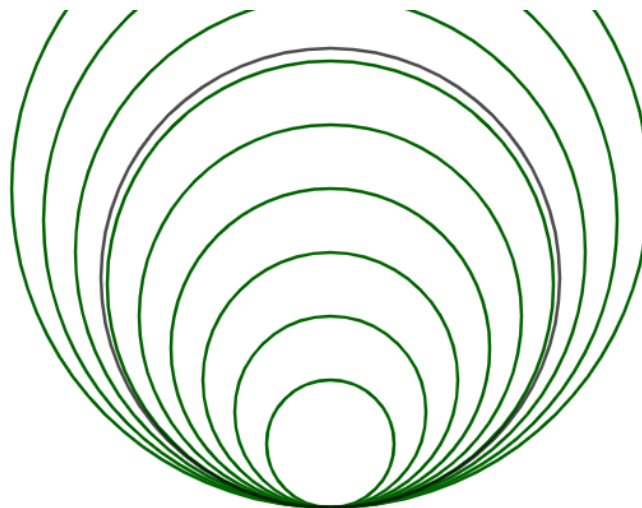
Дефиниција 3.7. Скуп свих кругова који су коаксијални са два дата круга назива се *прамен кругова*.

Ако се кругови који одређују прамен секу у две тачке, онда прамен чине сви кругови који пролазе кроз те две тачке. Такав прамен се назива *хиперболички прамен*.



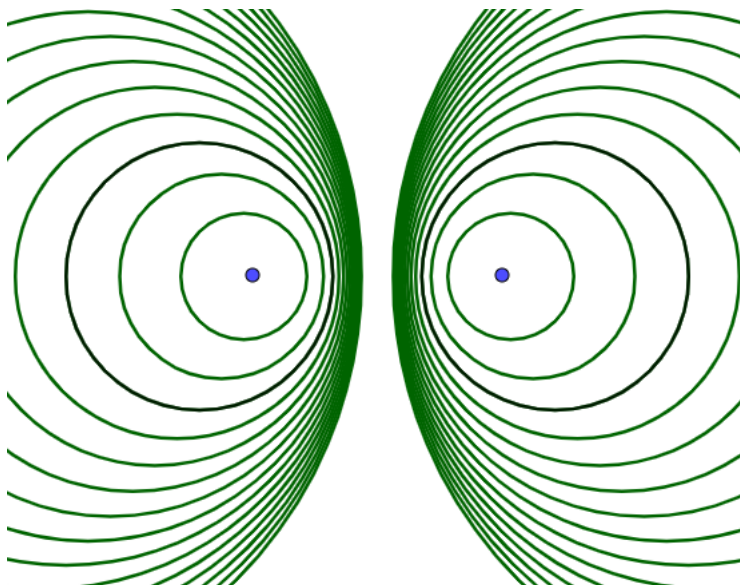
Слика 3.1: Хиперболички прамен кругова

Ако су два круга тангентна, онда је сваки круг из прамена тангентан на њихову заједничку тангенту у истој тачки. Такав прамен се назива *параболички прамен*.



Слика 3.2: Параболички прамен кругова

Коначно, два круга која се не секу одређују *елиптички прамен*. У елиптичком прамену два круга се дегенеришу у тачке, које се називају *граничне тачке прамена*.



Слика 3.3: Елиптички прамен кругова

За сваку тачку на радикалној оси која се налази изван кругова, тангенте на кругове прамена из те тачке имају једнаке дужине. Због тога круг са центром у тој тачки и полупречником једнаким дужини тангенте је нормална на све кругове прамена. Сви такви кругови чине други прамен, а било која два од њих једнозначно одређују почетни прамен.

Из овога следи да инверзија у односу на произвољни круг пресликава праменове у праменове. Сваки прамен који садржи круг инверзије пресликава се у самог себе.

Граничне тачке елиптичког прамена се у инверзији у односу на било који круг тог прамена пресликавају једна у другу.

Такође, инверзија са центром у граничној тачки пресликава кругове нормалног прамена у праве. Према томе, почетни прамен се пресликава у прамен концентричних кругова.

3.2 Паскалова теорема

Пре него што наведемо и докажемо Паскалову теорему, наведемо неколико помоћних тврђења. Прво наводимо Чеваову теорему.

Теорема 3.8 (Чеваова). *Нека су A , B и C шри неколинеарне шачке и X , Y и Z редом шачке шравих BC , CA и AB . Тада шправе AX , BY и CZ шприадају једном шрамену ако и само ако је*

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = 1. \quad (3.2)$$

Доказ. Доказаћемо тврђење коришћењем особина пројективних пресликавања. Означимо са A' , B' и C' бесконачно далеке тачке правих BC , CA и AB .

Претпоставимо најпре да праве AX , BY и CZ припадају једном прамену, односно нека се секу у тачки P (коначној или бесконачној). Из дефиниције дворазмере директно следи да је $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} = (B, C; X, A')$, $\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} = (C, A; Y, B')$ и $\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = (A, B; Z, C')$.

Нека праве кроз P , паралелне редом са BC и AB , секу праву AC у тачкама A'_1 и C'_1 . Централним пројектовањем праве BC на праву AC са центром у P , тачке B , C , X и A' се редом сликају у тачке Y , C , A и A'_1 , а како пројективна пресликавања чувају дворазмеру, важи $(B, C; X, A') = (Y, C; A, A'_1)$. Слично, централним пројектовањем праве AB на праву AC са центром у P добијамо $(A, B; Z, C') = (A, Y; C, C'_1)$.

Тада се лева страна једнакости (3.2) своди на

$$\begin{aligned} & (Y, C; A, A'_1)(C, A; Y, B')(A, B; Z, C') \\ &= \left(\frac{\overrightarrow{YA}}{\overrightarrow{AC}} : \frac{\overrightarrow{YA'_1}}{\overrightarrow{A'_1C}} \right) \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CY}} : \frac{\overrightarrow{AC'_1}}{\overrightarrow{C'_1Y}} \right) \\ &= \frac{\overrightarrow{A'_1C}}{\overrightarrow{YA'_1}} \frac{\overrightarrow{C'_1Y}}{\overrightarrow{AC'_1}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Претпоставимо да је тачка P коначна (слично се доказује и у случају када је бесконачна). Из Талесове теореме следи да је $\frac{\overrightarrow{A'_1C}}{\overrightarrow{YA'_1}} = \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{YP}}$ и $\frac{\overrightarrow{C'_1Y}}{\overrightarrow{AC'_1}} = \frac{\overrightarrow{PY}}{\overrightarrow{BP}}$, па добијамо да је лева страна једнакости (3.2) једнака 1.

Обрнуто, нека важи (3.2). Нека се праве AX и BY секу у некој тачки P (коначној или бесконачној). Нека права CP сече AB у тачки Z_1 . Тада, на основу претходног, важи

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \frac{\overrightarrow{AZ_1}}{\overrightarrow{Z_1B}} = 1,$$

па тачке Z и Z_1 морају бити истоветне. □

Нека је P тачка равни троугла ABC која не припада правама AB , BC и CA . Претпоставимо да се праве AP и BC , BP и CA , односно CP и AB секу редом у тачкама X , Y и Z .

Из синусне теореме примењене на троугао ABX имамо да је $BX \sin \angle AXB = AB \sin \angle BAP$, а слично, применом синусне теореме на троугао ACX , добијамо $XC \sin \angle AXC = AC \sin \angle PAC$.

Како је $\sin \angle AXB = \sin \angle AXC$, следи да је $\frac{BX}{XC} = \frac{AB \sin \angle BAP}{AC \sin \angle PAC}$.

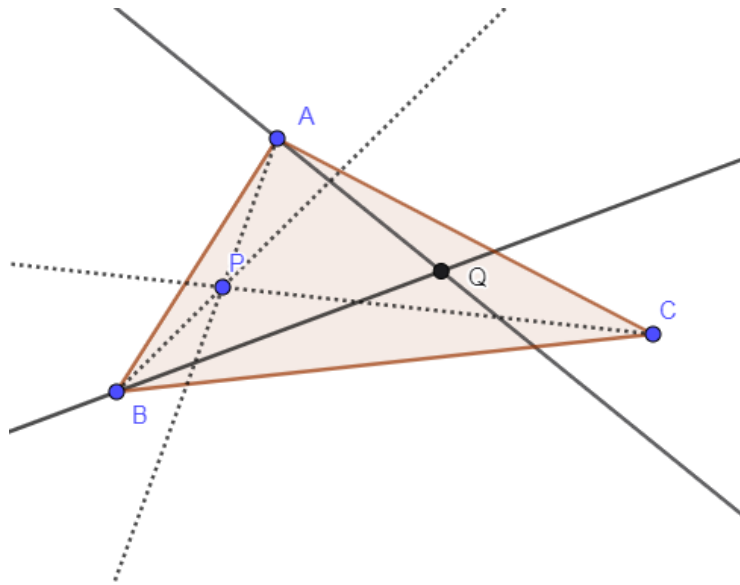
Уколико, као у исказу Чеваове теореме, посматрамо векторе $\overrightarrow{BX}$ и $\overrightarrow{XC}$, довољно је да посматрамо оријентисане углове $\angle BAP$ и $\angle PAC$.

Пошто се праве AX , BY и CZ секу у једној тачки, директна последица Чеваове теореме је

$$\frac{\sin \angle BAP}{\sin \angle PAC} \cdot \frac{\sin \angle CBP}{\sin \angle PBA} \cdot \frac{\sin \angle ACP}{\sin \angle PCB} = 1. \quad (3.4)$$

Теорема 3.9. Нека је P тачка равни троугла ABC различита од A , B и C и нека су редом p_A , p_B и p_C праве симетричне правима AP , BP и CP у односу на симетрале углова $\angle BAC$, $\angle CBA$ и $\angle BCA$. Тада праве p_A , p_B и p_C припадају једном прамену.

Доказ. Уколико се ниједне две од правих p_A , p_B и p_C не секу, тврђење тривијално важи. Претпоставимо зато да се праве p_A и p_B секу у (коначној) тачки Q .



Слика 3.4: Теорема 3.9

С обзиром на то да су p_A и p_B симетричне правима AP и BP у односу на симетрале углова у теменима A и B , директно следи да су следећи парови оријентисаних углова једнаки:

$$\begin{aligned} \angle PAC &= \angle BAQ, & \angle PBA &= \angle CBQ, \\ \angle BAP &= \angle QAC, & \angle CBP &= \angle QBA. \end{aligned}$$

Зато се једнакост (3.4) своди на

$$\frac{\sin \angle QAC}{\sin \angle BAQ} \cdot \frac{\sin \angle QBA}{\sin \angle CBQ} \cdot \frac{\sin \angle ACP}{\sin \angle PCB} = 1. \quad (3.5)$$

Примењујући једнакост (3.4) на тачку Q , добијамо

$$\frac{\sin \angle QAC}{\sin \angle BAQ} \cdot \frac{\sin \angle QBA}{\sin \angle CBQ} \cdot \frac{\sin \angle QCB}{\sin \angle ACQ} = 1. \quad (3.6)$$

Из једнакости (3.5) и (3.6) следи да је

$$\frac{\sin \angle ACP}{\sin \angle PCB} = \frac{\sin \angle QCB}{\sin \angle ACQ}.$$

Ако означимо

$$\alpha = \angle ACP, \quad \beta = \angle PCB, \quad \alpha_1 = \angle QCB, \quad \beta_1 = \angle ACQ,$$

имамо да је

$$\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1 = \angle ACB$$

и

$$\sin \alpha_1 \sin \beta = \sin \alpha \sin \beta_1.$$

Одавде следи

$$\cos(\alpha_1 - \beta) - \cos(\alpha_1 + \beta) = \cos(\beta_1 - \alpha) - \cos(\beta_1 + \alpha),$$

односно

$$\cos(\alpha_1 - \beta) - \cos(\beta_1 - \alpha) = \cos(\alpha_1 + \beta) - \cos(\beta_1 + \alpha).$$

Из адиционих формула добијамо

$$-2 \sin \angle ACB \sin \left(\frac{\alpha_1 - \alpha + \beta - \beta_1}{2} \right) = -2 \sin \angle ACB \sin \left(\frac{\alpha_1 - \alpha}{2} + \frac{\beta - \beta_1}{2} \right). \quad (3.7)$$

Како важи $\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1$, добијамо

$$\alpha_1 - \alpha = \beta - \beta_1 = \phi.$$

Зато се претходна једнакост своди на $\phi = 0$, односно

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1.$$

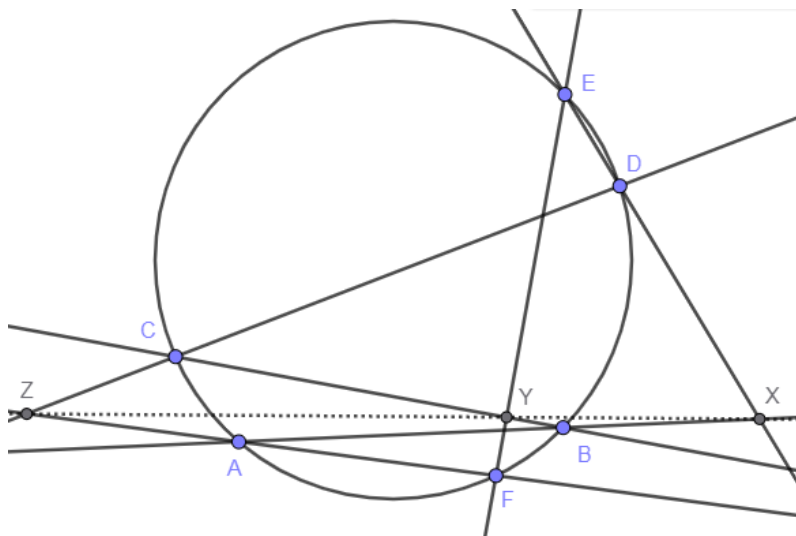
Дакле, праве CP и CQ су симетричне у односу на симетралу угла $\angle ACB$. Следи да права p_C пролази кроз тачку Q , па праве p_A , p_B и p_C припадају једном прамену. $\square$

Дефиниција 3.10. За тачке P и Q кажемо да су изогонално конјуговане у троуглу ABC .

Теорема 3.11 (Паскалова теорема). Нека шачке A, B, C, D, E и F леже на коници. Тада се пресечне шачке њравих AB и DE , BC и EF , као и CD и FA , налазе на једној њравој.

Доказ. Посматраћемо један случај релативног распореда тачака на кругу (односно коници). Остали случајеви се доказују на сличан начин.

Помоћу пројективне трансформације можемо пресликати дату конику у круг. Посматрајмо случај распореда тачака A, B, C, D, E, F на кругу као на слици(3.5).



Слика 3.5: Паскалова теорема

Нека су:

$$\{X\} = AB \cap DE, \quad \{Y\} = BC \cap EF, \quad \{Z\} = CD \cap FA.$$

Потребно је доказати да су тачке X, Y, Z колинеарне.

Углови $\angle BAF$ и $\angle BCF$ су једнаки као периферијски углови над истом тетивом. Слично, углови $\angle CDE$ и $\angle CFE$ су једнаки.

Даље, троуглови AZD и CZF су слични. Посматрајмо сличност која пресликава троугао AZD у троугао CZF . Тачка Z је фиксна у тој сличности, а с обзиром на то да су троуглови AZD и CZF супротно оријентисани, у питању је индиректна сличност. Права DE се слика у праву која садржи F и са FZ заклапа угао $\angle EDZ$. Значи, слика се у праву која је симетрична правој FE у односу на симетралу угла $\angle CFZ$. Слично, права AB се слика у праву симетричну правој CB у односу на симетралу угла $\angle FCZ$. Зато се тачка X , као њихов пресек, слика у тачку X' која је изогонално конјугована тачки Y у троуглу FCZ .

Због једнакости одговарајућих углова добијамо:

$$\angle ZAX = \angle ZCX' = \angle FZY.$$

Одатле следи да су тачке X, Z и Y колинеарне, што и треба доказати. $\square$

Напоменимо да Паскалова теорема важи и у специјалним, „дегенерисаним“, случајевима. Уколико посматрамо пет тачака на коници, A, B, C, D и E , и уместо праве FE у исказу теореме посматрамо тангенту на конику у тачки E , тврђење опет важи. Наиме, ако посматрамо шест тачака на коници, укључујући F , тако да се F „приближава“ E , тада и сечица EF „тежи“ тангенти на конику у тачки E . Слично, можемо посматрати и друге случајеве где се уместо пара тачака и сечице њима одређене посматра тачка и тангента на

конику у тој тачки, па се Паскалова теорема може применити и на пет тачака и тангенту у једној од њих, четири тачке на коници и 2 тангенте у неким од њих, као и на три тачке на коници и 3 тангенте у свакој од њих.

Теорема 3.12 (Обрнута Паскалова теорема). *За било којих шест $\bar{X}_i$, $i = 1, \dots, 6$, ако се $\bar{X}_1\bar{X}_2$ и $\bar{X}_4\bar{X}_5$, $\bar{X}_2\bar{X}_3$ и $\bar{X}_5\bar{X}_6$, као и $\bar{X}_3\bar{X}_4$ и $\bar{X}_6\bar{X}_1$ налазе на једној $\bar{X}$ -правој, $\bar{X}$ -тада постоји коника која $\bar{X}$ -пролази кроз свих шест $\bar{X}_i$.*

Доказ. Користимо чињеницу да за било којих пет тачака у општем положају постоји јединствена коника која кроз њих пролази. Нека је α таква коника која пролази кроз тачке X_i , $i = 1, \dots, 5$.

Нека су A , B и C пресечне тачке правих

$$X_1X_2 \cap X_4X_5 = \{A\}, \quad X_2X_3 \cap X_5X_6 = \{B\}, \quad X_3X_4 \cap X_6X_1 = \{C\}.$$

и нека је Y друга пресечна тачка праве BX_5 са коником α (различита од X_5).

Према Паскаловој теорему, пресечна тачка правих X_3X_4 и X_1Y лежи на правој AB , односно поклапа се са тачком C .

Одатле следи да се тачка Y поклапа са тачком X_6 .

Дакле, свих шест тачака $X_1, \dots, X_6$ лежи на истој коници. $\square$

3.3 Брианшонова теорема

У овом поглављу ћемо представити Брианшонову теорему. У пројективној геометрији важи принцип дуалности: уколико важи тврђење везано за тачке и праве, уколико се реч „тачка“ замени са „права“ и обрнуто, а односи инциденције се не мењају, поново се добија тврђење пројективне геометрије. Појам дуалан кривој другог реда је крива друге класе, она је скуп свих тангенти на неку криву другог реда. Брианшонова теорема је у том смислу дуална Паскаловој. Међутим, с обзиром да нисмо дубље користили апарат пројективне геометрије, доказаћемо Брианшонову теорему на други начин.

Теорема 3.13 (Брианшонова теорема). *Нека су $\bar{k}_i$, $i = 1, \dots, 6$, $\bar{X}$ -танјентне на исту конику, и нека је A_{ij} $\bar{X}$ -пресек $\bar{k}_i$ и $\bar{k}_j$. Тада се $\bar{X}$ -праве*

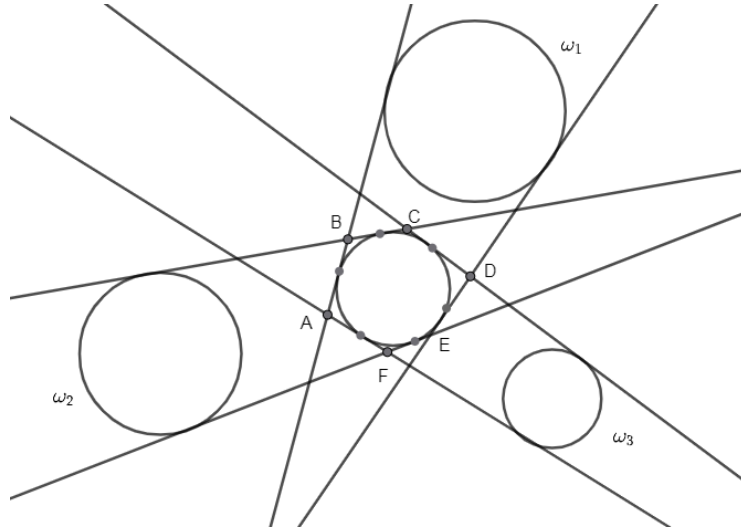
$$A_{12}A_{45}, \quad A_{23}A_{56}, \quad A_{34}A_{61}$$

секу у једној $\bar{X}$ -тачки.

Доказ. Помоћу пројективне трансформације можемо пресликати дату конику у круг. Тада претпостављамо да је дат хексагон описан око круга, при чему су наведене праве његове главне дијагонале.

Нека је дат описани хексагон $ABCDEF$. Треба доказати да се праве AD , BE и CF секу у једној тачки.

Посматрајмо кругове ω_1, ω_2 и ω_3 , који су тангентни на парове прaviх AB и DE , BC и EF , CD и FA , редом, тако да су њихове тачке додира на растојању a од одговарајућих тачака додира страница хексагона и круга (означимо их са $A_1, B_1, \dots, F_1$).



Слика 3.6: Брианшонова теорема

Тада је потенција тачке A у односу на кругове ω_1 и ω_3 једнака $(AA_1 + a)^2$. Одатле следи да тачка A лежи на радикалној оси та два круга. Исто важи и за тачку D . Према томе, права AD је радикална оса круга ω_1 и ω_3 .

Слично, добијамо да је права BE радикална оса кругова ω_1 и ω_2 , а да је права CF радикална оса кругова ω_2 и ω_3 .

Пошто се радикалне осе три круга секу у једној тачки (радикалном центру), који може бити коначна или бесконачна тачка, следи да се праве AD , BE и CF секу у једној тачки — у радикалном центру кругова ω_1, ω_2 и ω_3 . $\square$

Теорема 3.14 (Обрнута Брианшонова теорема). *Нека су даће љраве $k_i, i = 1, \dots, 6$, и нека је A_{ij} љресек љравих k_i и k_j . Ако се љраве*

$$A_{12}A_{45}, \quad A_{23}A_{56}, \quad A_{34}A_{61}$$

секу у једној љтачки, љтада љосљоји коника која је љанљенљна на све љраве k_i .

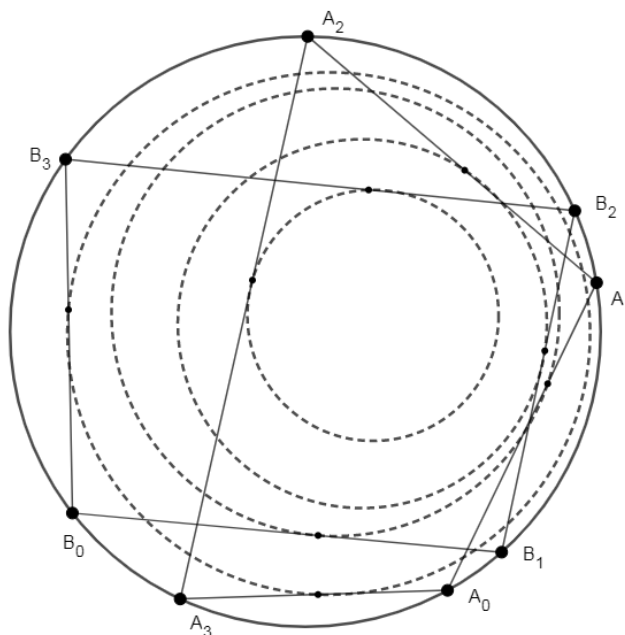
Доказ. Доказ је сличан као у претходној теорему. Међутим, овде је прво потребно показати да постоји јединствена коника која је тангентна на пет датих прaviх.

Користећи Брианшонову теорему, можемо конструисати тачке додира тих прaviх са коником. Али кроз пет тачака пролази само једна коника, па је она тиме једнозначно одређена. $\square$

3.4 Понселеова теорема за кругове

Теорема 3.15 (Понселеова теорема за кругове). Нека су кругови ω_i из истог прамена и нека је A_0 тачка на кругу ω_0 . Тангенција на ω_1 из тачке A_0 поново сече ω_0 у тачки A_1 , тангенција на ω_2 из тачке A_1 поново сече ω_0 у тачки A_2 , и тако даље, тангенција на ω_{i+1} из тачке A_i поново сече ω_0 у тачки A_{i+1} .

Претпоставимо да за неко n важи $A_n = A_0$. Тада за сваку постојећу тачку B_0 на ω_0 , аналогно конструисана тачка B_n такође се поклапа са B_0 .



Слика 3.7: Понселеова теорема за кругове

Доказ. Довољно је показати да су све дужи $A_i B_i$ тангенте једног фиксног круга из посматраног прамена кругова.

Заиста, ако се догоди да се тачке A_0 и A_n поклопе, онда се поклапају и тангенте на круг прамена које пролазе кроз те тачке (уз одговарајући избор оријентације тангенти). Према томе, њихови пресеци са ω_0 морају се поклопити, а то су управо тачке B_0 и B_n .

Претпоставимо да су праве $A_0 A_1$ и $B_0 B_1$ тангенте круга ω_1 у тачкама X и Y , редом. Нека је

$$\{Z\} = A_0 A_1 \cap B_0 B_1.$$

Троугао XZY је једнакокрак, јер су ZX и ZY тангенте на круг ω_1 повучене из тачке Z . Отуда следи

$$\angle ZXY = \angle ZYX.$$

Поред тога,

$$\angle B_1 A_1 A_0 = \angle B_1 B_0 A_0,$$

па су троуглови XQA_1 и YPB_0 слични, где су P и Q пресечне тачке праве XY са дужима A_0B_0 , односно A_1B_1 .

Из сличности следи

$$\angle PQA_1 = \angle QPB_0,$$

па постоји круг ω' који је тангентан на дужи A_0B_0 и A_1B_1 у тачкама P и Q , редом.

Остаје да покажемо да круг ω' припада посматраном прамену. Довољно је доказати да круг ω_0 припада прамену одређеном круговима ω_1 и ω' .

Показаћемо да су количници потенција тачака A_0 , A_1 , B_0 и B_1 у односу на кругове ω_1 и ω' једнаки. Очигледно, ови количници су редом

$$\frac{A_0X^2}{A_0P^2}, \quad \frac{A_1X^2}{A_1Q^2}, \quad \frac{B_0Y^2}{B_0P^2}, \quad \frac{B_1Y^2}{B_1Q^2}.$$

Из сличности троуглова A_0XP и B_1YQ добија се

$$\frac{A_0X^2}{A_0P^2} = \frac{B_1Y^2}{B_1Q^2},$$

док из сличности троуглова B_0YQ и A_1XQ следи

$$\frac{B_0Y^2}{B_0P^2} = \frac{A_1X^2}{A_1Q^2}.$$

Преостаје да се покаже

$$\frac{A_0X}{A_0P} = \frac{B_0Y}{B_0P}.$$

Међутим, према синусној теорему,

$$\frac{A_0X}{A_0P} = \frac{\sin \angle A_0PX}{\sin \angle A_0XP} = \frac{\sin \angle B_0PY}{\sin \angle B_0YP} = \frac{B_0Y}{B_0P}.$$

На потпуно аналоган начин показује се да су и дужи A_iB_i и $A_{i+1}B_{i+1}$ тангенте истог круга из прамена.

Како једна дуж A_iB_i може бити тангента највише једног таквог круга, следи да је тај круг исти за све дужи A_iB_i . То је управо круг ω' . $\square$

Глава 4

Праменови коника

4.1 Пол и полара за конике

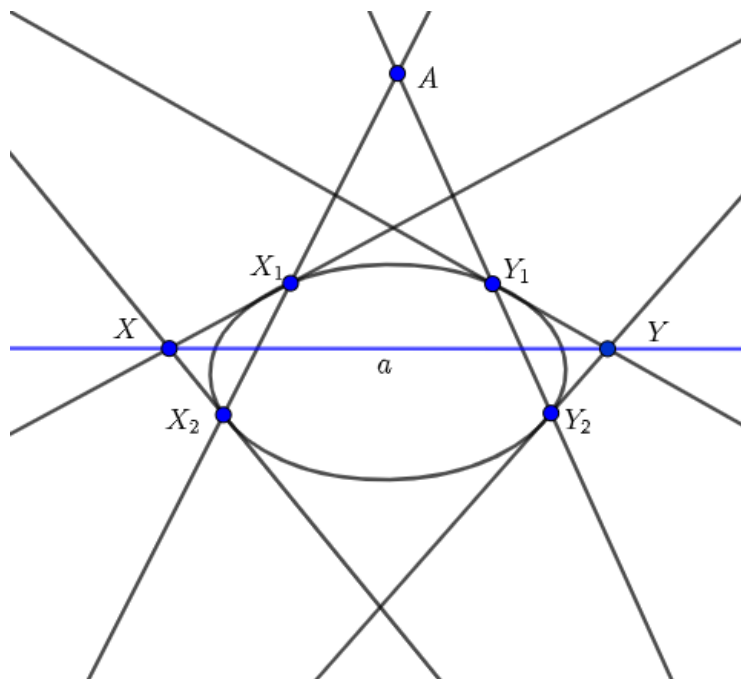
Дефиниција 4.1. Нека је Γ коника и A тачка њене равни. Полара тачке A у односу на конику Γ јесте скуп свих тачака те равни које су хармонијски спрегнуте са тачком A у односу на Γ . При томе прихватамо и случај када су пресечне тачке одговарајуће праве и конике имагинарне.

Нека је Γ произвољна коника. Постоји пројективно пресликавање које пресликава конику Γ у круг k , а тачку A у тачку A_1 . Како пројективна пресликавања чувају дворазмеру, полара тачке A у односу на конику Γ , односно скуп тачака хармонијски спрегнутих са тачком A , пресликава се у полару тачке A_1 у односу на круг k . Стога је и полара тачке A у односу на конику Γ права.

Уколико из тачке A постоје тангенте на конику Γ , које је додирују у тачкама P и Q , тада је полара тачке A управо права PQ .

Ако тачка A припада коници Γ , онда је њена полара тангента на конику Γ у тачки A .

У општем случају полара тачке A може се конструисати на следећи начин.



Слика 4.1: Пол и полара

Нека је дата коника и тачка A . Посматрајмо произвољну пројективну трансформацију која дату конику пресликава у круг. Нека је A' слика тачке A у тој трансформацији, a' полара тачке A' у односу на круг, а a слика праве a' у инверзној трансформацији.

Посматрајмо две праве које пролазе кроз тачку A и секу дату конику у тачкама X_1, X_2 и Y_1, Y_2 . Нека је X пресек тангената на конику у тачкама X_1 и X_2 , а Y пресек тангената у тачкама Y_1 и Y_2 . Тада се права XY поклапа са траженом правом a .

Заиста, примењујући ову конструкцију на тачку A' и на круг добијемо праву a' . Пошто пројективне трансформације чувају пресеке и тангентност правих и коника, закључујемо да права a не зависи од изабране пројективне трансформације.

Постоји и друга конструкција праве a : то је права која спаја пресеке правих X_1Y_1 и X_2Y_2 , као и X_1Y_2 и X_2Y_1 .

Посебно, ако је A центар елипсе или хиперболе, добија се бесконачно далека права.

Може се показати да се ова конструкција може применити и на дегенерисане криве другог реда; поред тога, добијена права пролази кроз заједничку тачку O правих l_1 и l_2 које чине дату конику, а дворамера $(l_1, l_2; OA, a)$ једнак је 1.

Дефинисана кореспонденција између тачака и правих назива се *поларна кореспонденција* у односу на дату конику. Права a назива се *полара* тачке A , док се тачка A назива *пол* праве a .

Јасно је да све особине поларне кореспонденције које су претходно наведене и даље важе.

Ако је права p полара тачке P и ако произвољна права која пролази кроз тачку P сече праву p у тачки Q , а конику у тачкама A и B , онда важи

$$H(P, Q; A, B).$$

4.2 Прамен коника

Дефиниција 4.2. Нека су дате две конике чије су једначине

$$f(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad g(x, y) = 0. \quad (4.1)$$

Тада је *прамен коника* скуп свих коника чије су једначине облика

$$af(x, y) + bg(x, y) = 0, \quad (4.2)$$

где су a и b произвољни реални бројеви, при чему нису истовремено једнаки нули.

Јасно је да је прамен у потпуности одређен са било које две конике које му припадају. Штавише, ако се две конике које одређују прамен секу у једној тачки, онда све конике тог прамена пролазе кроз ту тачку. Ако су те две конике тангентне у датој тачки, онда су и све остале конике из прамена међусобно тангентне у тој тачки.

Кружни праменови представљају посебне случајеве праменова коника. Наиме, ако се права која садржи центре кругова посматра као x -оса, а радикална оса као y -оса, тада једначине кругова добијају облик

$$x^2 + y^2 + ax + c = 0,$$

где је c потенција координатног почетка у односу на кругове датог прамена, док је a произвољан реалан број. Јасно је да ова једначина представља посебан случај једначине (4.2).

Основна теорема алгебре имплицира да се било које две алгебарске криве редова m и n секу у укупно mn тачака, при чему те тачке могу бити имагинарне или се могу поклапати. Посебно, за $m = n = 2$ следи да се било које две конике секу у четири тачке. Свака коника која припада одговарајућем прамену такође пролази кроз те четири тачке.

Важи и обрнуто тврђење: за сваку конику која пролази кроз четири пресечне тачке коника чије су једначине

$$f(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad g(x, y) = 0,$$

постоје реални бројеви a и b , који нису истовремено једнаки нули, тако да се једначина те конике може записати у облику

$$af(x, y) + bg(x, y) = 0.$$

Ово тврђење познато је као **теорема о праменовима коника**.

Није тешко показати да је хипербола једнакостранична ако и само ако важи

$$a_{11} + a_{22} = 0.$$

Штавише, погодно је посматрати и дегенерисану криву која се састоји од две међусобно нормалне праве као једнакостраничну хиперболу. Из теореме о праменовима коника сада следи да, ако се две једнакостраничне хиперболе секу у четири тачке, онда је свака коника прамена одређеног тим тачкама такође једнакостранична хипербола.

Теорема о праменовима коника омогућава да се прамен дефинише као скуп свих коника које пролазе кроз четири дате тачке A , B , C и D у општем положају. Штавише, за сваку тачку X , различиту од тачака A , B , C и D , постоји тачно једна коника тог прамена која пролази кроз тачку X .

Неке од тачака које одређују прамен могу бити имагинарне. На пример, сваки круг сече бесконачно далеку праву у две фиксне комплексне тачке, тако да је хиперболички прамен кругова одређен тим тачкама и двома заједничким тачкама кругова. Са друге стране, елиптички прамен кругова одређен је са четири комплексне тачке, од којих су две коначне, а две се налазе на бесконачно далекој правој.

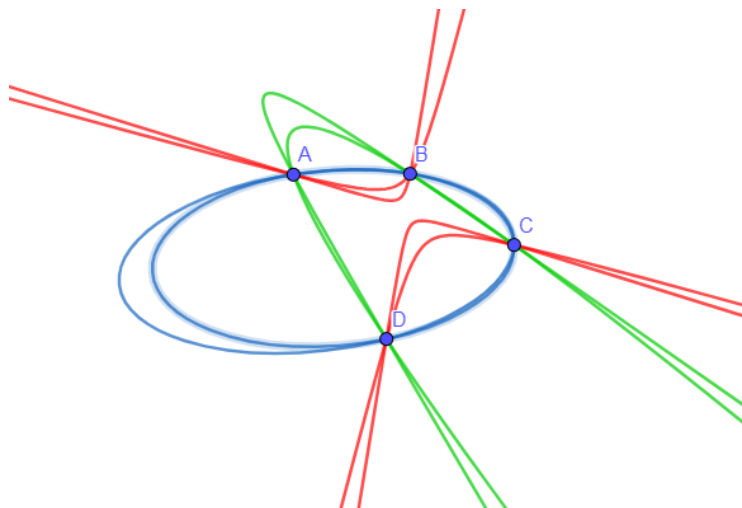
Такође је могуће да се неке од тачака које одређују прамен поклапају. Ако се две тачке поклапају, онда су све конике прамена међусобно тангентне у тој двострукој тачки, као што је случај код параболичког прамена кругова. Ако се три од четири тачке поклапају, онда је степен додира у тој тачки једнак два. Ако се све четири тачке поклапају, онда је степен додира једнак три. На пример, скуп концентричних кругова представља прамен одређен са два пара тачака које се поклапају.

Ако су све четири тачке које одређују прамен међусобно различите, онда тај прамен садржи три дегенерисане конике:

$$AB \cup CD, \quad AC \cup BD, \quad AD \cup BC.$$

Сада ћемо детаљније описати различите типове праменова.

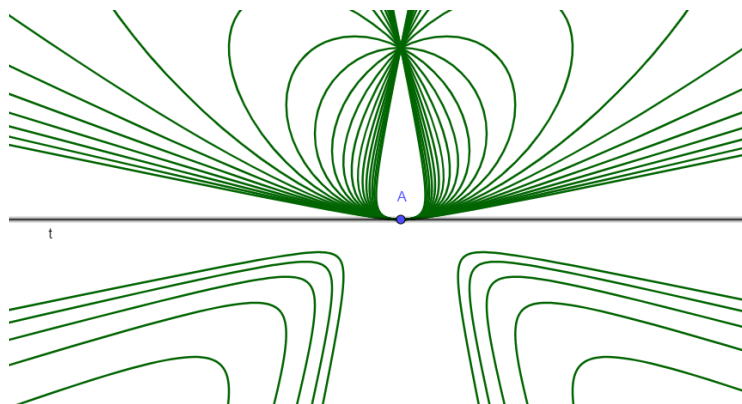
1. Праменови који пролазе кроз четири различите тачке.



Слика 4.2: (1)

Елиптички и хиперболички праменови кругова припадају овом типу(слика 3.1 и 3.3).

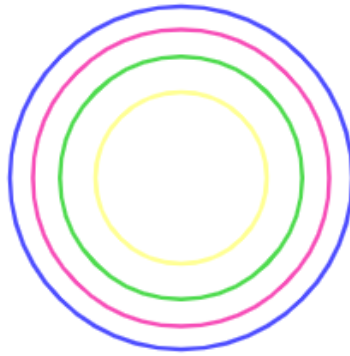
2. Праменови који пролазе кроз четири тачке, од којих се две поклапају, односно праменови коника тангентних на дату праву у фиксној тачки(слика 4.3).



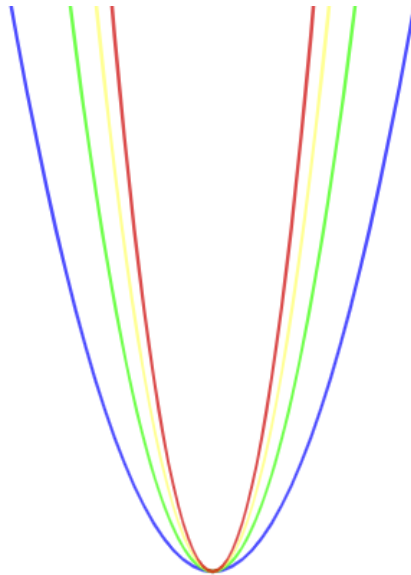
Слика 4.3: (2)

Параболички праменови кругова припадају овом типу(слика 3.2).

3. Прамен одређен са два пара тачака које се поклапају.
Овај прамен се састоји од коника које су тангентне на две да-
те праве у две дате тачке. Праменови концентричних кругова
или парабола чије су једначине $y = ax^2$ припадају овом типу.



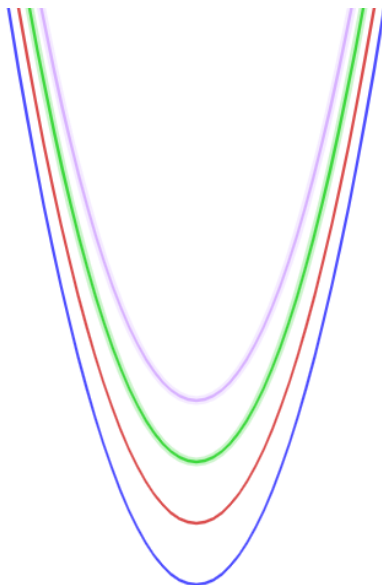
Слика 4.4: (3)



Слика 4.5: (4)

4. Прамен одређен са четири тачке, од којих се три поклапају. Можемо посматрати координатни систем такав да су ове конике тангентне на x -осу у тачки $O(0, 0)$. Тада се оне локално, у околини O , могу представити једначинама $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. С обзиром да им је O трострука заједничка тачка, следи $f_1(0) = f_2(0)$ (тј. O им је заједничка тачка), $f_1'(0) = f_2'(0)$ (тј. x -оса им је заједничка тангента), и $f_1''(0) = f_2''(0)$, па имају и исту кривину у тој тачки, односно постоји круг који додирује све конике овог прамена (назива се оскулаторни круг).
5. Прамен код којег се све четири тачке које га одређују поклапају.

Пример оваквог прамена представљају параболе чије су једначине $y = x^2 + a$.



Слика 4.6: (5)

Ако две конике Γ_1 и Γ_2 имају имагинаран пресек, с обзиром да су њихове једначине са реалним коефицијентима, онда им је са тим имагинарним пресеком заједничко и њему конјуговано комплексно решење. Дакле, тада имају или два реална решења и пар конјуговано комплексних, или два пара конјуговано комплексних решења.

Ако имају два реална решења, посматрајмо пар кругова који се секу у тим (реалним) тачкама (и још у пару конјуговано комплексних). Ако немају реалних решења, посматрамо два дисјунктна круга (који се онда секу у два пара конјуговано комплексних тачака). Директним рачуном добијамо да су у оба случаја тачке $M_1 = (1 : i : 0)$ и $M_2 = (1 : -i : 0)$ пар конјуговано комплексних пресека кругова.

У оба случаја постоји (реално) пројективно пресликавање које пресеке две конике слика у пресеке два круга. При том пресликавању, конјуговано комплексне пресеке коника сликамо у тачке M_1 и M_2 . У овом пресликавању, прамен коника одређених са Γ_1 и Γ_2 слика се у прамен коника које све садрже M_1 и M_2 .

Из једначине (1.1) тада следи да за једначину произвољне конике из тог прамена важи $a_{11} - 2a_{12}i - a_{22} = 0$ и $a_{11} + 2a_{12}i - a_{22} = 0$. Зато је $a_{12} = 0$ и $a_{11} = a_{22}$, па су све конике тог прамена кругови. Дакле, ако две конике имају пар конјуговано комплексних пресека, онда постоји пројективно пресликавање којим се прамен њима одређен слика у прамен кругова.

Поред праменова одређених са четири тачке, могу се разматрати и дуални праменови, односно скупови коника које су тангент-

не на четири дате праве. Дуални праменови се затим класификују према броју правих које се поклапају.

Ако се две праве поклапају, онда су све конике тог прамена тангентне на њих, а самим тим и међусобно, у једној тачки.

Коришћењем теореме о праменовима коника можемо доказати следећа два резултата.

Теорема 4.3 (Теорема о четири конике). *Нека су даље три конике α_1, α_2 и α_3 . Нека су P_1, Q_1, P'_1, Q'_1 пресечне тачке коника α_2 и α_3 ; P_2, Q_2, P'_2, Q'_2 пресечне тачке коника α_1 и α_3 ; и P_3, Q_3, P'_3, Q'_3 пресечне тачке коника α_2 и α_1 .*

Ако тачке $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3$ леже на једној коники, онда се праве $P'_1Q'_1, P'_2Q'_2, P'_3Q'_3$ секу у једној тачки.

Теорема 4.4 (Теорема о три конике). *Нека су даље три конике које имају две заједничке тачке. Тада се њихове заједничке тангенте, које пролазе кроз пресечне тачке сваког пара коника, секу у једној тачки.*

4.3 Понселеова теорема

Посматрајмо сада прамен одређен тачкама A, B, C, D и праву l која не пролази ни кроз једну од тих тачака. Ако једна коника тог прамена сече праву l у тачки P , онда је сече и у другој тачки P' (која се може поклапати са тачком P).

Пресликавање

$$P \longmapsto P'$$

назива се *инволуција на правој l одређена праменом*.

Применом Паскалове теореме на шестоугао $ABCDPP'$ добија се поступак за конструкцију тачке P' .

Пошто се ова конструкција може представити као композиција централних пројекција, инволуција чува дворазмеру. Такође, како неидентичко пројективно пресликавање праве може имати највише две фиксне тачке, права l може бити тангента на највише две конике из прамена. Штавише, инволуција је једнозначно одређена помоћу два пара одговарајућих тачака.

Ако све четири тачке које одређују прамен нису реалне, својства инволуције могу се испитати и без употребе комплексне равни; довољно је применити пројективно пресликавање којим се дати прамен пресликава у прамен кругова.

Нека је P пресечна тачка праве l и радикалне осе прамена. Тада је инволуција на правој l управо инверзија са центром у тачки P .

Помоћу инволуције доказује се Понселеова теорема у општем случају, односно за произвољан прамен коника.

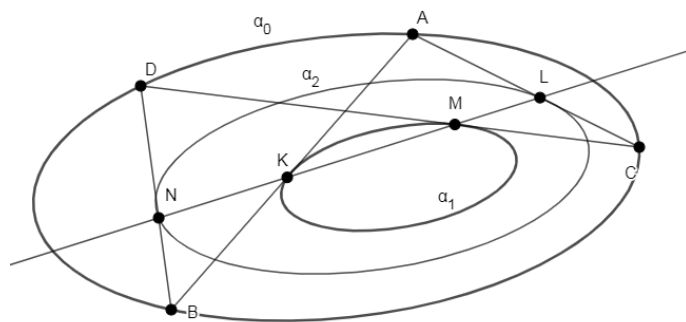
Теорема 4.5 (Понселеова теорема). Нека конике $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ припадају прамену Γ . Из произвољне тачке A_0 на коници α_0 повуцимо тангенту на конику α_1 и нека је A_1 друга пресечна тачка те тангенте са коником α_0 . Из тачке A_1 повуцимо тангенту на конику α_2 и нека је A_2 њена друга пресечна тачка са коником α_0 , и тако редом.

Ако се за неку тачку A_0 добије да се тачка A_n поклапа са A_0 , онда исто важи и за сваку другу тачку конике α_0 .

Доказ се изводи математичком индукцијом по броју n . Најпре ћемо доказати следећи резултат, који је и сам по себи од самосталног интереса.

Лема 4.6. 1. Нека тачке A, B и C леже на коници α_0 , нека је права AB тангентна на конику α_1 у тачки K , а права AC тангентна на конику α_2 у тачки L . Тада постоји тачка D на коници α_0 таква да је коника α_1 тангентна на праву CD , а коника α_2 тангентна на праву BD у пресечним тачкама ових правих са правом KL . Штавише, постоји коника прамена Γ која је тангентна на праве AD и BC у њиховим пресечним тачкама са правом KL .

2. Нека тачке A, B, C и D леже на коници α_0 , а нека је коника α_1 тангентна на праву AB у тачки K и на праву CD у тачки M . Тада постоји коника прамена Γ која је тангентна на праве AC и BD у њиховим пресечним тачкама са правом KM .



Слика 4.7: Лема 4.6

Доказ. Нека је M друга пресечна тачка конике α_1 и праве KL , а нека је Q прамен који садржи конику α_1 и дегенерисану конику састављену од правих CM и AB .

На правој AC праменови Γ и Q одређују исту инволуцију, дефинисану тачкама A и C и пресечним тачкама праве AC са коником α_1 (које не морају бити реалне). Према томе, тачка L је двострука

тачка инволюције одређене праменом $\mathcal{Q}$, односно прамен $\mathcal{Q}$ садржи двоструку праву KL .

Следи да су све конике прамена $\mathcal{Q}$, па самим тим и коника α_1 , тангентне на праву CM у тачки M .

Нека је D друга пресечна тачка праве CM и конике α_0 . Примењујући претходно разматрање на тачке B , C и D , добијамо да је коника α_2 тангентна на праву BD у њеној пресечној тачки са правом KL .

Затим одредимо пресечну тачку правих AD и KL и посматрамо конику прамена Γ која пролази кроз ту тачку. Истим разматрањем добија се да је та коника тангентна на праву AD .

Чињеница да је ова коника истовремено тангентна и на праву BC , као и доказ друге тврдње леме, доказује се на аналоган начин. $\square$

Последица 4.7. *Нека је $\bar{u}$ права AB $\bar{u}$ ан $\bar{u}$ ен $\bar{u}$ на на конику α_1 у $\bar{u}$ ачки X , а $\bar{u}$ права AC $\bar{u}$ ан $\bar{u}$ ен $\bar{u}$ на на конику α_2 у $\bar{u}$ ачки Y . Тада $\bar{u}$ ос $\bar{u}$ тоје $\bar{u}$ ачно две конике $\bar{u}$ рамена Γ које су $\bar{u}$ ан $\bar{u}$ ен $\bar{u}$ не на $\bar{u}$ раву BC у $\bar{u}$ ачкама Z_1 и Z_2 .*

Штавише, $\bar{u}$ ачке X , Y и Z_1 леже на једној $\bar{u}$ равој, а $\bar{u}$ праве AZ_2 , BY , CX секу се у једној $\bar{u}$ ачки.

Сада можемо доказати Понселеову теорему за случај $n = 3$.

Нека су праве A_0A_1 , A_1A_2 , A_2A_0 тангентне на конике α_1 , α_2 , α_3 у тачкама X_1 , X_2 , X_3 , при чему тачке X_1 , X_2 , X_3 не леже на једној правој. Нека је права B_0B_1 тангентна на конику α_1 у тачки Y_1 .

Према Леми 4.6, постоји коника α'_1 из прамена Γ која је тангентна на праве A_0B_0 и A_1B_1 у њиховим пресечним тачкама Z_0 и Z_1 са правом X_1Y_1 . Такође постоји тачка B_2 на коници α_0 таква да је коника α_2 тангентна на праву B_1B_2 , а коника α'_1 тангентна на праву B_2A_2 у њиховим пресечним тачкама Y_2 и Z_2 са правом Z_1X_2 .

Даље, постоји коника α'' која је тангентна на праве A_2A_0 и A_2B_0 у њиховим пресечним тачкама X и Y_3 са правом Z_2Z_0 .

Применом Дезаргове теореме на троуглове $A_0A_1A_2$ и $Z_0Z_1Z_2$, добијамо да тачке X_1 , X_2 и X не леже на једној правој. Према томе, $X = X_3$, а самим тим је $\alpha'' = \alpha_3$.

Сада претпоставимо да је n произвољно. Користећи тачке A_0 , A_1 и A_2 , конструишемо конику $\mathcal{Q}'$ која је тангентна на праве A_0A_2 и B_0B_2 .

Пошто су странице многоугла $A_0A_2 \dots A_{n-1}$ тангентне на конике $\alpha'_1, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, можемо извршити корак индукције са $n - 1$ на n .

Биографија

Александра Стојановић рођена је 06.09.1996. године у Зворнику. Основну школу "Свети Сава" у родном месту завршава 2011. године са одличним успехом.

Средњу школу "Петар Кочић" на смеру економски техничар завршава 2015. године као носилац Вукове дипломе.

Исте године уписује Математички факултет у Београду на смеру Професор математике и рачунарства. Основне академске студије је завршила 12. септембра 2024. године. Одмах затим уписује и мастер студије у октобру те године.

Радно искуство у основим и средњим школама је већ почела да стиче на 4. години студија.

Тренутно ради у основној школи "Мајка Југовића" и средњој медицинској школи "Надежда Петровић" у Земуну.

Позив који је одабрала воли и испуњава је рад са децом.

Поред математике, воли да издвоји музику, топлу кафу, палачинке, пливање, дуге шетње и дуге топле разговоре као велике животне покретаче.

Мајка јој је узор и велика подршка у свему.

Литература

- [1] Акопјан, А. В. и Заславски, А. А., *Geometry of Conics*, American Mathematical Society, Москва, 2007.
- [2] Шукиловић, Т. и Вукмировић, С., *Геометрија за информатичаре*, Математички факултет, Београд, 2023.
- [3] Андрејић, В., *Нижња геометрија*, Математички факултет, Београд, 2024.
- [4] Антић, М., *Нееуклидске геометрије (материјали за предмет „Одабрана појављена геометрије“)*, Математички факултет.
- [5] Димитров, Н., *Конике у пројективној геометрији и конструкције у афиној равни*, мастер рад, Математички факултет, Универзитет у Новом Саду, Нови Сад, 2021