

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Јелена Јевремовић

ПОЕНКАРЕОВ СФЕРНИ МОДЕЛ ТРОДИМЕНЗИОНЕ ХИПЕРБОЛИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

мастер рад

Београд, 2026.

Ментор:

др Мирослава Антић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Марек Светлик, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Катарина Лукић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: _____

Садржај

Увод	1
1 Инверзивна геометрија	3
1.1 Рефлексија у равни простора $\mathbb{E}^3$	3
1.2 Инверзија у односу на сферу	8
1.3 Стереографска пројекција	16
2 Поенкареов сферни модел	22
2.1 Хиперболичка раван (h-раван)	23
2.2 Хиперболичка права (h-права)	24
2.3 Међусобни положаји основних елемената у простору	26
2.4 Управност у Поенкареовом моделу лопте	31
2.5 Праменови h-равни	34
2.6 Снопови h-равни	35
2.7 Праменови h-правих	36
3 Изометрије Поенкареовог модела	38
3.1 H-рефлексије и h-изометрије	38
3.2 Мебијусове трансформације проширеног простора	43
3.3 Група изометрија као група Мебијусових трансформација	45
3.4 Веза са Мебијусовим трансформацијама сфере и равни	46
3.5 Структура изометрија, h-симетрала	48
3.6 Разлагање изометрија на h-рефлексије	51
4 H-растојање и метрика у Поенкареовом моделу лопте	53
4.1 Дефиниција h-растојања и Риманова метрика	53
4.2 Мебијусове трансформације и тачкаста инваријанта	55
4.3 Извођење глобалне аналитичке формуле: Три приступа	56

<i>САДРЖАЈ</i>	iv
4.4 Инфинитезимални прелаз (Тејлоров развој)	59
4.5 Упоредна анализа три приступа	59
4.6 Функција Лобачевског и угао паралелности у моделу лопте . .	60
5 Еписфере у Поенкареовом моделу лопте	67
5.1 Класификација и дефиниција еписфера	67
5.2 Хиперболичке сфере (Елиптичке еписфере)	69
5.3 Орисфере (Параболичке еписфере)	72
5.4 Еквидистантне површи (Хиперболичке еписфере)	77
Закључак	81
Литература	83

Увод

Хиперболичка геометрија представља једно од најзначајнијих и најплоднијих научних открића XIX века. Настала кроз вековне покушаје математичара да изводљивошћу из осталих аксиома докажу пети Еуклидов постулат о паралелним правама, откриће неееуклидске геометрије од стране Николаја Лобачевског, Јаноша Бољаја и Карла Фридриха Гауса фундаментално је изменило схватање простора и аксиоматског метода.

За разлику од еуклидске геометрије у којој кроз тачку ван праве у њима одређеној равни постоји тачно једна права која је не сече (јединствена паралела), у хиперболичком простору постоји бесконачно много правих које не секу дату праву. Дуго након њеног формалног заснивања, логичка непротивречност ове нове геометрије остала је отворено питање. Коначна потврда да је хиперболичка геометрија једнако математички валидна као и еуклидска стигла је тек када су Белтрами, Клајн и Поенкаре конструисали њене моделе унутар самог еуклидског простора. Тиме је доказана релативна конзистентност — свака евентуална контрадикција у хиперболичкој геометрији нужно би имплицирала контрадикцију у класичној еуклидској геометрији.

Међу свим моделима хиперболичке геометрије, **Поенкареов сферни модел** (који је у тродимензионалном случају развио Анри Поенкаре) заузима посебно место. Његова главна предност лежи у **конформности** — особини да пресликавање чува углове међу кривама једнаким одговарајућим еуклидским угловима. Због ове особине, Поенкареов модел је изузетно визуелно интуитиван и аналитички погодан за рад. Иако је развијен пре више од једног века, овај модел данас доживљава снажну ренесансу у области вештачке интелигенције и машинског учења, где се његова специфична метрика користи за супериорно улагање (енгл. *embedding*) хијерархијских структура података [5].

Сврха овог мастер рада јесте системска и ригорозна презентација Поенкареовог модела лопте у три димензије ($\mathbb{B}^3$). Рад је структуриран кроз пет

главних поглавља:

- У **првом поглављу** уводимо неопходан математички апарат инверзивне геометрије, дефинишући еуклидске рефлексије, сферну инверзију и проширену стереографску пројекцију, уз кључни доказ о очувању уопштених сфера.
- У **другом поглављу** прелазимо на сам Поенкареов сферни модел, дефинишући апсолуту и основне хиперболичке елементе (h -тачке, h -праве, h -равни), као и њихове међусобне положаје.
- У **трећем поглављу** проучавамо групу хиперболичких изометрија, показујући како се оне генеришу композицијом h -рефлексија и повезују са Мебијусовим трансформацијама.
- У **четвртном поглављу** аналитички изводимо хиперболичку метрику и функцију h -растојања кроз различите математичке приступе, повезујући их са класичном функцијом Лобачевског.
- У **петом поглављу** анализирамо специфичне хиперболичке површи — еписфере, класификујући их на хиперболичке сфере, еквилистантне површи и орисфере, са посебним акцентом на доказ еуклидске (равне) унутрашње геометрије орисфере.

Глава 1

Инверзивна геометрија

У овом поглављу изучавамо простор $\mathbb{E}^3$ и групу трансформација у њему која је генерисана раванским рефлексцијама и инверзијама у односу на сфере. Показаће се да је ова група изоморфна групи изометрија тродимензионалног хиперболичког простора $\mathbb{H}^3$. Ово ће нам бити кључно ка дубљем разумевању хиперболичке геометрије, посебно модела лопте.

1.1 Рефлексција у равни простора $\mathbb{E}^3$

Нека је a јединични вектор у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$ и $t \in \mathbb{R}$. Раван

$$P(a, t) = \{x \in \mathbb{E}^3 : a \cdot x = t\} \quad (1)$$

је раван са јединичним вектором нормале a која садржи тачку ta .

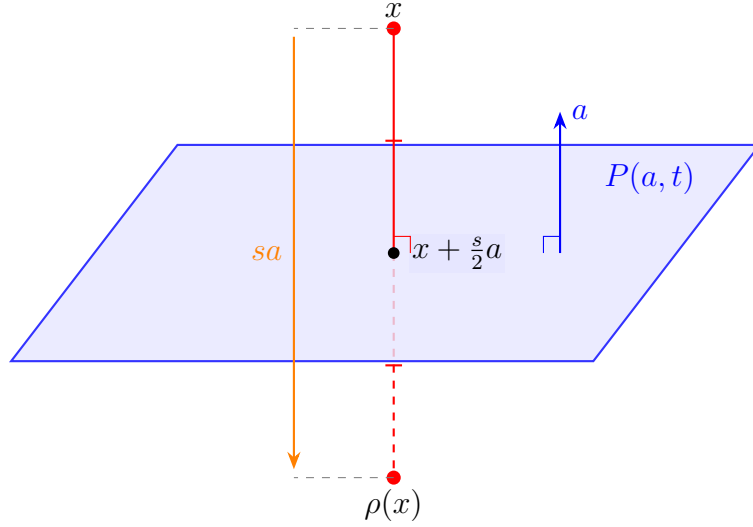
Дефиниција 1.1. Рефлексција ρ простора $\mathbb{E}^3$ у односу на раван $P(a, t)$ је пресликавање које произвољној тачки $x \in \mathbb{E}^3$ додељује тачку $\rho(x) \in \mathbb{E}^3$ по правилу:

$$\rho(x) = x + sa \quad (2)$$

где је s реални скалар такав да средиште дужи која спаја тачку x и њену слику $\rho(x)$ лежи у равни $P(a, t)$.

Дакле, како тачка $x + \frac{s}{2}a$ лежи у равни $P(a, t)$, лако долазимо до експлицитне аналитичке формуле за рефлексiju ρ у односу на раван $P(a, t)$:

$$\rho(x) = x + 2(t - a \cdot x)a. \quad (3)$$



Слика 1.1: Рефлексија ρ тачке x у односу на раван $P(a, t)$. Тачка $\rho(x)$ се добија транслацијом тачке x за вектор sa , при чему се крећемо паралелно нормалном вектору a . Средине ове дужи лежи у самој равни.

Дефиниција 1.2. Бијективно пресликавање $f : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ назива се изометријом еуклидског простора $\mathbb{E}^3$ уколико за произвољне две тачке $x, y \in \mathbb{E}^3$ важи:

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|. \quad (4)$$

Скуп свих изометрија простора $\mathbb{E}^3$ чини групу у односу на операцију композиције пресликавања и означавамо га са $I(\mathbb{E}^3)$.

Теорема 1.3. Нека је ρ рефлексија простора $\mathbb{E}^3$ у односу на раван $P(a, t)$. Тада важи:

1. $\rho(x) = x$ ако $x \in P(a, t)$;
2. $\rho^2(x) = x$ за свако $x \in \mathbb{E}^3$;
3. ρ је еуклидска изометрија.

Теорема 1.4. Свака изометрија простора $\mathbb{E}^3$ је композиција највише 4 равanske рефлексије.

Доказ. Нека је f произвољна изометрија. Доказ спроводимо конструктивно у четири корака, пратећи слике координатног почетка 0 и вектора ортонормиране базе (e_1, e_2, e_3) .

Корак 1 (Транслациона компонента - фиксирање почетка):

Нека је $v_0 = f(0)$. Наш циљ је да пронађемо изометрију ρ_1 (рефлексију или идентитет) такву да композиција $\rho_1 \circ f$ фиксира координатни почетак, односно да важи $\rho_1(v_0) = 0$. Уколико је $v_0 = 0$, овај корак можемо прескочити јер смо остали у координатном почетку те функција ρ_1 нема „шта да враћа” - она је идентична функција ($\rho_1 = \text{id}$).

Уколико је $v_0 \neq 0$, дефинишемо вектор нормале $a_1 = \frac{v_0}{\|v_0\|}$ и скалар $t_1 = \frac{1}{2}\|v_0\|$. Нека је ρ_1 рефлексија у односу на раван $P(a_1, t_1)$. Применом рефлексије ρ_1 на вектор v_0 :

$$\rho_1(v_0) = v_0 + 2 \left(\frac{1}{2}\|v_0\| - \frac{v_0}{\|v_0\|} \cdot v_0 \right) \frac{v_0}{\|v_0\|} \quad (5)$$

и знајући да је $v_0 \cdot v_0 = \|v_0\|^2$ добијамо:

$$\rho_1(v_0) = v_0 + 2 \left(-\frac{1}{2}\|v_0\| \right) \frac{v_0}{\|v_0\|} = v_0 - v_0 = 0. \quad (6)$$

Дефинишимо сада нову изометрију $f_1 = \rho_1 \circ f$. Будући да је $f_1(0) = \rho_1(v_0) = 0$, ова изометрија фиксира координатни почетак. Пошто свака изометрија чува растојања, имамо да је $\|f_1(x) - f_1(y)\|^2 = \|x - y\|^2$. Такође, због фиксираних почетка, не мења се ни норма сваког појединачног вектора, односно $\|f_1(x)\| = \|x\|$. Расписивањем квадрата растојања преко скаларног производа добијамо:

$$\|f_1(x)\|^2 - 2f_1(x) \cdot f_1(y) + \|f_1(y)\|^2 = \|x\|^2 - 2x \cdot y + \|y\|^2. \quad (7)$$

Због очувања норме директно следи да се чува скаларни производ: $f_1(x) \cdot f_1(y) = x \cdot y$. Из овога следи да је f_1 ортогонална линеарна трансформација, чиме су створени услови за даље фиксирање вектора ортонормиране базе.

Корак 2 (Фиксирање првог базног вектора e_1):

Нека је $v_1 = f_1(e_1)$. Како изометрија f_1 чува норму, важи $\|v_1\| = \|e_1\| = 1$. Уколико је $v_1 = e_1$, дати вектор је већ фиксиран, па једноставно дефинишемо $\rho_2 = \text{id}$.

У супротном, за $v_1 \neq e_1$, дефинишемо јединични вектор нормале $a_2 = \frac{e_1 - v_1}{\|e_1 - v_1\|}$ и скалар $t_2 = 0$. Нека је ρ_2 рефлексија у односу на раван $P(a_2, t_2)$.

Слика вектора v_1 при овој рефлексiji тада је:

$$\begin{aligned}
 \rho_2(v_1) &= v_1 - 2(a_2 \cdot v_1)a_2 \\
 &= v_1 - 2 \frac{e_1 \cdot v_1 - 1}{\|e_1 - v_1\|^2} (e_1 - v_1) \\
 &= v_1 - 2 \frac{-(1 - e_1 \cdot v_1)}{2(1 - e_1 \cdot v_1)} (e_1 - v_1) \\
 &= v_1 + 1 \cdot (e_1 - v_1) \\
 &= e_1.
 \end{aligned}$$

Дефинишимо сада изометрију $f_2 = \rho_2 \circ f_1$. Будући да f_1 фиксира координатни почетак ($f_1(0) = 0$), а раван рефлексije ρ_2 пролази кроз њега (због $t_2 = 0$ важи $\rho_2(0) = 0$), следи да њихова композиција такође фиксира почетак: $f_2(0) = \rho_2(f_1(0)) = 0$. Са друге стране, по самој конструкцији важи $f_2(e_1) = \rho_2(f_1(e_1)) = \rho_2(v_1) = e_1$. Тиме смо осигурали да изометрија f_2 истовремено фиксира координатни почетак и први вектор базе.

Корак 3 (Фиксирање другог базног вектора e_2):

Нека је $v_2 = f_2(e_2)$. Како f_2 чува скаларни производ и фиксира e_1 , важи:

$$v_2 \cdot e_1 = f_2(e_2) \cdot f_2(e_1) = e_2 \cdot e_1 = 0. \quad (8)$$

Дакле, вектор v_2 је ортогоналан на e_1 (одакле јасно следи и да v_2 не може бити једнак e_1 , јер је $e_1 \cdot e_1 = 1 \neq 0$). Такође, како f_2 чува норму, важи $\|v_2\| = \|e_2\| = 1$.

Уколико је $v_2 = e_2$, овај корак прескачемо и дефинишемо $\rho_3 = \text{id}$.

У супротном, за $v_2 \neq e_2$, дефинишемо вектор нормале $a_3 = \frac{e_2 - v_2}{\|e_2 - v_2\|}$ и вредност скалара $t_3 = 0$. Нека је ρ_3 рефлексija у односу на раван $P(a_3, t_3)$. Приметимо да је вектор нормале a_3 ортогоналан на e_1 , јер важи:

$$a_3 \cdot e_1 = \frac{1}{\|e_2 - v_2\|} (e_2 \cdot e_1 - v_2 \cdot e_1) = 0. \quad (9)$$

Због ове ортогоналности, рефлексija ρ_3 не ремети претходно фиксиран вектор e_1 :

$$\rho_3(e_1) = e_1 - 2(a_3 \cdot e_1)a_3 = e_1 - 0 = e_1. \quad (10)$$

Идентичним алгебарским поступком као у Кораку 2 показује се да је $\rho_3(v_2) = e_2$. Дефинишимо сада нову изометрију $f_3 = \rho_3 \circ f_2$. Будући да раван рефлексije пролази кроз координатни почетак ($t_3 = 0$), важи $\rho_3(0) = 0$.

На основу свега изведеног важи да f_3 редом фиксира координатни почетак 0, као и базне векторе e_1 и e_2 .

Корак 4 (Фиксирање трећег базног вектора e_3):

Нека је $v_3 = f_3(e_3)$. Како f_3 чува скаларни производ и норму, а већ фиксира e_1 и e_2 , вектор v_3 мора бити ортогоналан на њих и имати јединичну норму. У еуклидском простору $\mathbb{E}^3$, једини вектори придружени датој ортонормираној бази који испуњавају ове услове су e_3 и $-e_3$.

Уколико је $v_3 = e_3$, трансформација f_3 већ фиксира целу ортонормирану базу, па дефинишемо $\rho_4 = \text{id}$.

У супротном, за $v_3 = -e_3$, дефинишемо вектор нормале $a_4 = e_3$ и скалар $t_4 = 0$. Нека је ρ_4 рефлексija у односу на раван $P(a_4, t_4)$. Како су e_1 и e_2 ортогонални на вектор нормале a_4 , ова рефлексija их фиксира, док вектор $-e_3$ слика у e_3 .

Дефинишимо изометрију $f_4 = \rho_4 \circ f_3$. Како је f_3 линеарна трансформација (јер чува скаларни производ и координатни почетак), а ρ_4 је такође линеарна (јер раван рефлексije садржи координатни почетак, $t_4 = 0$), следи да је и њихова композиција f_4 линеарна трансформација. Будући да f_4 фиксира све векторе ортонормиране базе, она мора бити идентичко пресликавање, односно $f_4 = \text{id}$.

Закључак:

Добили смо да важи:

$$f_4 = \rho_4 \circ \rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_1 \circ f = \text{id}.$$

Како је свака рефлексija сама себи инверзна ($\rho^{-1} = \rho$), множењем ове једначине редом са леве стране одговарајућим рефлексijaма добијамо:

$$f = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 \circ \rho_4.$$

Тиме је аналитички доказано да се свака изометрија може представити као композиција од највише 4 раванске рефлексije. $\square$

У векторском облику, изометрија ρ се може записати као:

$$\rho(x) = Ax + b \tag{11}$$

где је $A = I - 2aa^T$ квадратна (Хаусхолдерова) матрица димензије 3×3 , а вектор $b = 2ta$. Матрица A је ортогонална и њена детерминанта има вредност

-1 , што нам говори да је рефлексја индиректна (мења оријентацију).

$$\rho(x) = (I - 2aa^T)x + 2ta. \quad (12)$$

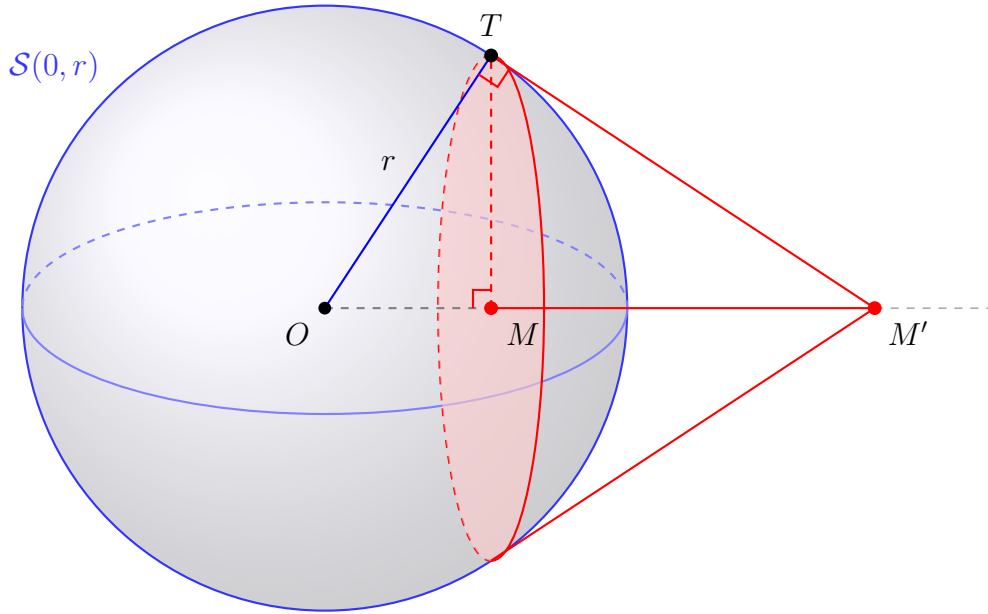
Дакле, знамо да се еуклидска рефлексја у односу на раван своди на линеарни оператор $A = I - 2aa^T$. Како је $A^T A = I$, линеарни оператор је ортогоналан, тј. чува скаларни производ $((Au, Av) = (u, v))$. Пошто је угао између било која два правца у простору дефинисан преко скаларног производа њихових вектора правца, очување скаларног производа директно имплицира да оператор оставља угао инваријантним $(\cos \angle(Au, Av) = \cos \angle(u, v))$. Према томе, како линеарни део рефлексје (матрица A) у потпуности управља пресликавањем правца, следи да је цела трансформација $\rho(x)$ строго конформна, тј. верно чува величину угла између било које две криве у еуклидском простору.

1.2 Инверзија у односу на сферу

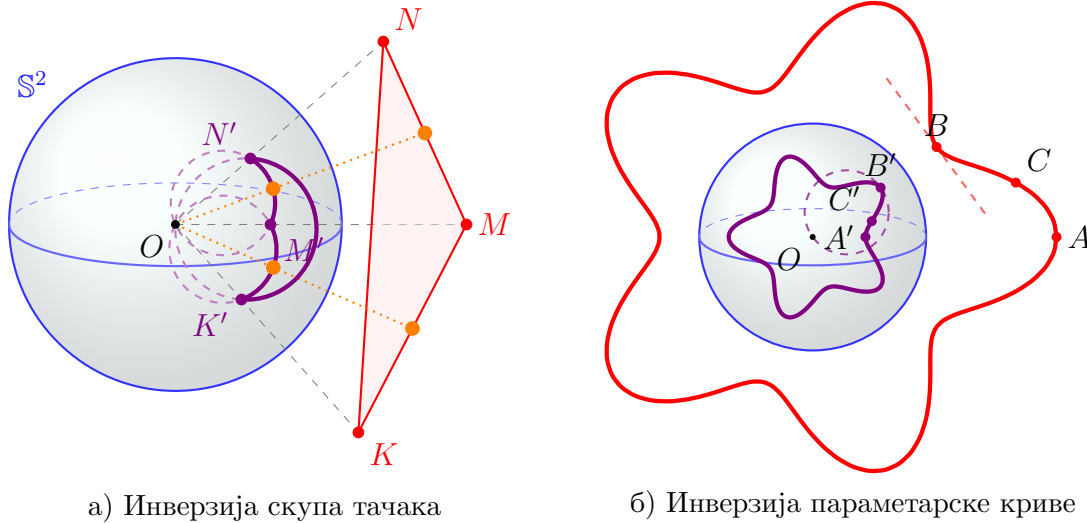
Дефиниција 1.5. Нека је $\mathcal{S}(O, r)$ сфера у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$. Инверзија у односу на сферу $\mathcal{S}$ је пресликавање $\psi_{\mathcal{S}} : \mathbb{E}^3 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{E}^3 \setminus \{O\}$ које произвољну тачку M слика у тачку M' полуправе OM , такву да је

$$OM \cdot OM' = r^2. \quad (13)$$

Тачка O је **центар инверзије**.



Слика 1.2: 3D геометријска конструкција инверзије ψ_S у односу на сферу $S(0, r)$. За тачку M унутар лопте посматрамо раван ортогоналну на вектор OM која сече сферу по кружници (црвени диск). Тангенте на сферу повучене из свих тачака ове кружнице формирају конус чији је врх управо тачка M' . Правоугли троуглови $\triangle OMT$ и $\triangle OTM'$ леже у истој равни и међусобно су слични, одакле следи $OM \cdot OM' = r^2$.



а) Инверзија скупа тачака

б) Инверзија параметарске криве

Слика 1.3: Инверзија у односу на сферу $\mathbb{S}^2(O, r)$. **а)** Инверзија еуклидског троугла са наранџастим контролним тачкама. **б)** Пресликавање криве (цвета). Испрекиданим линијама приказана је тангента у тачки B и њена инверзна слика – кружница која додирује цвет у B' и пролази кроз центар сфере O ; врхови латица (A) се пресликавају у тачке најближе центру (A'), визуелизујући „inside-out” природу инверзије.

Или ако бисмо желели да дамо више аналитичку дефиницију инверзије у односу на сферу рекли бисмо ово:

Нека је a тачка простора $\mathbb{E}^3$ и r позитиван реалан број. Сфера у простору $\mathbb{E}^3$ са центром у тачки a и полупречником r се дефинише на следећи начин:

$$\mathcal{S}(a, r) = \{x \in \mathbb{E}^3 : \|x - a\| = r\}. \quad (14)$$

Дефиниција 1.6. Инверзија простора $\mathbb{E}^3$ у односу на сферу $\mathcal{S}(a, r)$ је пресликавање $\psi_{\mathcal{S}} : \mathbb{E}^3 \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{E}^3 \setminus \{a\}$ које је дефинисано са:

$$\psi_{\mathcal{S}}(x) = a + \left(\frac{r}{\|x - a\|} \right)^2 (x - a). \quad (15)$$

Геометријски, $\psi_{\mathcal{S}}(x)$ лежи на полуправој ax и задовољава

$$\|\psi_{\mathcal{S}}(x) - a\| \cdot \|x - a\| = r^2.$$

Тачке унутар сфере се сликају ван ње и обрнуто, док тачке које леже на сфери остају фиксне.

Теорема 1.7. Ако је $\psi_{\mathcal{S}}$ инверзија простора $\mathbb{E}^3$ у односу на сферу $\mathcal{S}(a, r)$, тада важи:

1. $\psi_{\mathcal{S}}(x) = x$ ако и само ако $x \in \mathcal{S}(a, r)$;
2. $\psi_{\mathcal{S}}^2(x) = x$ за сваку тачку $x \neq a$;
3. за све тачке $x, y \neq a$

$$\|\psi_{\mathcal{S}}(x) - \psi_{\mathcal{S}}(y)\| = \frac{r^2 \|x - y\|}{\|x - a\| \|y - a\|}. \quad (16)$$

Доказ. 1. Како важи $\|\psi_{\mathcal{S}}(x) - a\| \cdot \|x - a\| = r^2$, можемо закључити да је $\psi_{\mathcal{S}}(x) = x$ ако и само ако $\|x - a\| = r$.

2.

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{S}}^2(x) &= a + \left(\frac{r}{\|\psi_{\mathcal{S}}(x) - a\|} \right)^2 (\psi_{\mathcal{S}}(x) - a) \\ &= a + \left(\frac{\|x - a\|}{r} \right)^2 \left(\frac{r}{\|x - a\|} \right)^2 (x - a) \\ &= a + (x - a) \\ &= x. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \|\psi_{\mathcal{S}}(x) - \psi_{\mathcal{S}}(y)\| &= r^2 \left\| \frac{x - a}{\|x - a\|^2} - \frac{y - a}{\|y - a\|^2} \right\| \\ &= r^2 \left[\frac{1}{\|x - a\|^2} - \frac{2(x - a) \cdot (y - a)}{\|x - a\|^2 \|y - a\|^2} + \frac{1}{\|y - a\|^2} \right]^{1/2} \\ &= \frac{r^2 \|x - y\|}{\|x - a\| \|y - a\|}. \end{aligned}$$

□

Коментар уз тврђење (3): Једначина (16) експлицитно показује да инверзија у односу на сферу није изометрија у еуклидском смислу, односно да не чува растојања између тачака. Уместо тога, еуклидско растојање између слика $\psi_{\mathcal{S}}(x)$ и $\psi_{\mathcal{S}}(y)$ директно зависи од тога колико су тачке x и y биле удаљене од центра инверзије a .

Анализом фактора скалирања $\frac{r^2}{\|x - a\| \|y - a\|}$ долазимо до особина овог пресликавања:

- Ако су тачке x и y у малој околини центра a , именилац $\|x - a\|\|y - a\|$ тежи нули, што значи да се растојање између њихових слика екстремно увећава (простор се локално „шири”).
- Обрнуто, ако су тачке x и y далеко од центра, именилац постаје велики, па се њихове слике збијају једна уз другу у близини центра a (простор се „скупља”).

Управо ова локална промена размере игра кључну улогу у Поенкареовом сферном моделу. Како би се у хиперболичком простору остварила права изометрија, ова промена еуклидских растојања мора се компензовати одговарајућим тежинским фактором приликом дефинисања хиперболичке метрике (што ћемо видети касније).

Кључно геометријско својство инверзије, на којем почива цела теорија Поенкареовог модела, јесте чињеница да ово пресликавање чува класу уопштених сфера (сфера и равни).

Теорема 1.8. Нека је $\psi_S : \mathbb{E}^3 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{E}^3 \setminus \{O\}$ инверзија у односу на сферу $\mathcal{S}(O, r)$. За слике еуклидских равни $P(a, t)$ и сфера $\mathcal{S}(c, \rho)$ при овом пресликавању важи:

(1) За раван $P(a, 0)$ која садржи координатни почетак O , слика је:

$$\psi_S(P(a, 0) \setminus \{O\}) = P(a, 0) \setminus \{O\}.$$

(2) За раван $P(a, t)$ која не садржи O ($t \neq 0$), слика је:

$$\psi_S(P(a, t)) = \mathcal{S}(c', \rho') \setminus \{O\},$$

где је $\mathcal{S}(c', \rho')$ сфера за чији центар важи $\|c'\| = \rho'$.

(3) За сферу $\mathcal{S}(c, \rho)$ која садржи O ($\|c\| = \rho$), слика је:

$$\psi_S(\mathcal{S}(c, \rho) \setminus \{O\}) = P(a', t'),$$

где је $t' \neq 0$.

(4) За сферу $\mathcal{S}(c, \rho)$ која не садржи O ($\|c\| \neq \rho$), слика је:

$$\psi_S(\mathcal{S}(c, \rho)) = \mathcal{S}(c', \rho'),$$

где за центар нове сфере важи $\|c'\| \neq \rho'$.

Доказ. Доказ ћемо извести аналитички. Свака уопштена сфера у простору $\mathbb{E}^3$ може се дефинисати као геометријско место свих тачака $x \in \mathbb{E}^3$ које задовољавају једначину:

$$A\|x\|^2 - 2B \cdot x + C = 0 \quad (17)$$

где су $A, C \in \mathbb{R}$ и вектор $B \in \mathbb{E}^3$, при чему важи услов $\|B\|^2 - AC > 0$.

Да бисмо показали конзистентност са нашом дефиницијом равни (једначина (1)) и сфере (једначина (14)), приметимо следеће:

- Уколико је $A = 0$ из услова $\|B\|^2 - AC > 0$ директно следи $\|B\|^2 > 0$ што значи да B не може бити нула-вектор. Дељењем са $2\|B\|$ једначина 17 се своди на $\frac{B}{\|B\|} \cdot x = \frac{C}{2\|B\|}$, што је управо раван $P(a, t)$ за $a = \frac{B}{\|B\|}$ и $t = \frac{C}{2\|B\|}$. Дакле, раван садржи координатни почетак O ако и само ако је $C = 0$.
- Уколико је $A \neq 0$, једначину можемо поделити са A и допунити до потпуног квадрата: $\|x - \frac{B}{A}\|^2 = \frac{\|B\|^2 - AC}{A^2}$. Ово представља сферу $\mathcal{S}(c, \rho)$ са центром $c = \frac{B}{A}$ и полупречником $\rho = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - AC}}{|A|}$. Сфера садржи O ако и само ако је $\|c\|^2 = \rho^2$, што се дешава ако и само ако је $C = 0$.

Нека је $x' = \psi_S(x)$ слика тачке $x \neq O$ при инверзији $\mathcal{S}(O, r)$. На основу дефиниције инверзије (Дефиниција 1.6) важи $x' = \left(\frac{r}{\|x\|}\right)^2 x$, одакле због инволутивности следи $x = \frac{r^2}{\|x'\|^2} x'$. Заменом ове релације у једначину (17) добијамо:

$$A \frac{r^4}{\|x'\|^2} - 2B \cdot \left(\frac{r^2}{\|x'\|^2} x'\right) + C = 0.$$

Множењем једначине фактором $\frac{\|x'\|^2}{r^2}$ добијамо једначину геометријског места слика x' :

$$\frac{C}{r^2} \|x'\|^2 - 2B \cdot x' + Ar^2 = 0. \quad (18)$$

Ова једначина је поново облика (17), при чему нови коефицијенти износе $A' = \frac{C}{r^2}$, $B' = B$ и $C' = Ar^2$. Да би новодобијена једначина заиста представљала уопштену сферу, мора бити испуњен услов постојања, што лако проверавамо:

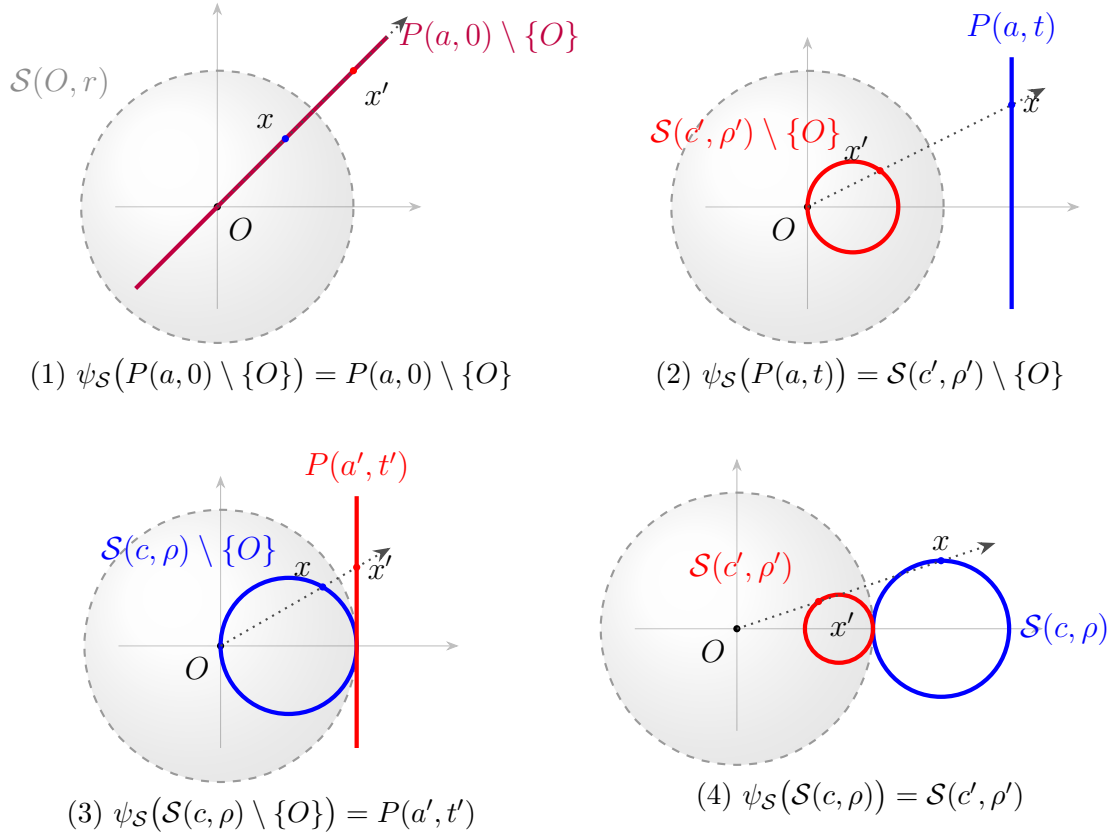
$$\|B'\|^2 - A'C' = \|B\|^2 - \left(\frac{C}{r^2}\right)(Ar^2) = \|B\|^2 - AC > 0.$$

Како је овај услов испуњен према претпоставци за оригиналну фигуру, закључујемо да слика те фигуре при овом пресликавању јесте валидна уопштена сфера. Анализом ових нових коефицијената директно доказујемо сва четири тврђења:

- (1) **Случај** $A = 0, C = 0$: Нови коефицијенти су $A' = 0$ и $C' = 0$. Слика је $-2B \cdot x' = 0$, односно раван $P(a, 0)$ без тачке O .
- (2) **Случај** $A = 0, C \neq 0$: Нови коефицијент $A' = \frac{C}{r^2} \neq 0$, па је слика сфера. Слободан члан је $C' = 0$, што значи да та сфера садржи O . Како је $x' \neq O$, слика је сфера без тачке O .
- (3) **Случај** $A \neq 0, C = 0$: Имамо $A' = 0$, па слика постаје раван. Нови слободан члан је $C' = Ar^2 \neq 0$, па раван не садржи O .
- (4) **Случај** $A \neq 0, C \neq 0$: Добијамо $A' \neq 0$ и $C' \neq 0$. Слика је сфера која не садржи O .

Тиме је теорема у потпуности доказана.

□



Слика 1.4: Двоструминални пресек који илуструје инверзију уопштених сфера ψ_S у односу на референтну сферу $S(O, r)$ (испрекидана сива линија). **(1)** Раван $P(a, 0)$ се пресликава на саму себе (изостављајући O). **(2)** Раван $P(a, t)$ која не садржи O слика се у сферу $S(c', \rho')$ из које је искључен центар инверзије O . **(3)** Сфера $S(c, \rho)$ са особином $\|c\| = \rho$ слика се у раван $P(a', t')$ која не пролази кроз O . **(4)** Сфера $S(c, \rho)$ за коју је $\|c\| \neq \rho$ слика се у сферу $S(c', \rho')$.

Напомена 1.9 (Ознаке које Алфорс користи). За јединичну сферу $S(0, 1)$, инверзија има нарочито једноставан облик:

$$x^* = \frac{x}{\|x\|^2}, \quad (19)$$

те је инверзија у односу на произвољну сферу $S(a, r)$ једнака

$$\psi_S(x) = a + r^2 (x - a)^*.$$

Алфорс у [3] показује да је Јакобијева матрица пресликавања (19) дата са:

$$J^*(x) = \frac{1}{\|x\|^2} (I - 2Q(x)), \quad Q(x)_{ij} = \frac{x_i x_j}{\|x\|^2}, \quad (20)$$

те да је, због својства $Q^2 = Q$ и симетричности $Q^T = Q$, матрица $I - 2Q(x)$ ортогонална.

Дакле, $J^*(x)$ је *конформна матрица* (позитиван скалар помножен ортогоналном матрицом) у свакој тачки $x \neq 0$. Одатле, применом ланчаног правила, директно следи да су све инверзије, а самим тим и све њихове композиције (које ћемо у наредном поглављу дефинисати као Мебијусове трансформације), конформна пресликавања. Алфорс ову формулу (20) назива „најважнијом формулом целе теорије” (енгл. *“This is perhaps the most important formula in the whole theory of Möbius transformations.”*).

Када еуклидски простор $\mathbb{E}^3$ допунимо бесконачно далеком тачком ∞ , добијамо проширени простор $\hat{\mathbb{E}}^3 = \mathbb{E}^3 \cup \{\infty\}$. Раван у овом простору допуњава се у проширену раван:

$$\hat{P}(a, t) = P(a, t) \cup \{\infty\}. \quad (21)$$

Проширена рефлексја $\hat{\rho} : \hat{\mathbb{E}}^3 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^3$ дефинише се са:

$$\hat{\rho}(x) = \begin{cases} \rho(x), & x \in \mathbb{E}^3, \\ \infty, & x = \infty. \end{cases} \quad (22)$$

Овако дефинисана проширена рефлексја представља инволутивни хомеоморфизам компактног простора $\hat{\mathbb{E}}^3$, при чему је скуп њених фиксних тачака тачно проширена раван $\hat{P}(a, t)$.

Аналогно, проширена инверзија $\hat{\psi}_S : \hat{\mathbb{E}}^3 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^3$ у односу на сферу са центром a дефинише се као:

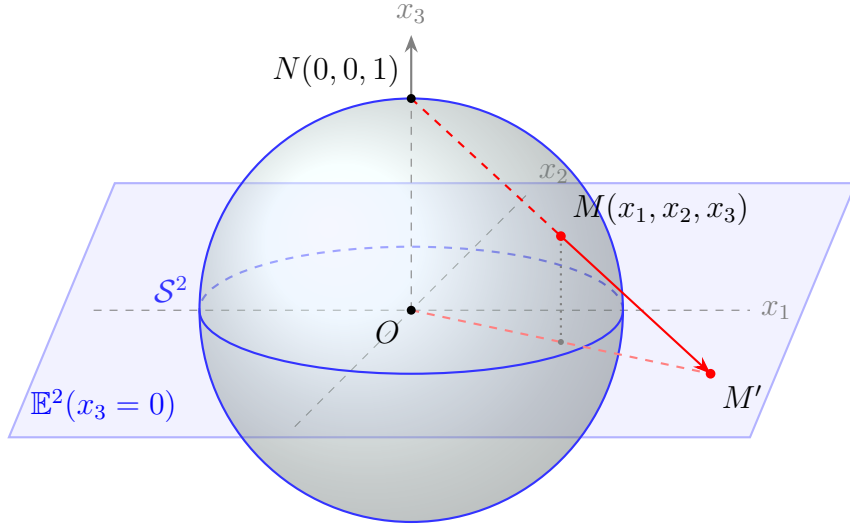
$$\hat{\psi}_S(x) = \begin{cases} \psi_S(x), & x \in \mathbb{E}^3 \setminus \{a\}, \\ \infty, & x = a, \\ a, & x = \infty. \end{cases} \quad (23)$$

Овим смо постигли да и рефлексје и инверзије постану бијекције (хомеоморфизми) на целом проширеном простору $\hat{\mathbb{E}}^3$.

1.3 Стереографска пројекција

Када кажемо сферна инверзија у тродимензионом еуклидском простору не можемо а да се не осврнемо на појам стереографске пројекције.

Дефиниција 1.10. Нека је $\mathcal{S}^2 = \{x \in \mathbb{E}^3 : \|x\| = 1\}$ јединична сфера са центром $O(0, 0, 0)$ у $\mathbb{E}^3$ и нека је $N = (0, 0, 1)$ њен северни пол. Пресликавање $\theta : \mathcal{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{E}^2$ које свакој тачки M облика $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}^2 \setminus \{N\}$ додељује тачку пресека M' праве NM са екваторијалном равни $x_3 = 0$, назива се стереографска пројекција.



Слика 1.5: Стереографска пројекција θ . Свакој тачки M на јединичној сфери $\mathcal{S}^2$ (осим северног пола N) додељује се јединствена тачка M' која представља пресек праве NM са екваторијалном равни $x_3 = 0$. Ова пројекција успоставља бијекцију између $\mathcal{S}^2 \setminus \{N\}$ и еуклидске равни $\mathbb{E}^2$.

Аналитичке формуле овог пресликавања дате су са:

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right). \quad (24)$$

Важно је истаћи да је пресликавање θ бијекција, те је дефинисана његова инверзна функција $\pi = \theta^{-1} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2 \setminus \{N\}$. Ради једноставнијег аналитичког извођења формула, у наставку ћемо посматрати управо пресликавање π и звати га стереографска пројекција.

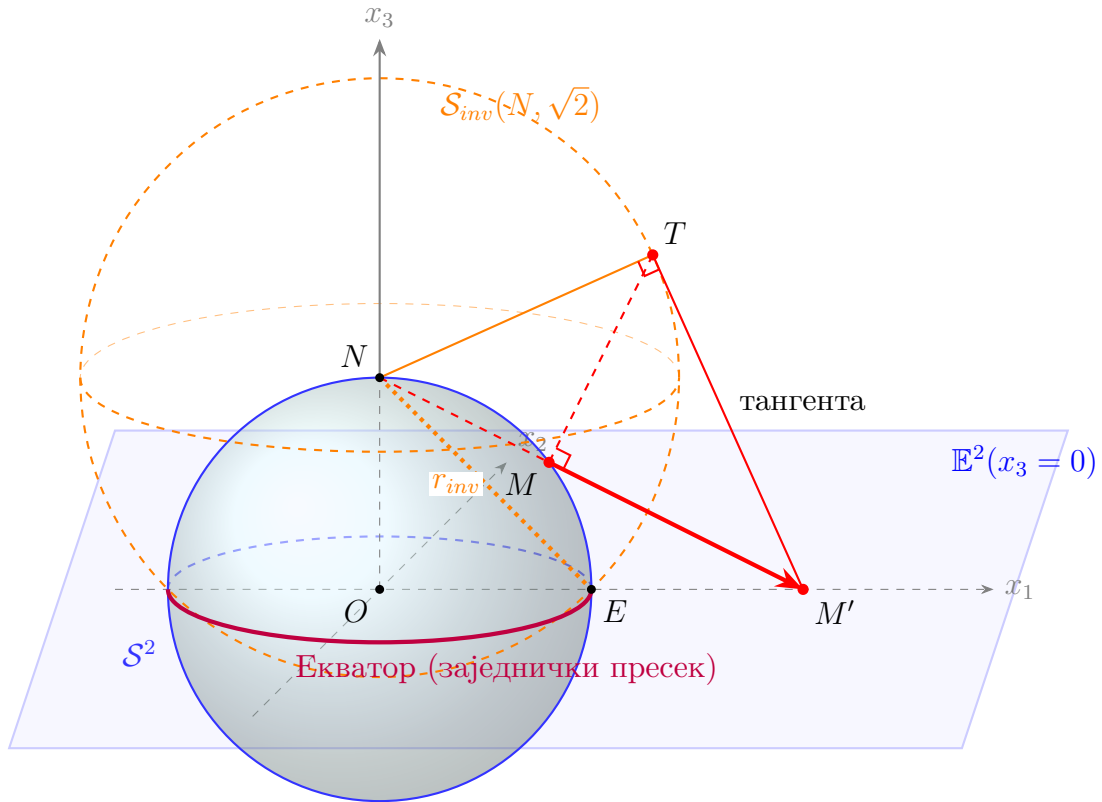
Дефиниција 1.11. Пресликавање $\pi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2 \setminus \{N\}$ дефинисано као инверз стереографске пројекције θ дато је експлицитним координатним формулама:

$$\pi(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \frac{2x_2}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right) \quad (25)$$

где је $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Приметимо да стереографска пројекција има лепу интерпретацију користећи појмове инверзивне геометрије.

Тврђење 1.12. *Стереографска пројекција $\pi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2 \setminus \{N\}$ представља рескрипцију просторне сферне инверзије ψ у односу на сферу са центром у северном полу $N = (0, 0, 1)$ и полупречником $\sqrt{2}$ на екваторијалну раван $x_3 = 0$.*



Слика 1.6: Трoдимензионални приказ стереографске пројекције као инверзије. Наранџастом линијом приказана је сфера инверзије $\mathcal{S}_{inv}(N, \sqrt{2})$. Повлачењем тангенте $M'T$ на сферу инверзије добијамо правоугли троугао $\triangle NTM'$. Његова висина из темена T „пада” тачно на јединичну сферу у тачку M , формирајући сличне правоугле троуглове $\triangle NTM$ и $\triangle NTM'$. Одатле директно следи $NM \cdot NM' = NT^2 = 2$.

Доказ. Посматрајмо сферу инверзије $\mathcal{S}(N, \sqrt{2})$ у простору $\mathbb{E}^3$. Према општој формули сферне инверзије пресликавање ψ је дефинисано као:

$$\psi(x) = N + \frac{2(x - N)}{\|x - N\|^2}. \quad (26)$$

Нека тачка $x = (x_1, x_2, 0)$ припада екваторијалној равни $\mathbb{E}^2$. Тада је:

$$\|x - N\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + (-1)^2 = 1 + \|x\|^2. \quad (27)$$

Заменом овог израза у формулу $\psi(x)$ добијамо:

$$\psi(x) = \left(\frac{2x_1}{1 + \|x\|^2}, \frac{2x_2}{1 + \|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right) \quad (28)$$

што се у потпуности поклапа са формулом $\pi(x_1, x_2)$ из Дефиниције 1.11. $\square$

Као што видимо, пресликавање π не обухвата северни пол $N(0, 0, 1)$, те је наша полазна сфера „прободена”. Да бисмо добили потпуну бијекцију, еуклидску раван $\mathbb{E}^2$ допуњавамо бесконачно далеком тачком ∞ и формирамо проширену еуклидску раван $\hat{\mathbb{E}}^2 = \mathbb{E}^2 \cup \{\infty\}$.

Сада можемо дефинисати проширено пресликавање $\hat{\pi} : \hat{\mathbb{E}}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2$ тако што задржавамо правила пресликавања за све коначне тачке, а бесконачно далеку тачку сликамо у северни пол:

$$\hat{\pi}(\infty) = (0, 0, 1). \quad (29)$$

На овај начин, проширена стереографска пројекција $\hat{\pi}$ постаје глобални хомеоморфизам (и конформни изоморфизам) између проширене равни $\hat{\mathbb{E}}^2$ и пуне јединичне сфере $\mathcal{S}^2$.

Ортогоналност сфера

Две уопштене сфере проширеног еуклидског простора $\hat{\mathbb{E}}^3$ су ортогоналне ако се секу и ако су им тангентне равни у свакој тачки пресека међусобно ортогоналне (што је аналитички еквивалентно услову да су им вектори нормала међусобно управни). Следећи критеријум користићемо непрестано.

Теорема 1.13. (1) $\hat{P}(a, t) \perp \hat{P}(b, s)$ ако и само ако је $a \cdot b = 0$.

(2) $S(a, r) \perp \hat{P}(b, s)$ ако и само ако $a \in P(b, s)$ (раван $\bar{P}$ пролази кроз центар сфере).

(3) $S(a, r) \perp S(b, s)$ ако и само ако је $\|a - b\|^2 = r^2 + s^2$.

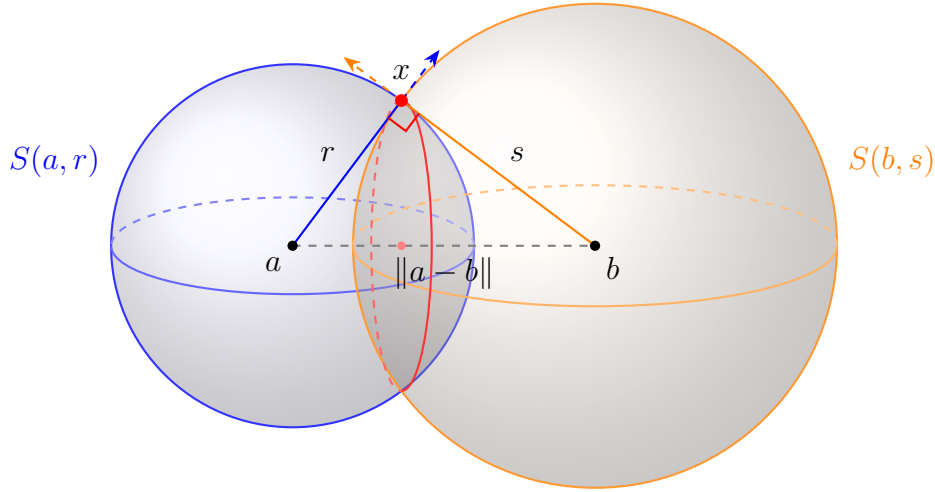
Доказ. Ставке (1) и (2) су очигледне. Доказујемо тврђење (3): У тачки пресека x правци нормала су $x - a$ и $x - b$. Они су управни ако и само ако је

$$(x - a) \cdot (x - b) = 0$$

. Из једнакости:

$$\|a-b\|^2 = \|(x-b)-(x-a)\|^2 = \|x-b\|^2 + \|x-a\|^2 - 2((x-a) \cdot (x-b)) = r^2 + s^2 - 2((x-a) \cdot (x-b))$$

директно следи тврђење.



Слика 1.7: Ортогоналност две сфере у 3D простору. Сфере $S(a, r)$ и $S(b, s)$ секу се по заједничкој кружници (истакнутој црвеном бојом). Сфере су ортогоналне ако и само ако се у свакој тачки њиховог пресека (па и у тачки x) њихове тангентне равни секу под правим углом. Геометријски, ово значи да права одређена полупречником једне сфере уједно представља нормалу на другу сферу у тачки њиховог додира. У равни која садржи центре сфера, ово се своди на то да права која садржи полупречник поклапа са тангентом, чиме се формира правоугли $\triangle axb$. Из Питагорине теореме директно следи услов $\|a-b\|^2 = r^2 + s^2$.

□

Посебно, за сферу $S(a, r)$ ортогоналну на јединичну сферу $S^2 = S(0, 1)$ услов (3) гласи

$$r^2 = \|a\|^2 - 1, \quad (30)$$

па центар a (са $\|a\| > 1$) једнозначно одређује полупречник r . Ова једноставна релација биће окосница конструкције h -правих, h -равни и h -рефлексија.

Дефиниција 1.14. Нека су A, B, C, D четири произвољне разне тачке. Тада број $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ називамо дворазмером те четири тачке и означавамо са $[A, B; C, D]$.

Уколико су тачке колинеарне, очигледно важи $|(A, B; C, D)| = [A, B; C, D]$. Нека су A', B', C', D' слике тачака A, B, C, D при инверзији ψ_S . Тада је:

$$[A', B'; C', D'] = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'} = \frac{\frac{r^2 AC}{OC \cdot OA}}{\frac{r^2 CB}{OB \cdot OC}} : \frac{\frac{r^2 AD}{OD \cdot OA}}{\frac{r^2 DB}{OB \cdot OD}} = [A, B; C, D]. \quad (31)$$

Напомена 1.15. Приликом проучавања тродимензионалног хиперболичког простора у оквиру Поенкареовог модела лопте $\mathbb{B}^3 \subset \mathbb{R}^3$, битно је јасно разграничити димензије објеката са којима радимо. Граница овог простора, позната као апсолута, јесте дводимензионална сфера $\mathcal{S}^2$. Сходно томе, стереографска пројекција π делује искључиво као пресликавање са граничне сфере $\mathcal{S}^2$ на проширену комплексну раван $\hat{\mathbb{C}}$ (односно $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$). Ова пројекција се врши из северног пола $N(0, 0, 1)$, који се по дефиницији пресликава у далеку тачку ∞ .

Са друге стране, у литератури се често сусреће и стереографско пресликавање које повезује унутрашњост целог модела лопте $\mathbb{B}^3$ са моделом хиперболоида $\mathcal{H}^3$. Такво пресликавање захтева прелазак у четвородимензионални Лоренцов простор $\mathbb{R}^{3,1}$ и врши се пројекцијом са јужног пола хиперболоида $(0, 0, 0, -1)$. Стриктно раздвајање ова два механизма пројекције суштинско је за правилно разумевање Мебијусових трансформација на апсолути простора $\mathbb{B}^3$.

Глава 2

Поенкареов сферни модел

Поенкареов модел лопте представља једну од најзначајнијих и најинтуитивнијих интерпретација хиперболичке геометрије у тродимензионалном еуклидском простору $\mathbb{E}^3$ [2]. Овај модел је конформан, што значи да се хиперболички углови између правих и равни поклапају са одговарајућим еуклидским угловима између њихових еуклидских репрезентата, што га чини изузетно погодним за анализу геометријских својстава и визуелизацију.

Нека је $\mathbb{E}^3$ стандардни тродимензионални еуклидски простор са уобичајеним скаларним производом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и индукованом нормом $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$. Тачке Поенкареовог модела лопте (h-тачке) дефинишемо као унутрашње тачке јединичне лопте, што у векторском запису гласи:

$$\mathbb{B}^3 = \{X \in \mathbb{E}^3 : \|X\|^2 < 1\} \quad (32)$$

док граничну сферу називамо апсолутом, у ознаци:

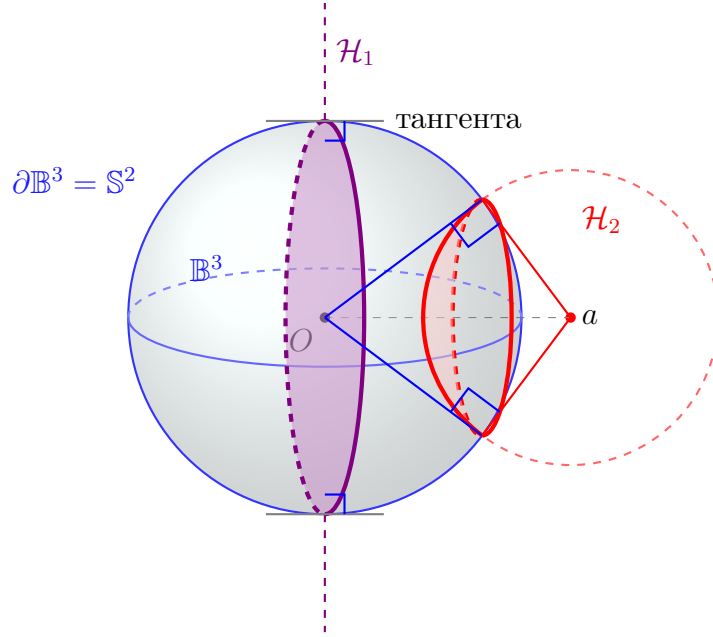
$$\partial\mathbb{B}^3 = \mathbb{S}^2 = \{X \in \mathbb{E}^3 : \|X\|^2 = 1\}. \quad (33)$$

Тачке на апсолути не припадају хиперболичком простору $\mathbb{B}^3$, већ представљају бесконачно далеке (идеалне) тачке. Тачку O (координатни почетак, $\|O\| = 0$) називамо центром апсолуте.

У Поенкареовом моделу лопте, основни геометријски објекти попут равни и правих се не представљају стандардним еуклидским равнима и правима, већ еуклидским сферама и круговима који задовољавају услов ортогоналности са апсолутом $\mathbb{S}^2$ [4].

2.1 Хиперболичка раван (h-раван)

Хиперболичка раван (h-раван) у лопти $\mathbb{B}^3$ јесте непразан пресек лопте $\mathbb{B}^3$ са еуклидском сфером S која је ортогонална на апсолуту $\mathbb{S}^2$, или са еуклидском равни Π која пролази кроз центар апсолуте O .



Слика 2.1: Поенкареов модел лопте $\mathbb{B}^3$ и хиперболичке равни (h-равни). Општа h-раван ($\mathcal{H}_2$, црвена купола) представља пресек еуклидске сфере која је ортогонална на границу $\mathbb{S}^2$ са унутрашњошћу лопте. Специјална h-раван ($\mathcal{H}_1$, љубичасти диск) је део еуклидске равни која пролази кроз центар O . Плавим симболима визуелно је доказан фундаментални услов ортогоналности са апсолутом.

Аналитички, користећи векторску нотацију и ослањајући се на метричка својства из претходних поглавља (посебно Теорему 1.13), свака h-раван може се описати јединственом једначином:

$$p \|X\|^2 - 2\langle X, C \rangle + p = 0, \quad (\|X\|^2 < 1) \quad (34)$$

где параметри $p \in \{0, 1\}$ и вектор $C \in \mathbb{E}^3$ задовољавају услов $\|C\|^2 > p^2$.

Из опште једначине (34) изводимо два структурна случаја h-равни:

1. **Случај $p = 1$ (h-раван као уопштена сфера):**

$$\|X\|^2 - 2\langle X, C \rangle + 1 = 0 \iff \|X - C\|^2 = \|C\|^2 - 1. \quad (35)$$

Ова једначина представља еуклидску сферу са центром C и полупречником $R = \sqrt{\|C\|^2 - 1}$. Услов $\|C\|^2 > 1$ осигурава да је сфера ортогонална на апсолуту, што представља директну примену релације (30) за ортогоналност сфере на јединичну сферу.

2. **Случај $p = 0$ (h-раван као уопштена раван кроз координатни почетак):** Једначина се своди на еуклидску раван:

$$\langle X, C \rangle = 0 \quad (36)$$

која садржи координатни почетак O и чији је вектор нормале C различит од нуле. Ова раван се може посматрати као гранични случај еуклидске сфере бесконачно великог полупречника са центром у бесконачности.

2.2 Хиперболичка права (h-права)

Хиперболичка права (h-права) у Поенкареовом моделу $\mathbb{B}^3$ је непразни пресек две различите h-равни. Геометријски посматрано, h-права је део еуклидске кружнице или праве која је ортогонална на апсолуту $\mathbb{S}^2$. Прецизније, у зависности од положаја у односу на центар лопте, h-права унутар модела $\mathbb{B}^3$ може бити:

- **отворени кружни лук** који спаја две тачке на апсолути $\mathbb{S}^2$ (у случају када одговарајући еуклидски круг не пролази кроз координатни почетак);
- **отворена еуклидска дуж** која спаја две супротне тачке на апсолути $\mathbb{S}^2$ и пролази кроз координатни почетак O (као гранични случај када се кружница дегенерише у праву).

У оба случаја, сама h-права садржи искључиво тачке које леже строго у унутрашњости лопте $\mathbb{B}^3$, док крајње тачке лука припадају апсолути и представљају тачке у бесконачности.

Аналитички, h-права је задата системом једначина две h-равни које су ортогоналне на апсолуту. У зависности од тога да ли h-права садржи или не садржи координатни почетак, разликујемо два случаја:

1. **h-права не садржи координатни почетак:** Оваква h-права (кружни лук) једнозначно је одређена као пресек једне еуклидске равни која

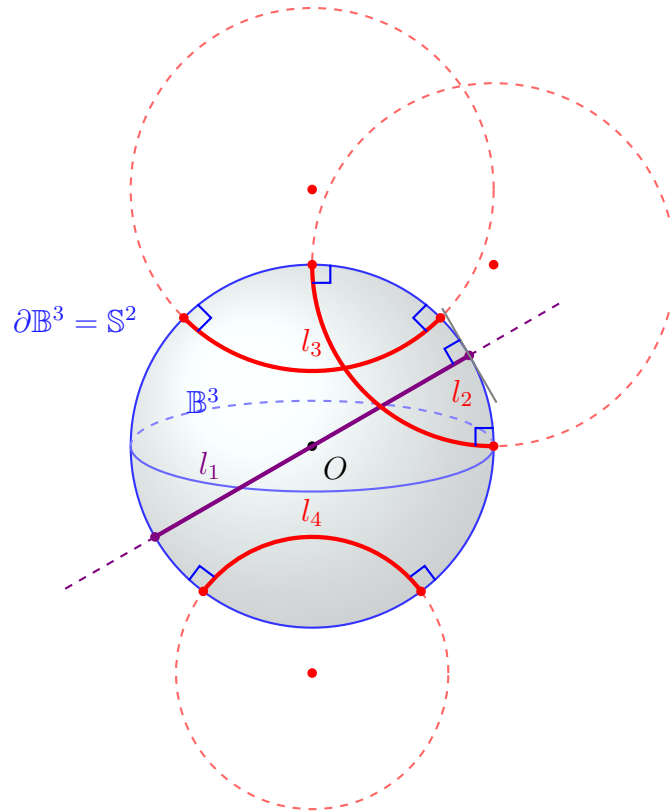
пролази кроз координатни почетак (са вектором нормале n) и једне еуклидске сфере (са центром C) која ортогонално сече апсолуту:

$$l : \begin{cases} \|X\|^2 - 2\langle X, C \rangle + 1 = 0, \\ \langle X, n \rangle = 0 \end{cases} \quad (37)$$

уз услов $\|C\|^2 > 1$. Раван кроз координатни почетак гарантује да кружни лук ортогонално пресеца апсолутну сферу $\mathbb{S}^2$.

2. h-права садржи координатни почетак: Оваква h-права (пречник лопте $\mathbb{B}^3$) одређена је као пресек две различите еуклидске равни које садрже координатни почетак (са векторима нормала n_1 и n_2):

$$l : \begin{cases} \langle X, n_1 \rangle = 0, \\ \langle X, n_2 \rangle = 0. \end{cases} \quad (38)$$



Слика 2.2: Поенкареов модел лопте $\mathbb{B}^3$ и хиперболичке праве (h-праве). h-праве су једнодимензионалне криве које представљају делове кружница ортогоналних на границу (црвени лукови), или еуклидске праве које пролазе кроз почетак O (љубичаста боја l_1). Плавим симболима на свим местима пресека истакнуто је својство ортогоналности h-правих и сфере $\mathbb{S}^2$.

2.3 Међусобни положаји основних елемената у простору

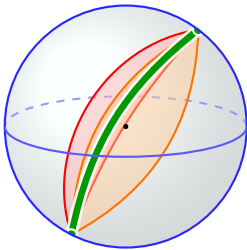
У тродимензионалној хиперболичкој геометрији, међусобни положаји правих и равни су знатно разноврснији него у еуклидској геометрији, што је директна последица неиспуњености Петог Еуклидовог постулата.

Међусобни положај две h-равни

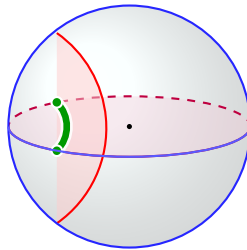
Међусобни положај две h-равни у Поенкареовом моделу $\mathbb{B}^3$ у потпуности се одређује анализом њихових еуклидских представника (сфера или равни) и њихових пресека са простором $\mathbb{B}^3$ и апсолутом $\mathbb{S}^2$.

1. **Конкурентне h -равни (h -равни које се секу):** Две h -равни се секу ако је њихов пресек непразан скуп тачака строго унутар простора $\mathbb{B}^3$. Пресек две конкурентне h -равни увек је тачно једна h -права. У зависности од еуклидског типа ових равни, пресек се реализује на један од три начина:

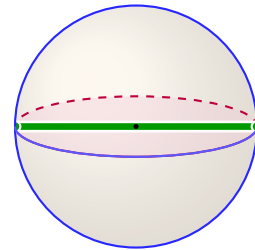
- **Две еуклидске сфере** (које ортогонално секу апсолуту): Њихов пресек унутар $\mathbb{B}^3$ јесте h -права, која еуклидски представља отворен кружни лук ортогоналан на апсолуту.
- **Еуклидска сфера** (која ортогонално сече апсолуту) и **еуклидска раван** (кроз координатни почетак): Њихов пресек унутар $\mathbb{B}^3$ јесте h -права, која такође еуклидски представља отворен кружни лук ортогоналан на апсолуту.
- **Две еуклидске равни** (које пролазе кроз координатни почетак): Њихов пресек унутар $\mathbb{B}^3$ јесте h -права, која еуклидски представља отворену дуж (пречник лопте).



а) Две еуклидске сфере



б) Сфера и раван



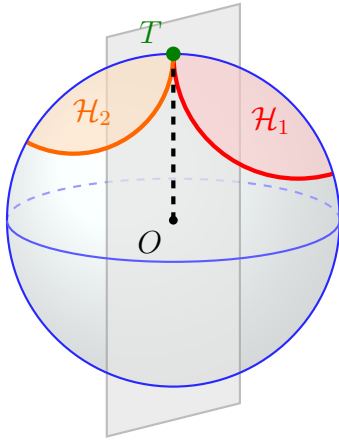
в) Две еуклидске равни

Слика 2.3: Три фундаментална случаја пресека конкурентних h -равни у Поенкареовом моделу лопте $\mathbb{B}^3$. Пресечна крива (h -права) истакнута је зеленом линијом, при чему зелене тачке на апсолути представљају њене идеалне крајеве. **а)** Пресек две еуклидске сфере генерише h -праву у облику кружног лука. **б)** Пресек еуклидске сфере и равни кроз почетак такође даје h -праву у форми лука. **в)** Пресек две еуклидске равни кроз почетак резултује h -правом која се еуклидски поклапа са отвореним пречником лопте.

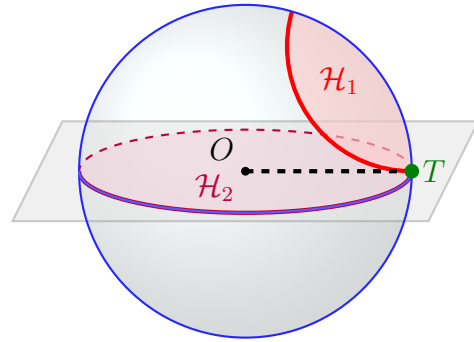
2. **Паралелне h -равни (асимптотски паралелне):** Две h -равни су паралелне ако немају ниједну заједничку тачку унутар хиперболичког простора $\mathbb{B}^3$, већ се додирују у тачно једној заједничкој тачки која припада апсолути (у идеалној тачки) $\mathbb{S}^2$.

Анализом њихових еуклидских представника, овај однос геометријски значи да су површи које их представљају међусобно тангентне у тој тачки на апсолути. Оваква конфигурација се може реализовати на само два начина (случај две еуклидске равни овде није могућ, јер сваке две различите еуклидске равни кроз координатни почетак неминовно садрже пречник лопте, па се секу унутар ње):

- **Две еуклидске сфере:** Оне се међусобно додирују у тачно једној тачки на апсолути $\mathbb{S}^2$.
- **Еуклидска сфера и еуклидска раван** (раван кроз координатни почетак): Еуклидска раван је тангентна на сферу у њиховој заједничкој тачки на апсолути $\mathbb{S}^2$.



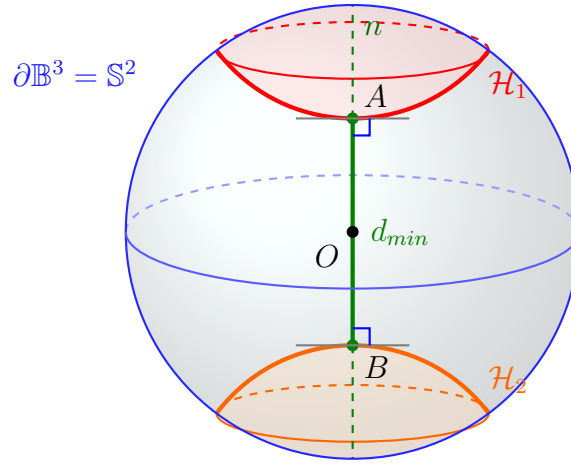
а) Две еуклидске сфере



б) Еуклидска сфера и еуклидска раван

Слика 2.4: (Асимптотски) паралелне h -равни у Поенкареовом моделу лопте $\mathbb{B}^3$. Приказана је њихова заједничка тангентна раван (сиво) у идеалној тачки додира T на апсолути.

3. Хиперпаралелне h -равни: Две h -равни називају се хиперпаралелним уколико немају ниједну заједничку тачку, ни унутар хиперболичког простора $\mathbb{B}^3$, нити на апсолути $\mathbb{S}^2$. За сваке две хиперпаралелне h -равни постоји једна и само једна заједничка нормала (h -права која их обе сече под правим углом). За разлику од еуклидске геометрије где су паралелне равни на константном одстојању, хиперпаралелне h -равни се разилазе, а њихово међусобно хиперболично растојање је најкраће (достиче строги минимум) управо дуж сегмента те јединствене заједничке нормале.

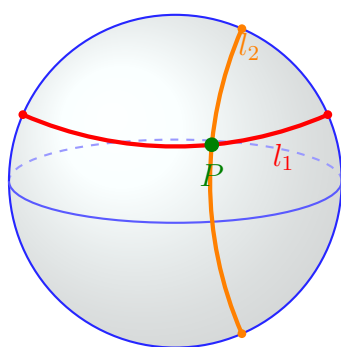
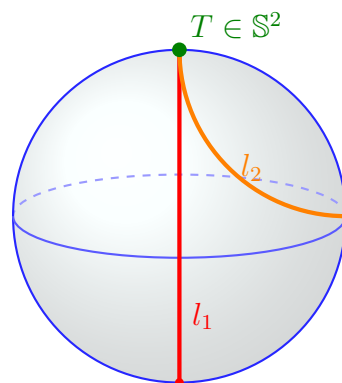
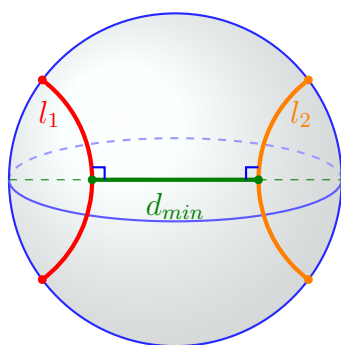
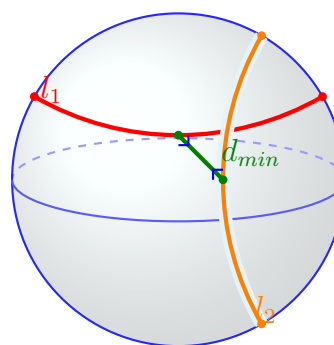


Слика 2.5: Хиперпаралелне h -равни у Поенкареовом моделу лопте $\mathbb{B}^3$. За овакве две равни постоји јединствена заједничка нормална h -права n (истакнута зеленом бојом).

Међусобни положај две h -праве

1. **Конкурентне h -праве (h -праве које се секу):** Две h -праве су конкурентне ако имају тачно једну заједничку тачку строго унутар простора $\mathbb{B}^3$. Оне су увек компланарне, односно једнозначно одређују једну h -раван којој обе припадају.
2. **Паралелне h -праве (асимптотски паралелне):** Две h -праве су паралелне ако немају ниједну заједничку тачку унутар $\mathbb{B}^3$, већ имају тачно једну заједничку тачку на апсолути S^2 (идеалну тачку). Ове праве такође обавезно леже у једној истој h -равни. Њихово међусобно хиперболично растојање није константно; оно асимптотски тежи нули како се тачке крећу ка њиховој заједничкој тачки на апсолути.
3. **Хиперпаралелне h -праве:** Две h -праве су хиперпаралелне уколико леже у истој h -равни (компланарне су), али немају заједничких тачака ни унутар $\mathbb{B}^3$ нити на апсолути S^2 . За сваке две хиперпаралелне h -праве постоји тачно једна заједничка нормална h -права (која лежи у истој h -равни). Њихово међусобно хиперболично растојање свој минимум достиже управо на дужи те заједничке нормале.
4. **Мимоилазне h -праве:** Две h -праве које не леже у истој h -равни кажемо да су мимоилазне h -праве. За сваке две мимоилазне h -праве постоји

тачно једна заједничка нормална h -права, дуж које се реализује њихово најкраће међусобно растојање.

а) Конкурентне h -правеб) Паралелне h -правев) Хиперпаралелне h -правег) Мимоилазне h -праве

Слика 2.6: Четири могућа међусобна положаја две h -праве у Поенкареовом моделу лопте $\mathbb{B}^3$.

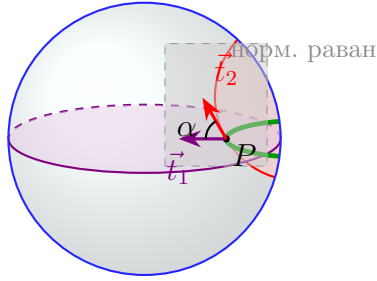
Углови у Поенкареовом моделу лопте

Најзначајније метричко својство Поенкареовог модела јесте његова **конформност**, што значи да овај модел верно чува углове. Хиперболички углови између геометријских објеката једнаки су угловима између њихових еуклидских представника у тачки пресека.

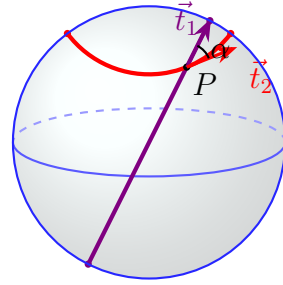
- **Угао између две h -равни** дефинише се уколико су h -равни конкурентне. Хиперболички диједарски угао између њих једнак је еуклидском углу под којим се секу одговарајуће еуклидске сфере (или сфера и раван) које те h -равни представљају. Прецизније, тај угао се дефинише

као еуклидски угао између њихових **тангентних равни** конструисаних у произвољној заједничкој тачки на пресечној кривој (h-прави). Алгебарски, он се поклапа са углом између вектора нормала на те две површи у посматраној тачки

- **Угао између две h-праве** дефинише се уколико се те две h-праве секу. Хиперболички угао између њих једнак је обичном еуклидском углу између њихових еуклидских тангенти (вектора праваца) конструисаних у тој заједничкој тачки пресека.



а) Угао између две h-равни



б) Угао између две h-праве

Слика 2.7: Конформност Поенкареовог модела лопте $\mathbb{B}^3$. **а)** Диедарски хиперболички угао α између две конкурентне h-равни мери се као еуклидски угао између њихових тангентних вектора $\vec{t}_1$ и $\vec{t}_2$ који леже стриктно у нормалној равни пресека (сива рава). **б)** Хиперболички угао α између две h-праве које се секу поклапа се са еуклидским углом између њихових вектора праваца у заједничкој тачки P .

2.4 Управност у Поенкареовом моделу лопте

У класичним пројективно-геометријским излагањима хиперболичке геометрије, релације управности се по правилу дефинишу преко пројективне теорије поларитета у односу на апсолуту. Међутим, захваљујући фундаменталном својству *конформности* Поенкареовог модела, релација управности се може елегантно извести коришћењем еуклидске метричке теорије ортогоналних сфера изграђене у Теорему 1.13.

Управност две h -равни

Нека су у h -простору $\mathbb{B}^3$ дате две h -равни π_1 и π_2 , представљене еуклидским сферама $S_1(C_1, r_1)$ и $S_2(C_2, r_2)$ које су ортогоналне на апсолуту $\mathbb{S}^2(O, 1)$. Због конформности модела, ове две h -равни су међусобно h -нормалне ($\pi_1 \perp_h \pi_2$) ако и само ако су ове еуклидске сфере међусобно ортогоналне у еуклидском смислу ($S_1 \perp S_2$).

На основу Теореме 1.13 (тврђење 3), услов њихове ортогоналности гласи:

$$\|C_1 - C_2\|^2 = r_1^2 + r_2^2. \quad (39)$$

Како су обе сфере S_1 и S_2 истовремено ортогоналне на апсолуту $\mathbb{S}^2$, за њихове полупречнике, према релацији (30), важи:

$$r_1^2 = \|C_1\|^2 - 1, \quad (40)$$

$$r_2^2 = \|C_2\|^2 - 1. \quad (41)$$

Из једнакости (39), (40) и (41) добијамо:

$$\|C_1\|^2 + \|C_2\|^2 - 2\langle C_1, C_2 \rangle = (\|C_1\|^2 - 1) + (\|C_2\|^2 - 1).$$

Даљим сређивањем долазимо до аналитичког услова управности:

$$\langle C_1, C_2 \rangle = 1. \quad (42)$$

Напомена: Уколико је једна од h -равни, рецимо π_2 , еуклидска раван која пролази кроз координатни почетак (са нормалним вектором $\vec{n}$), из Теореме 1.13 (тврђење 2) директно следи да је услов ортогоналности испуњен ако и само ако центар C_1 сфере S_1 припада тој равни, односно $\langle C_1, \vec{n} \rangle = 0$.

Управност h -праве и h -равни

Размотримо општи случај када је h -права l представљена уопштеним кругом $\tilde{l}$ ортогоналним на апсолуту, а h -раван π представљена уопштеном сфером $S_\pi(C_\pi, r_\pi)$.

Аналитички, уопштени круг $\tilde{l}$ дефинишемо као пресек еуклидске равни α_l (у којој круг лежи) и неке помоћне еуклидске сфере $S_l(C_l, r_l)$ која је ортогонална на апсолуту:

$$\alpha_l : \langle X, \vec{n}_l \rangle + D = 0 \quad (43)$$

$$S_l : \|X - C_l\|^2 = r_l^2 \quad \text{уз услов} \quad \|C_l\|^2 - 1 = r_l^2 \quad (44)$$

Да би h -права (круг $\tilde{l}$) и h -раван (сфера S_π) биле међусобно ортогоналне у њиховој пресечној тачки, морају бити испуњена два услова која произилазе из елементарне еуклидске геометрије и Теореме 1.13:

Теорема 2.1 (Управност h -праве и h -равни). *Нека је h -права l представљена еуклидским кругом $\tilde{l}$ који лежи у равни α_l , а h -раван π еуклидском сфером S_π са центром C_π . h -права l и h -раван π су међусобно нормалне ако и само ако су испуњена следећа два услова:*

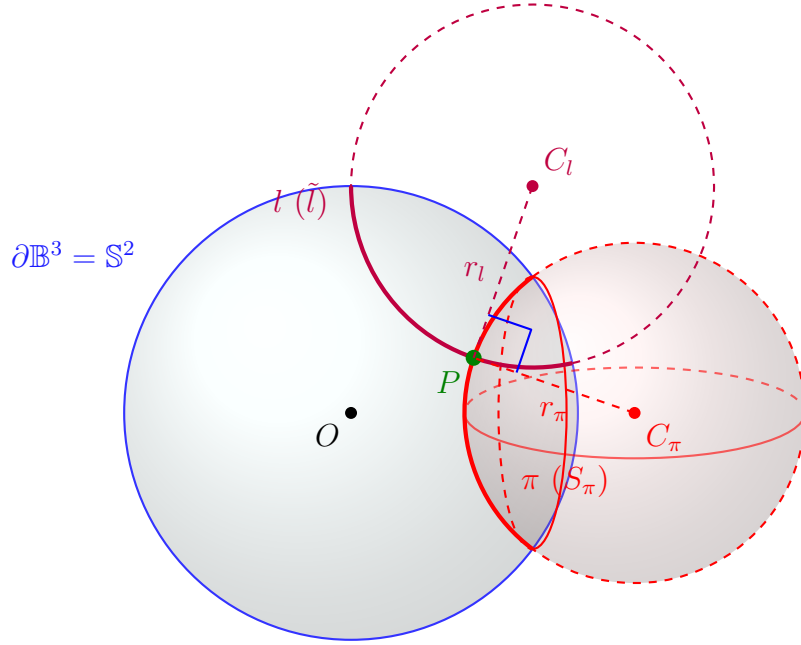
1. *Центар C_π припада еуклидској равни α_l у којој лежи круг $\tilde{l}$, односно раван α_l садржи центар сфере S_π :*

$$\langle C_\pi, \vec{n}_l \rangle + D = 0. \quad (45)$$

2. *Уколико круг $\tilde{l}$ посматрамо као пресек равни α_l и помоћне сфере $S_l(C_l, r_l)$ ортогоналне на апсолути, тада њихове одговарајуће сфере S_π и S_l морају бити међусобно ортогоналне. Према претходно показаном услову (42), ово значи да њихови центри задовољавају:*

$$\langle C_\pi, C_l \rangle = 1. \quad (46)$$

Овај приступ путем скаларног производа директно уједињује метрику проширеног еуклидског простора са пројективним својствима Поенкареовог модела лопте.



Слика 2.8: Геометријска интерпретација Теореме 2.1 о управности h -праве и h -равни.

Управност две h -праве у простору

Уколико се две h -праве l_1 и l_2 (представљене уопштеним круговима $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$) секу у некој h -тачки T , оне на јединствен начин одређују једну h -раван π . Унутар те заједничке h -равни, релација нормалности $l_1 \perp_h l_2$ се у потпуности своди на дводимензионални случај.

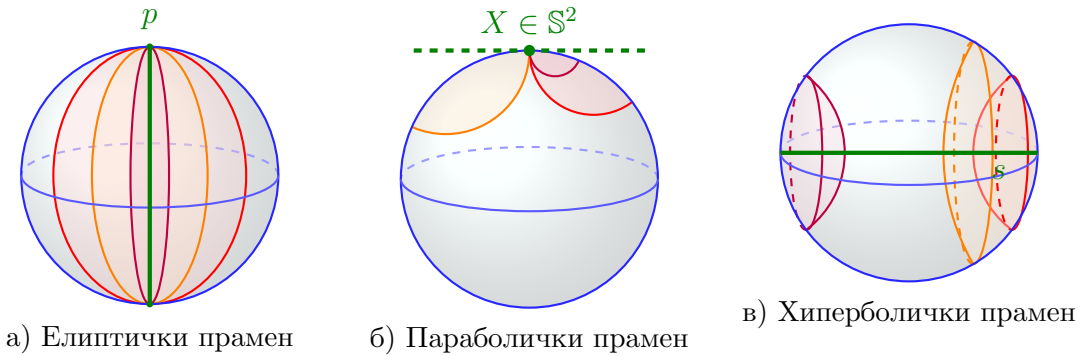
Имајући у виду услове ортогоналности (Теорема 1.13), уопштени кругови $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$ се секу под правим углом ако и само ако њихови центри C_1 и C_2 задовољавају услов скаларног производа $\langle C_1, C_2 \rangle = 1$ за ортогоналне кругове који секу јединични круг. Тиме се проблем ортогоналности h -правих у простору елегантно своди на планиметријски проблем унутар њихове заједничке h -равни.

2.5 Праменови h -равни

У Поенкареовом моделу лопте $\mathbb{B}^3$, прамен h -равни представља једнопараметарску фамилију h -равни које у пројективном смислу имају заједничку

праву (осу прамена). У зависности од односа те осе према апсолути $\mathbb{S}^2$, праменови се класификују на следећи начин:

1. **Елиптички прамен h -равни:** Скуп свих h -равни у $\mathbb{B}^3$ које садрже заједничку h -праву p . Оса прамена лежи унутар $\mathbb{B}^3$, те се све h -равни овог прамена секу по тој правој.
2. **Параболички прамен h -равни:** Скуп свих h -равни у $\mathbb{B}^3$ које имају заједничку бесконачно далеку тачку $X \in \mathbb{S}^2$, а чије су еуклидске сфере међусобно тангентне у тачки X . Односно, њихови еуклидски центри припадају истој еуклидској правој која лежи у тангентној равни на апсолути у тачки X .
3. **Хиперболички прамен h -равни:** Скуп свих h -равни у $\mathbb{B}^3$ које су ортогоналне на заједничку h -праву s . Оса прамена лежи у потпуности изван $\mathbb{B}^3$, те се ове h -равни не секу ни унутар $\mathbb{B}^3$ ни на $\mathbb{S}^2$, већ деле заједничку нормалу.



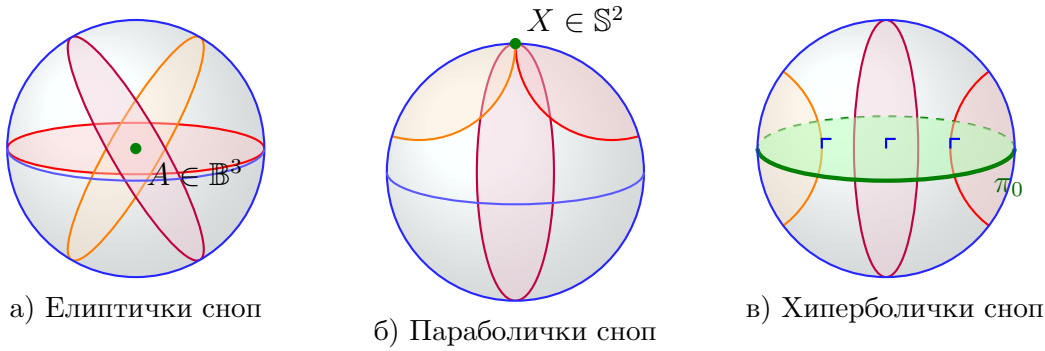
Слика 2.9: Три типа праменова h -равни у Поенкареовом моделу лопте $\mathbb{B}^3$.

2.6 Снопови h -равни

Сноп h -равни у Поенкареовом моделу лопте $\mathbb{B}^3$ представља двопараметарску фамилију h -равни које у пројективном смислу имају заједничку тачку (центар снопа). У зависности од положаја те тачке у односу на апсолуту $\mathbb{S}^2$, снопови се класификују на следећи начин:

1. **Елиптички сноп h -равни:** Скуп свих h -равни у $\mathbb{B}^3$ које садрже заједничку h -тачку $A \in \mathbb{B}^3$.

2. **Параболички сноп h -равни:** Скуп свих h -равни у $\mathbb{B}^3$ које имају заједничку бесконачно далеку тачку $X \in \mathbb{S}^2$. Све h -равни овог снопа пролазе кроз ту идеалну тачку на граници модела.
3. **Хиперболички сноп h -равни:** Скуп свих h -равни у $\mathbb{B}^3$ које су ортогоналне на заједничку h -раван π_0 . У пројективном проширењу, центар овог снопа лежи изван $\mathbb{B}^3$, а његова поларна раван у односу на $\mathbb{S}^2$ је управо раван π_0 .

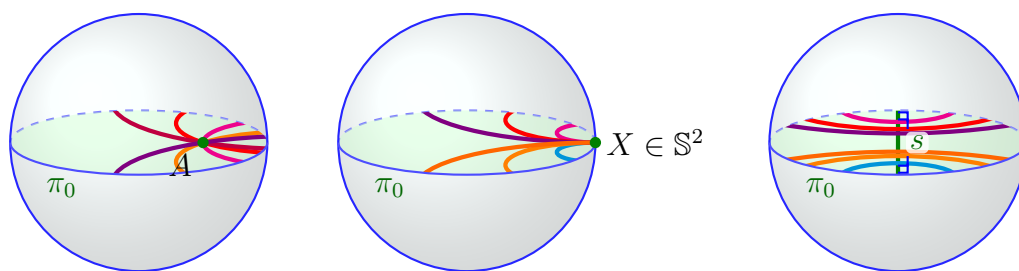


Слика 2.10: Класификација снопова h -равни у Поенкареовом моделу лопте $\mathbb{B}^3$.

2.7 Праменови h -правих

У тродимензионалном хиперболичком простору, прамен правих се увек посматра као рестрикција унутар једне фиксне h -равни π_0 . То је једнопараметарска фамилија h -правих које леже у тој равни и класификују се на следећи начин:

1. **Елиптички прамен h -правих:** Скуп свих h -правих унутар h -равни π_0 које пролазе кроз заједничку h -тачку $A \in \pi_0$.
2. **Параболички прамен h -правих:** Скуп свих h -правих унутар h -равни π_0 које имају заједничку бесконачно далеку тачку $X \in \mathbb{S}^2$ на граници те равни.
3. **Хиперболички прамен h -правих:** Скуп свих h -правих унутар h -равни π_0 које су ортогоналне на заједничку h -праву s која лежи у тој равни.



а) Елиптички прамен

б) Параболички прамен

в) Хиперболички прамен

Слика 2.11: Класификација праменова h -правих у Поенкареовом моделу лопте $\mathbb{B}^3$ приказана кроз опште кружне лукове.

Глава 3

Изометрије Поенкаревог модела

3.1 Н-рефлексије и h-изометрије

У овој секцији проучавамо изометријске трансформације у тродимензионалном Поенкареовом моделу лопте, успостављајући дубоку везу између хиперболичких изометрија и просторних Мебијусових трансформација. Као што је у дводимензионалном случају изложено у [4], где се h-рефлексије дефинишу као рестрикције еуклидских инверзија у односу на кругове ортогоналне на апсолуту или рестрикције еуклидских рефлексија у односу на праве ортогоналне на апсолуту, у тродимензионалном хиперболичком простору $\mathbb{B}^3$ основни генератори групе изометрија су h-рефлексије у односу на h-равни, дефинисане као рестрикције просторних сферних инверзија и еуклидских раванских рефлексија.

Кључно запажање је да инверзија у односу на сферу ортогоналну на апсолуту чува хиперболички простор. То је последица претходно изведених услова ортогоналности између сфера и апсолуте, као и следеће теореме [1, Теорема 4.4.6].

Теорема 3.1. *Инверзија ψ у односу на сферу Σ_0 оставља ложишту $\mathbb{B}^3$ инваријантном ако и само ако је Σ_0 ортогонална на апсолуту $\mathbb{S}^2$.*

Доказ. Нека је ψ инверзија у односу на сферу $\Sigma_0 = S(a, r)$.

Смер ($\Rightarrow$): Претпоставимо да је сфера Σ_0 ортогонална на апсолуту $\mathbb{S}^2$. Према Теорему 1.13, то значи да важи услов ортогоналности:

$$r^2 = \|a\|^2 - 1. \quad (47)$$

Битно је напоменити да из (47) следи $\|a\|^2 > 1$ односно a се налази ван лопте $\mathbb{B}^3$, па је за свако $x \in \mathbb{B}^3$ именилац $\|x - a\|^2 \neq 0$.

За произвољну тачку $x \in \mathbb{B}^3$ (за коју је $\|x\| < 1$), по дефиницији инверзије важи:

$$\psi(x) = a + \frac{r^2}{\|x - a\|^2}(x - a). \quad (48)$$

Квадрирањем претходне једначине (48) добијамо:

$$\begin{aligned} \|\psi(x)\|^2 &= \|a\|^2 + \frac{2r^2}{\|x - a\|^2}(a \cdot (x - a)) + \frac{r^4}{\|x - a\|^2} \\ &= \|a\|^2 + \frac{r^2}{\|x - a\|^2}(2(a \cdot (x - a)) + r^2). \end{aligned}$$

Даљим алгебарским сређивањем користећи (47) добијамо:

$$\begin{aligned} \|\psi(x)\|^2 - 1 &= (\|a\|^2 - 1) + \frac{r^2}{\|x - a\|^2}(2(a \cdot (x - a)) + \|a\|^2 - 1) \\ &= r^2 + \frac{r^2}{\|x - a\|^2}(2(a \cdot (x - a)) + \|a\|^2 - 1) \\ &= \frac{r^2}{\|x - a\|^2}(\|x - a\|^2 + 2(a \cdot (x - a)) + \|a\|^2 - 1). \end{aligned}$$

Како за прва три члана у загради важи алгебарски идентитет $\|x - a\|^2 + 2(a \cdot (x - a)) + \|a\|^2 = \|(x - a) + a\|^2 = \|x\|^2$, долазимо до кључне једначине:

$$\|\psi(x)\|^2 - 1 = \frac{r^2}{\|x - a\|^2}(\|x\|^2 - 1). \quad (49)$$

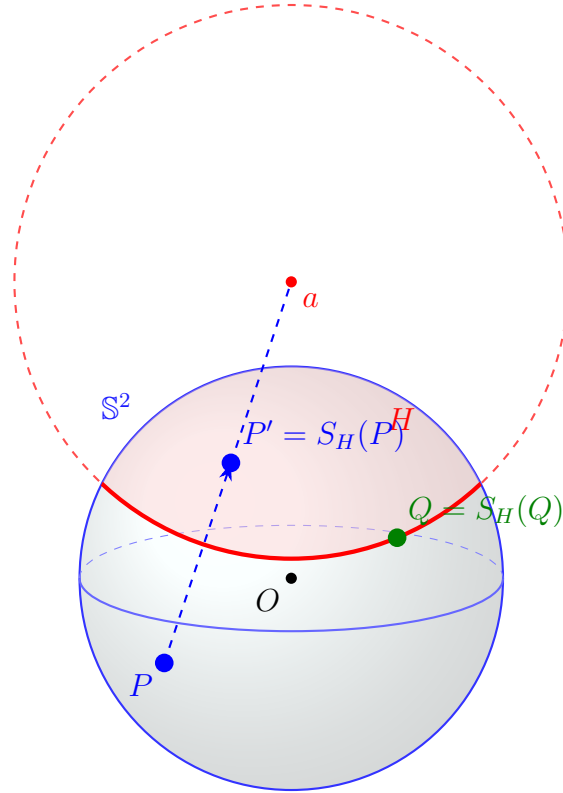
Будући да су r^2 и $\|x - a\|^2$ строго позитивне величине, знак леве стране једначине (49) директно зависи од знака израза $\|x\|^2 - 1$. За тачке из унутрашњости лопте важи $\|x\| < 1$, па је $\|x\|^2 - 1 < 0$. Из (49) тада следи да је $\|\psi(x)\|^2 - 1 < 0$, односно $\|\psi(x)\| < 1$. Овим смо доказали да је $\psi(\mathbb{B}^3) \subseteq \mathbb{B}^3$. Како је инверзија инволуција (сама себи је инверзно пресликавање, $\psi = \psi^{-1}$), из ове инклузије аутоматски следи и једнакост $\psi(\mathbb{B}^3) = \mathbb{B}^3$.

Смер ($\Leftarrow$): Обратно, претпоставимо да инверзија ψ у односу на сферу $\Sigma_0 = S(a, r)$ чува хиперболички простор, односно $\psi(\mathbb{B}^3) = \mathbb{B}^3$. Пошто ψ слика ограничену лопту у саму себе, центар инверзије a (који је једина тачка која се слика у бесконачност) не може припадати ни унутрашњости лопте ни њеној граници, јер би у супротном слика $\psi(\mathbb{B}^3)$ била неограничена. Дакле, $a \notin \overline{\mathbb{B}^3}$.

Пошто се центар инверзије налази строго ван затворене лопте $\overline{\mathbb{B}^3}$, пресликавање ψ нема тачака прекида на овом скупу, већ је свуда добро дефинисано и непрекидно. Како је инверзија истовремено и бијекција (јер је $\psi = \psi^{-1}$), следи да је ψ хомеоморфизам на затвореној лопти $\overline{\mathbb{B}^3}$. Из опште топологије је познато да хомеоморфизам нужно пресликава тополошку унутрашњост у унутрашњост, а тополошку границу у тополошку границу.

Граница лопте $\mathbb{B}^3$ је управо апсолута $\mathbb{S}^2$, па директно следи да важи $\psi(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2$ (као скуп тачака). Из инверзивне геометрије [1] је познато да инверзија пресликава произвољну сферу саму на себе ако и само ако је та сфера ортогонална на сферу инверзије. Како ψ чува апсолуту, следи да је сфера Σ_0 ортогонална на $\mathbb{S}^2$. Као директна последица те ортогоналности, центар сфере инверзије a , центар апсолуте и било која тачка њиховог пресека $T \in \mathbb{S}^2$ чине правоугли троугао. Применом Питагорине теореме на тај троугао добијамо услов $r^2 + 1^2 = \|a\|^2$, чиме се враћамо на релацију (47). $\square$

Дефиниција 3.2. *Н-рефлексја* S_H модела $\mathbb{B}^3$ је рестрикција на $\mathbb{B}^3$ инверзије у односу на уопштену сферу Σ_0 ортогоналној на апсолуту (укључујући, као гранични случај, рефлексiju у равни кроз O). Н-раван $H = \Sigma_0 \cap \mathbb{B}^3$ је скуп фиксних тачака *h*-рефлексје S_H и зовемо је *основом* *h*-рефлексје (Слика 3.1). Тамо где не може доћи до забуне, *h*-рефлексiju краће означавамо са S , а припадну инверзију простора са ψ , тако да је $S = \psi|_{\mathbb{B}^3}$.



Слика 3.1: Графички приказ h -рефлексије S_H у Поенкареовом моделу лопте $\mathbb{B}^3$. Основа рефлексије је h -раван H (црвени сферични део у горњем делу лопте), чија је уопштена сфера Σ_0 приказана испрекиданом линијом у спољашњости ради наглашавања услова ортогоналности на апсолуту $\mathbb{S}^2$. Тачка P се пресликава у слику $P' = S_H(P)$ дуж праве која пролази кроз еуклидски центар инверзије a , док је Q фиксна тачка на равни H .

Аналитички, h -рефлексију $S_H : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}^3$ у односу на h -раван H описујемо у зависности од геометријског карактера њене граничне уопштене сфере:

1. **Случај када је h -раван сфера ортогонална на апсолуту:** Ако је h -раван део сфере са еуклидским центром $a \in \mathbb{E}^3$ ($a \notin \mathbb{B}^3$) и полупречником $r = \sqrt{\|a\|^2 - 1}$, h -рефлексија је рестрикција сферне инверзије:

$$S_H(x) = a + \frac{\|a\|^2 - 1}{\|x - a\|^2}(x - a), \quad x \in \mathbb{B}^3. \quad (50)$$

2. **Случај када је h -раван еуклидска раван кроз координатни почетак:** Ако h -раван лежи на еуклидској равни са јединичним вектором нормале $u \in \mathbb{S}^2$ која пролази кроз центар лопте $O(0,0,0)$, тада је h -рефлексија заправо стандардна еуклидска рефлексија у односу на ту

раван:

$$S_H(x) = x - 2(x \cdot u)u = (I - 2uu^T)x, \quad x \in \mathbb{B}^3 \quad (51)$$

где је I јединична матрица реда 3, а u^T је транспоновани вектор u записан као врста.

У складу са концептом уопштених сфера из инверзивне геометрије [4], еуклидске равни се могу посматрати као сфере бесконачно великог полупречника са центром у бесконачности. То омогућава обједињен третман формула (50) и (51), те се обе врсте h -рефлексија аналитички понашају као конформна пресликавања која сликају унутрашњост лопте $\mathbb{B}^3$ на саму себе, чувајући притом ортогоналност геометријских објеката у односу на апсолуту $\mathbb{S}^2$.

Дефиниција 3.3. Композиција коначног броја h -рефлексија је *h -изометрија* модела $\mathbb{B}^3$. H -изометрија је *директна* ако је композиција парног броја h -рефлексија, а *индиректна* ако је непарног. Скуп свих h -изометрија означавамо са $I(\mathbb{B}^3)$.

Теорема 3.4. Скуп свих h -изометрија $I(\mathbb{B}^3)$ чини групу у односу на операцију композиције пресликавања.

Доказ. По дефиницији, свака h -изометрија је коначна композиција h -рефлексија. Нека су $f, g \in I(\mathbb{B}^3)$ произвољне h -изометрије. Њихова композиција $f \circ g$ је поново коначна композиција h -рефлексија, што значи да је скуп $I(\mathbb{B}^3)$ затворен у односу на ову операцију.

Асоцијативност операције следи директно из опште асоцијативности композиције пресликавања. Даље, за сваку h -рефлексију S важи да је она инволуција ($S \circ S = id$). Како се идентичко пресликавање id може представити као композиција две исте h -рефлексије, оно по дефиницији припада скупу $I(\mathbb{B}^3)$ као неутрални елемент.

На крају, нека је h -изометрија дата као $f = S_1 \circ S_2 \circ \dots \circ S_k$, где су S_i појединачне h -рефлексије. Како је свака од њих инволуција ($S_i^{-1} = S_i$), инверзно пресликавање је $f^{-1} = S_k \circ \dots \circ S_2 \circ S_1$. Ово је такође коначна композиција h -рефлексија, па $f^{-1} \in I(\mathbb{B}^3)$. Тиме су испуњена сва четири услова из дефиниције групе (затвореност, асоцијативност, постојање неутралног и инверзног елемента), те $I(\mathbb{B}^3)$ чини групу. $\square$

Тврђење 3.5. *Свака h -изометрија чува геометријску структуру хиперболичног простора $\mathbb{B}^3$. Прецизније:*

- пресликава h -праве у h -праве, чувајући колинеарност и редослед тачака;
- чува величину углова (конформност);
- чува међусобне положаје h -правих (конкурентност, паралелност и хиперпаралелност).

Доказ. Својства следе директно из чињенице да је свака h -изометрија, по дефиницији, коначна композиција h -рефлексија, које у еуклидском смислу представљају инверзије у односу на уопштене сфере (односно, инверзије у односу на стандардне сфере или рефлексије у односу на равни).

Из инверзивне геометрије је познато да су пресликавања у односу на уопштене сфере конформна (чувају углове) и да пресликавају уопштене сфере у уопштене сфере. Како су h -праве у овом моделу кружни лукови (као пресеци уопштених сфера) ортогонални на апсолуту, њихова слика ће при овим пресликавањима, због конформности, поново бити кружни лук ортогоналан на апсолуту — односно нова h -права. Будући да композиција оваквих пресликавања чува поменута својства, овим је уједно показано и очување колинеарности.

Како су ова пресликавања бијективна и непрекидна (хомеоморфизми), она чувају тополошка својства правих, укључујући и Хилбертове аксиоме реда тачака. Коначно, очување међусобног положаја h -правих (сечење у $\mathbb{B}^3$, сечење на S^2 или хиперпаралелност) директна је последица очувања инциденције тачака у унутрашњости и на граници модела. $\square$

3.2 Мебијусове трансформације проширеног простора

Пре него што дефинишемо везу између хиперболичких изометрија и Мебијусових трансформација, неопходно је формално увести овај појам у контексту тродимензионалног простора. Нека је $\widehat{\mathbb{E}}^3 = \mathbb{E}^3 \cup \{\infty\}$ проширени еуклидски простор.

Подсетимо се да под *уопшћеном сфером* у $\widehat{\mathbb{E}}^3$ подразумевамо или стандардну сферу у $\mathbb{E}^3$ или еуклидску раван којој је додата тачка у бесконачности.

Сходно томе, *инверзија у односу на уопштјену сферу* је стандардна инверзија (уколико је реч о сфери) или ортогонална рефлексја (уколико је реч о равни).

Дефиниција 3.6. *Мебијусова трансформација простора $\mathbb{E}^3$ је свако пресликавање $\varphi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ које се може представити као коначна композиција инверзија у односу на уопштјене сфере. Скуп свих оваквих трансформација чини групу у односу на композицију пресликавања, коју означавамо са $M(\mathbb{E}^3)$.*

Мебијусове трансформације имају два суштинска геометријска својства која их чине природним алатом за проучавање Поенкареовог модела лопте. Ова својства наводимо у следећем тврђењу.

Тврђење 3.7. *Свака Мебијусова трансформација простора $\mathbb{E}^3$ има следећа својства:*

1. *пресликава уопштјене сфере у уопштјене сфере;*
2. *конформна је, односно чува величину углова између кривих.*

Теорема 3.8 (Лиувилова теорема о конформним пресликавањима). *Нека је $n \geq 3$ и нека је $U \subseteq \mathbb{E}^n$ отворен и повезан скуп. Ако је пресликавање $f : U \rightarrow \mathbb{E}^n$ довољно глатко (класе C^3) и конформно (чува углове), тада је f рескрипција неке Мебијусове трансформације простора $\mathbb{E}^n$.*

Напомена 3.9. Ова теорема истиче суштинску разлику између двoдимензионалне и вишeдимензионалне геометрије. У две димензије, односно у проширеној комплексној равни $\mathbb{E}^2 \cong \hat{\mathbb{C}}$, простор конформних пресликавања је бесконачно димензионалан, јер свака холоморфна функција са изводом различитим од нуле чува углове.

Међутим, за $n \geq 3$ простор постаје геометријски „крут“ (енгл. *rigid*) — према Лиувиловој теорем, не постоје никаква сложена конформна пресликавања осим оних најелементарнијих (транслација, ортогоналних трансформација, хомотетија и инверзија). Композиције ових основних трансформација чине управо групу Мебијусових трансформација. Наведена геометријска крутост пружа теоријско оправдање зашто се група изометрија Поенкареове лопте $\mathbb{B}^3$ у потпуности своди на Мебијусове трансформације.

Доказ ове класичне теореме излази из оквира овог рада, а за детаљно извођење читалац се упућује на [6].

3.3 Група изометрија као група Мебијусових трансформација

Дефиниција 3.10. *Мебијусова трансформација лопте $\mathbb{B}^3$ је свака Мебијусова трансформација проширеног еуклидског простора $\varphi \in M(\widehat{\mathbb{E}^3})$ која оставља лопту $\mathbb{B}^3$ инваријантном, односно за коју важи $\varphi(\mathbb{B}^3) = \mathbb{B}^3$. Скуп свих оваквих трансформација чини групу у односу на операцију композиције пресликавања. Ову групу означавамо са $M(\mathbb{B}^3)$.*

Теорема 3.11. *Група h -изометрија поклапа се са групом Мебијусових трансформација лопте, односно важи $I(\mathbb{B}^3) = M(\mathbb{B}^3)$.*

Доказ. Према Теорему 3.1, свака h -рефлексија чува лопту $\mathbb{B}^3$ и представља Мебијусову трансформацију. Како су h -изометрије, по дефиницији, композиције h -рефлексија, оне такође чувају $\mathbb{B}^3$ и припадају групи Мебијусових трансформација. Одатле директно следи инклузија $I(\mathbb{B}^3) \subseteq M(\mathbb{B}^3)$.

Да бисмо доказали обрнуту инклузију, нека је $\varphi \in M(\mathbb{B}^3)$ произвољна Мебијусова трансформација лопте. Разликујемо два случаја:

Случај 1: Пресликавање фиксира бесконачност ($\varphi(\infty) = \infty$).

Како φ чува апсолуту $\mathbb{S}^2$, она мора да чува и парове тачака које су инверзне у односу на ту сферу. Пошто су координатни почетак 0 и бесконачно далека тачка ∞ инверзне тачке у односу на $\mathbb{S}^2$, из услова $\varphi(\infty) = \infty$ нужно следи да је $\varphi(0) = 0$. Познато је да свака Мебијусова трансформација простора која фиксира бесконачност представља сличност. Како φ притом фиксира и координатни почетак, она је облика $x \mapsto \lambda Ax$, где је $\lambda > 0$ коефицијент хомотетије, а A ортогонална трансформација. Међутим, пошто φ чува јединичну сферу, хомотетија мора бити тривијална ($\lambda = 1$). Дакле, φ се своди на ортогоналну трансформацију простора $\mathbb{E}^3$ [1, Теорема 4.4.8]. Према Картан--Диједонеовој теорему (Теорема 1.4), свака ортогонална трансформација у $\mathbb{E}^3$ је композиција највише три рефлексије у равнима кроз координатни почетак. Како су те рефлексије уједно и h -рефлексије, закључујемо да је φ h -изометрија, односно $\varphi \in I(\mathbb{B}^3)$.

Случај 2: Пресликавање не фиксира бесконачност ($\varphi(\infty) \neq \infty$).

Нека је $a = \varphi^{-1}(\infty)$. Како φ чува јединичну лопту $\mathbb{B}^3$, она бијективно пресликава и њену спољашњост на саму себе. С обзиром на то да ∞ припада

спољашњости, њена инверзна слика a такође мора бити изван затворене лопте, што значи да је $\|a\| > 1$.

Због тога можемо конструисати сферу $S(a, r)$ чији је полупречник $r = \sqrt{\|a\|^2 - 1}$. Нека је ψ инверзија у односу на ту сферу. Према Теорему 3.1, сфера $S(a, r)$ је ортогонална на апсолуту, па је ψ заправо h -рефлексија. С обзиром на то да инверзија ψ слика бесконачност у свој центар ($\psi(\infty) = a$), за композицију $\varphi\psi$ важи:

$$(\varphi\psi)(\infty) = \varphi(\psi(\infty)) = \varphi(a) = \infty.$$

Ово значи да је $\varphi\psi$ Мебијусова трансформација лопте која фиксира бесконачност. На основу првог случаја, она представља ортогоналну трансформацију, коју ћемо означити са σ . Из једнакости $\varphi\psi = \sigma$, множењем са десне стране са ψ (имајући у виду да је инверзија инволуција, па важи $\psi^{-1} = \psi$), добијамо $\varphi = \sigma\psi$. Како је σ h -изометрија (као ортогонална трансформација), а ψ h -рефлексија, њихова композиција φ је такође h -изометрија [1, Теорема 4.4.7].

Тиме је показано да важи и $M(\mathbb{B}^3) \subseteq I(\mathbb{B}^3)$, чиме су обе инклузије доказане. $\square$

3.4 Веза са Мебијусовим трансформацијама сфере и равни

Граница (апсолута) Поенкареове лопте $\mathbb{B}^3$ је јединична сфера $\mathbb{S}^2$. Пре него што успоставимо везу између изометрија лопте и трансформација њене границе, формално уводимо појам пресликавања на самој апсолути.

Дефиниција 3.12. *Мебијусова трансформација апсолуте* је конформно бијективно пресликавање сфере $\mathbb{S}^2$ на саму себе које је генерисано коначним композицијама инверзија у односу на кругове на $\mathbb{S}^2$. Групу свих Мебијусових трансформација апсолуте означавамо са $M(\mathbb{S}^2)$.

Свака инверзија у односу на круг на апсолути $\mathbb{S}^2$ може се посматрати као рестрикција инверзије у односу на уопштену сферу у $\widehat{\mathbb{E}}^3$ која је ортогонална на $\mathbb{S}^2$. Захваљујући овом геометријском својству, постоји директна кореспонденција између трансформација на граници и трансформација целог простора.

Група $M(\mathbb{B}^3)$ је природно повезана са овим Мебијусовим трансформацијама апсолуте. За сваку Мебијусову трансформацију φ апсолуте $\mathbb{S}^2$ (односно

$\varphi \in M(\mathbb{S}^2)$) постоји јединствена Мебијусова трансформација простора $\widehat{\mathbb{E}}^3$ која представља њено проширење и истовремено чува лопту $\mathbb{B}^3$. Ово јединствено пресликавање називамо *Поенкареовим проширењем* трансформације φ .

Теорема 3.13 ([1, Теорема 4.4.5, Последица 3]). *Мебијусова трансформација простора $\widehat{\mathbb{E}}^3$ чува лопту $\mathbb{B}^3$ ако и само ако је она Поенкареово проширење неке Мебијусове трансформације апсолутне $\mathbb{S}^2$. Последично, важи изоморфизам група:*

$$M(\mathbb{B}^3) \cong M(\mathbb{S}^2).$$

Посредством стереографске пројекције $\pi : \widehat{\mathbb{E}}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ (Глава 1.3), Мебијусове трансформације сфере могу се идентификовати са Мебијусовим трансформацијама проширене равни. Прецизније, пресликавање $\phi \mapsto \pi\phi\pi^{-1}$ представља изоморфизам група $M(\widehat{\mathbb{E}}^2) \rightarrow M(\mathbb{S}^2)$. Комбиновањем ове чињенице са Теоремама 3.13 и 3.11, добијамо кључни ланац изоморфизама (Слика 3.2):

$$I(\mathbb{B}^3) = M(\mathbb{B}^3) \cong M(\mathbb{S}^2) \cong M(\widehat{\mathbb{E}}^2). \quad (52)$$

Овај низ изоморфизама представља суштину везе коју је истакао Поенкаре ([1, стр. 119]): *група хиперболичких изометрија простора $\mathbb{B}^3$ изоморфна је групи Мебијусових трансформација проширене равни $\widehat{\mathbb{E}}^2$ (односно сфере $\mathbb{S}^2$).*

Како се група $M(\widehat{\mathbb{E}}^2)$ може идентификовати са групом хомографија и антихомографија проширене комплексне равни $\hat{\mathbb{C}}$, подгрупа директних изометрија (оних које чувају оријентацију) изоморфна је пројективној специјалној линеарној групи $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Ради поређења, у дводимензионалној хиперболичкој геометрији, директне изометрије Поенкареовог диска описују се хомографијама облика $z \mapsto \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$, где је $|b| < |a|$ ([4, Теорема 35]). У три димензије, ослањајући се на алгебру кватерниона $w = z + tj$, Поенкареово проширење хомографије $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ добија елегантан облик $\tilde{\phi}(w) = (aw+b)(cw+d)^{-1}$ ([3], [1, Вежба 4.4]). Овај кватернионски запис се примарно користи за рачунање у хиперболичком моделу горњег полупростора ($\mathbb{U}^3$), који је изометричан моделу лопте (више детаља о овом моделу биће дато касније, у поглављу 5.3)

$$\begin{array}{ccc}
M(\mathbb{B}^3) & \xrightarrow{\cong \text{ (Поенкареово проширење)}} & M(S^2) \\
= \downarrow & & \downarrow \cong \text{ (преко } \pi) \\
I(\mathbb{B}^3) & & M(\widehat{\mathbb{E}}^2)
\end{array}$$

Слика 3.2: Ланац изоморфизама који повезује изометрије лопте, Мебијусове трансформације апсолуте и Мебијусове трансформације проширене равни (види (52)).

3.5 Структура изометрија, h -симетрала

Из конструктивног доказа Теореме 3.11 директно следи структура сваке h -изометрије.

Последица 3.14. Нека је $\varphi \in I(\mathbb{B}^3)$. Ако φ фиксира координатни почетак O , онда је φ рестрикција неке ортогоналне трансформације простора $\mathbb{E}^3$. У суштини, φ се може разложити као $\varphi = \psi\sigma$, где је σ h -рефлексija чија је основа сфера $S(a, r)$ одређена са $a = \varphi^{-1}(\infty)$ (при чему се φ посматра као њено Поенкареово проширење на $\widehat{\mathbb{E}}^3$) и $r^2 = \|a\|^2 - 1$, док је ψ ортогонална трансформација.

Следеће тврђење представља геометријски основ за увођење појма h -симетрала и за даље разлагање изометрија. Ово тврђење уједно уопштава аналогни резултат из дводимензионалне хиперболичке геометрије [4, Тврђење 36].

Тврђење 3.15. За сваку h -тачку $A \neq O$ постоји јединствена h -рефлексija која слика A у O . Њена основа је сфера са центром $c = A/\|A\|^2$ и полупречником ρ за који важи $\rho^2 = \|c\|^2 - 1 = (1 - \|A\|^2)/\|A\|^2$.

Доказ. Свака h -рефлексija је рестрикција инверзије σ у некој сфери $S(c, \rho)$ ортогоналној на апсолуту, што значи да мора важити $\rho^2 = \|c\|^2 - 1$. Како је σ инволуција, услов $\sigma(A) = O$ је еквивалентан услову $\sigma(O) = A$.

Применом дефиниције инверзије на координатни почетак добијамо:

$$\sigma(O) = c + \rho^2 \frac{-c}{\|c\|^2} = c \left(1 - \frac{\|c\|^2 - 1}{\|c\|^2} \right) = \frac{c}{\|c\|^2}.$$

Изједначавањем овог израза са A , следи $\frac{c}{\|c\|^2} = A$. Пошто су тачке c и A колинеарне, њихове норме задовољавају $\|c\| = 1/\|A\|$, одакле директно произилази $c = A/\|A\|^2$ (односно, c је инверзна тачка тачке A у односу на апсолуту).

Овим је центар c једнозначно одређен, а самим тим и полупречник ρ , чиме је доказана јединственост h -рефлексије. Како је $A \in \mathbb{B}^3$, важи $\|A\| < 1$, што повлачи $\|c\| > 1$ и $\rho^2 > 0$, чиме је потврђено да оваква сфера заиста постоји и да није дегенерисана. $\square$

Тврђење 3.16. *За сваке две различите h -тачке A и B постоји јединствена h -рефлексија S таква да је $S(A) = B$. Њена основа назива се h -симетрала дужи AB и представља скуп свих h -тачака које су једнако хиперболички удаљене од A и B .*

Доказ. Егзистенција. Разликујемо два случаја у зависности од еуклидских норми тачака A и B :

Случај 1 ($\|A\| = \|B\|$): Тражена h -рефлексија је заправо рестрикција еуклидске рефлексије у равни која пролази кроз координатни почетак O и нормална је на вектор $A - B$. Једначина ове равни је једноставно $\langle A - B, x \rangle = 0$.

Случај 2 ($\|A\| \neq \|B\|$): Нека је $\delta = \|A\|^2 - \|B\|^2 \neq 0$. Посматрајмо тачку c дефинисану као:

$$c = \frac{(1 - \|B\|^2)A - (1 - \|A\|^2)B}{\delta}.$$

Ова тачка је афина комбинација тачака A и B , што значи да лежи на правој одређеној овим двема тачкама. Директним алгебарским сређивањем добијамо векторе:

$$A - c = \frac{\|A\|^2 - 1}{\delta}(A - B), \quad B - c = \frac{1 - \|B\|^2}{\delta}(B - A).$$

Из ових релација видимо да се тачке A и B налазе на истој полуправој са почетком у тачки c . Производ њихових еуклидских растојања од c износи:

$$\|A - c\| \|B - c\| = \frac{(1 - \|A\|^2)(1 - \|B\|^2)}{\delta^2} \|A - B\|^2.$$

Дефинишимо сферу $S(c, \rho)$ тако да је ρ^2 једнако управо овом производу. Не посредном провером показује се да важи $\rho^2 = \|c\|^2 - 1$, што значи да је сфера $S(c, \rho)$ ортогонална на апсолуту. Инверзија σ у односу на ову сферу је стога h -рефлексија. Како је $\sigma(A) = c + \rho^2 \frac{A - c}{\|A - c\|^2}$ и како важи $\|A - c\| = \frac{1 - \|A\|^2}{|\delta|} \|A - B\|$,

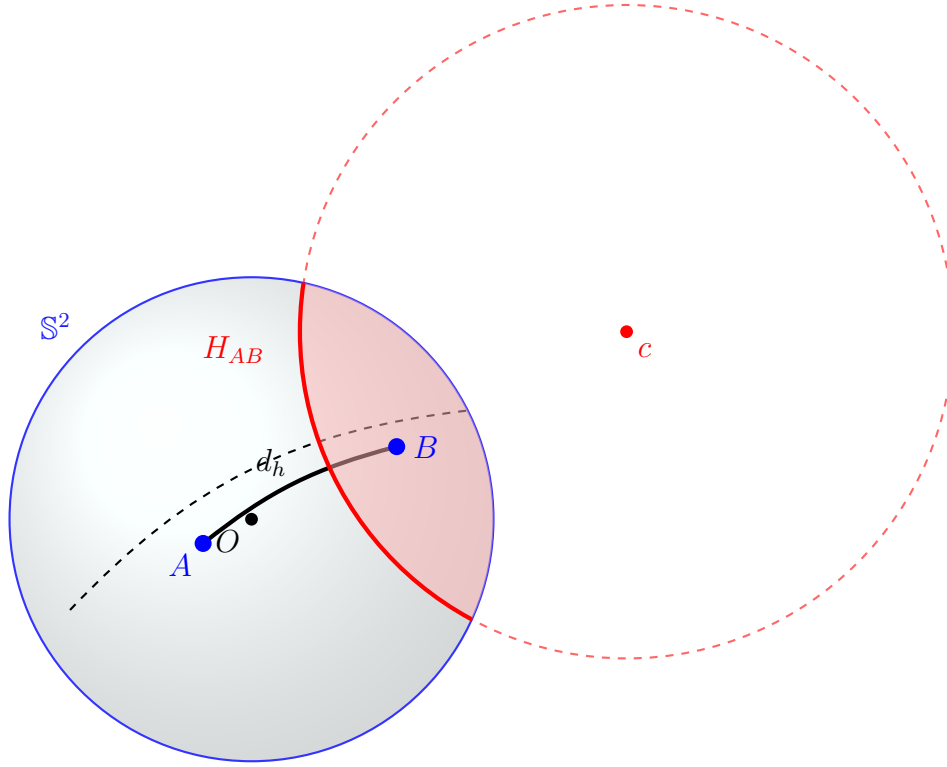
уврштавањем се лако добија $\sigma(A) = B$. Рестрикција ове инверзије на $\mathbb{B}^3$, означена са $S = \sigma|_{\mathbb{B}^3}$, јесте тражена h -рефлексија.

Јединственост. Нека је S произвољна h -рефлексија за коју важи $S(A) = B$, и нека је H њена основа. За сваку h -тачку $p \in H$ важи $S(p) = p$. Пошто h -рефлексије чувају хиперболично растојање $d_{\mathbb{B}^3}$, следи:

$$d_{\mathbb{B}^3}(p, A) = d_{\mathbb{B}^3}(S(p), S(A)) = d_{\mathbb{B}^3}(p, B).$$

Ово значи да је основа H садржана у скупу свих тачака које су једнако хиперболички удаљене од A и B . Како је тај скуп h -раван (h -симетрала), а свака h -рефлексија је једнозначно одређена својом основом, закључујемо да је S јединствена. $\square$

Напомена 3.17. У доказу јединствености у Тврђењу 3.16 користили смо чињеницу да h -рефлексије чувају хиперболично растојање. Ова особина је независно показана у Глави 4 (Секција 4.3), где је изведено да Мебијусове трансформације лопте чувају инфинитезималну Риманову метрику ds . Како су h -рефлексије елементи ове групе пресликавања, оне нужно чувају и хиперболично растојање. Овим приступом потпуно је избегнута било каква логичка кружност између геометријских својстава изометрија и дефиниције метрике.



Слика 3.3: Хиперболичка симетрала (h-симетрала) дужи AB у Поенкареовом моделу. За две тачке A и B које леже на различитим еуклидским растојањима од координатног почетка O , њихова h-симетрала H_{AB} (црвено) није еуклидска равна, већ део еуклидске сфере $S(c, \rho)$ која је ортогонална на апсолуту. Инверзија у односу на ову сферу представља јединствену h-рефлексију која слика тачку A у B .

3.6 Разлагање изометрија на h-рефлексије

Теорема 3.18. *Свака h-изометрија простора $\mathbb{B}^3$ може се представити као композиција највише четири h-рефлексије.*

Доказ. Идеја овог доказа представља директан хиперболички аналог конструктивног алгоритма за разлагање еуклидских изометрија. Нека је $\varphi \in I(\mathbb{B}^3)$ произволна h-изометрија. Проблем сводимо на фиксирање координатног почетка у два главна корака.

Корак 1 (Враћање у координатни почетак):

Нека је $B = \varphi(O)$. Уколико је $B = O$, овај корак прескачемо (односно, узимамо да је прво пресликавање идентитет, $S = id$). Уколико је $B \neq O$, према

Тврђењу 3.15 постоји јединствена h -рефлексија S која слика тачку B у O , односно $S(B) = O$. Дефинишимо композицију $\varphi_1 = S \circ \varphi$. Деловањем овог пресликавања на координатни почетак добијамо:

$$\varphi_1(O) = S(\varphi(O)) = S(B) = O.$$

Дакле, φ_1 је h -изометрија која фиксира координатни почетак.

Корак 2 (Разлагање преосталог пресликавања):

Како φ_1 фиксира O , према Последици 3.14 она представља рестрикцију ортогоналне трансформације простора $\mathbb{E}^3$. Као што смо већ аналитички доказали приликом разлагања изометрија у еуклидском простору (Кораци 2, 3 и 4 Теореме 1.4), свака ортогонална трансформација у $\mathbb{E}^3$ може се представити као композиција највише три рефлексије у равнима кроз координатни почетак. Како су ове равни заправо уопштене сфере ортогоналне на апсолуту, те еуклидске рефлексије су уједно и h -рефлексије. Следи да важи:

$$\varphi_1 = S_1 \circ S_2 \circ S_3,$$

где су S_1, S_2, S_3 неке h -рефлексије (од којих неке могу бити идентитет).

Закључак:

Имајући у виду да је $\varphi_1 = S \circ \varphi$, множењем ове једначине са леве стране инволуцијом S (чиме користимо особину да је $S^{-1} = S$), добијамо:

$$\varphi = S \circ \varphi_1 = S \circ S_1 \circ S_2 \circ S_3.$$

Тиме је формално доказано да се свака h -изометрија лопте $\mathbb{B}^3$ може представити као композиција од највише четири h -рефлексије. $\square$

Напомена 3.19. Број четири, који тачно одговара вредности $\dim \mathbb{B}^3 + 1$, је сте оптималан. Ово потврђује дубоку структурну везу између еуклидске и хиперболичке геометрије. Ради упоређења, у дводимензионалном случају (h -равни) свака h -изометрија је композиција највише три h -рефлексије, што резултује познатом класификацијом изометрија хиперболичке равни [4, Гл. 7]: идентитет, ротација, транслација, орицикличка ротација, осна рефлексија и клизајућа рефлексија.

Глава 4

Н-растојање и метрика у Поенкареовом моделу лопте

4.1 Дефиниција h -растојања и Риманова метрика

У оквиру савремене диференцијалне геометрије, Поенкареов модел јединичне лопте $\mathbb{B}^3$ служи као канонски оквир за изучавање простора константне негативне кривине. Унутрашњост лопте интерпретирамо као хиперболички простор, док се њена граница, јединична сфера $\mathbb{S}^2$, дефинише као апсолута или скуп бесконачно далеких тачака.

h -растојање уводимо преко дужине кривих, мерене конформним (Римановим) елементом лука.

Дефиниција 4.1. *Хиперболички елемент лука* у тачки $x \in \mathbb{B}^3$ дефинише се као:

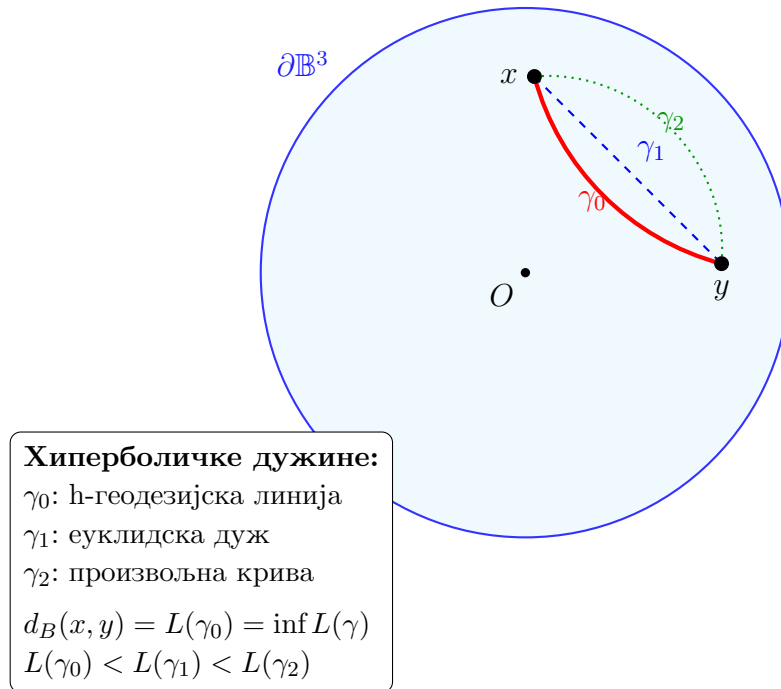
$$ds = \frac{2 \|dx\|}{1 - \|x\|^2}. \quad (53)$$

За део-по-део глатку криву $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{B}^3$, њена h -*дужина* дата је интегралом:

$$L(\gamma) = \int_0^1 \frac{2 \|\gamma'(t)\|}{1 - \|\gamma(t)\|^2} dt,$$

h -*растојање* између тачака $x, y \in \mathbb{B}^3$ представља инфимум дужина свих таквих кривих које их спајају:

$$d_B(x, y) = \inf \{L(\gamma) \mid \gamma \text{ спаја } x \text{ и } y\}.$$



Слика 4.1: Илустрација хиперболичког растојања као инфимума дужина кривих (Дефиниција 4.1). У Поенкареовом моделу, најкраћи пут између тачака x и y (геодезијска линија γ_0 , црвено) представља лук еуклидског круга ортогоналног на апсолуту. Због метрике ds чији именилац $(1 - \|x\|^2)$ тежи нули како се приближавамо граници $\partial\mathbb{B}^3$, криве које пролазе ближе апсолути имају знатно већу хиперболичку дужину. Да би минимизовала растојање, геодезијска линија интуитивно „залази“ дубље према центру лопте O где је метрика мања. Еуклидска дуж γ_1 (плаво), иако визуелно најкраћа у еуклидском смислу, пролази ближе апсолути, због чега је њена хиперболичка дужина строго већа од дужине криве γ_0 .

Тврђење 4.2. Функција d_B представља метрику на простору $\mathbb{B}^3$.

Доказ. Да би d_B била метрика, неопходно је да задовољава аксиоме симетричности, неједнакости троугла и позитивне дефинитности.

Симетричност: $d_B(x, y) = d_B(y, x)$ и неједнакост троугла: $d_B(x, z) \leq d_B(x, y) + d_B(y, z)$ директно следе из дефиниције растојања преко инфимума дужина кривих (надовезивањем кривих). Ненегативност: $d_B(x, y) \geq 0$ је тривијална јер је подинтегрална функција дужине лука увек позитивна.

Остаје да се покаже строга позитивност. Како се цела крива γ налази унутар јединичне лопте, за свако t важи $\|\gamma(t)\| < 1$, из чега следи да је $1 - \|\gamma(t)\|^2 \leq 1$. Због тога, за хиперболичку дужину било које криве γ која

спаја тачке x и y важи:

$$L(\gamma) = \int_0^1 \frac{2 \|\gamma'(t)\|}{1 - \|\gamma(t)\|^2} dt \geq \int_0^1 2 \|\gamma'(t)\| dt \geq 2 \|x - y\|.$$

Како је за $x \neq y$ еуклидско растојање $\|x - y\| > 0$, хиперболичка дужина је стриктно омеђена одоздо позитивном константом, па је $d_B(x, y) \geq 2 \|x - y\| > 0$. Овиме је доказ употпуњен. $\square$

4.2 Мебијусове трансформације и тачкаста инваријанта

Стратешка важност Мебијусових трансформација унутар овог модела произилази из чињенице да оне чине пуну групу изометрија $I(\mathbb{B}^3)$. Да бисмо ригорозно приступили метричкој анализи, уводимо помоћну величину и канонско пресликавање.

Дефиниција 4.3 (Тачкаста инваријанта). Нека је $x^* = \frac{x}{\|x\|^2}$ инверзија тачке x у односу на јединичну сферу. Тачкаста инваријанта $[x, a]$ за тачке $x, a \in \mathbb{B}^3$ дефинише се као:

$$[x, a] = \|x\| \|a - x^*\| = \|a\| \|x - a^*\| = \sqrt{1 - 2\langle x, a \rangle + \|x\|^2 \|a\|^2}. \quad (54)$$

Коришћењем еуклидске геометрије, за квадрат тачкасте инваријанте важи кључни идентитет:

$$[x, a]^2 = \|x - a\|^2 + (1 - \|x\|^2)(1 - \|a\|^2). \quad (55)$$

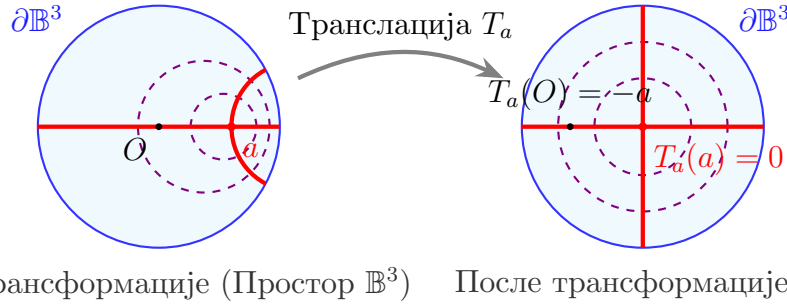
Дефиниција 4.4 (Канонско Мебијусово пресликавање). За сваку тачку $a \in \mathbb{B}^3$, канонско Мебијусово пресликавање (транслација) $T_a \in I(\mathbb{B}^3)$, које слика тачку a у координатни почетак, дато је изразом:

$$T_a(x) = \frac{(1 - \|a\|^2)(x - a) - \|x - a\|^2 a}{[x, a]^2}. \quad (56)$$

Према Алфорсу, за ову трансформацију важе два фундаментална идентитета која повезују еуклидске норме са тачкастом инваријантом:

$$\|T_a(x)\| = \frac{\|x - a\|}{[x, a]}, \quad (57)$$

$$1 - \|T_a(x)\|^2 = \frac{(1 - \|x\|^2)(1 - \|a\|^2)}{[x, a]^2}. \quad (58)$$



Слика 4.2: Геометријска илустрација канонске Мебијусове транслације T_a у Поенкареовом моделу. Ова изометрија делује као хиперболички помак који произвољну тачку a пресликава у координатни почетак, док се стари координатни почетак O слика у тачку $-a$. Најважније геометријско својство ове трансформације је да се све хиперболичке праве које се секу у тачки a (црвене линије лево) „исправљају“ у ортогоналне еуклидске пречнике (црвене линије десно). Такође, хиперболичке кружнице концентричне око тачке a (љубичасто испрекидано лево), које су у еуклидском смислу асиметричне због деформације метрике у близини апсолуте, пресликавају се у савршене концентричне еуклидске кругове. Ова визуелизација директно оправдава зашто се у Секцији 4.3 алгебарски рачун растојања драстично поједностављује када се примени Мебијусова изометрија која фиксира једну тачку у координатни почетак.

4.3 Извођење глобалне аналитичке формуле: Три приступа

Прелазак на аналитички рачун захтева да се апстрактно хиперболичко растојање $d_B(x, y)$ експлицитно представи помоћу еуклидских координата, што нас доводи до затворене аналитичке форме. У наставку ригорозно доказујемо ову фундаменталну везу, водећи извођење кроз три потпуно различита математичка оквира.

Први приступ: Диференцијално-интегрални (Риманов) метод

Овај приступ се ослања на интеграцију метрике дуж најкраће путање. Прво доказујемо да Мебијусова транслација чува инфинитезималну метрику. Диференцијални фактор скалирања износи $\|T'_a(x)\| = \frac{1-\|a\|^2}{\|x-a\|^2}$ [3]. Увођењем смене $y = T_a(x)$, диференцијал слике је $\|dy\| = \|T'_a(x)\| \|dx\|$.

Израчунавањем метрике у тачки y преко Алфорсовог идентитета (58), имамо:

$$ds_y = \frac{2 \|dy\|}{1 - \|y\|^2} = \frac{2 \frac{1-\|a\|^2}{[x,a]^2} \|dx\|}{\frac{(1-\|x\|^2)(1-\|a\|^2)}{[x,a]^2}} = \frac{2 \|dx\|}{1 - \|x\|^2} = ds_x. \quad (59)$$

Тиме је доказано да је T_a изометрија. Стога проблем сводимо на рачунање растојања од координатног почетка: $d_B(x, y) = d_B(0, T_x(y))$.

Ако параметризујемо радијални пут као $\gamma(t) = t$, за $t \in [0, r]$, где је $r = \|T_x(y)\|$, интеграл износи:

$$d_B(0, r) = \int_0^r \frac{2}{1-t^2} dt = 2 \operatorname{artanh}(r). \quad (60)$$

Отуда следи:

$$d_B(x, y) = 2 \operatorname{artanh}(\|T_x(y)\|). \quad (61)$$

Да бисмо прешли у arcosh формулу, користимо хиперболички идентитет $2 \operatorname{artanh}(z) = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{2z^2}{1-z^2}\right)$ за $z = \|T_x(y)\|$. Користећи Алфорсове идентитете (57) и (58), израчунавамо разломак унутар аргумента:

$$\frac{2 \|T_x(y)\|^2}{1 - \|T_x(y)\|^2} = \frac{2 \frac{\|x-y\|^2}{[x,y]^2}}{\frac{(1-\|x\|^2)(1-\|y\|^2)}{[x,y]^2}} = \frac{2 \|x-y\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}. \quad (62)$$

Скраћивањем тачкасте инваријанте $[x, y]^2$, Риманов интегрални приступ директно резултује финалном једначином:

$$d_B(x, y) = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{2 \|x-y\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}\right). \quad (63)$$

Други приступ: Пројективни метод (преко дворазмере)

Овај приступ дефинише растојање преко идеалних тачака на апсолути $\mathbb{S}^2$. Нека h -права кроз x и y сече апсолуту у тачкама y^* и x^* . Растојање је дефинисано као логаритам пројективне дворазмере:

$$d_B(x, y) = \ln[y, x; y^*, x^*] = \ln\left(\frac{\|y - y^*\| \cdot \|x - x^*\|}{\|y - x^*\| \cdot \|x - y^*\|}\right). \quad (64)$$

Ако поставимо $y = 0$, а x на удаљеност $\|x\|$, идеалне тачке постају $y^* = e = \frac{x}{\|x\|}$ и $x^* = -e$. Заменом еуклидских растојања добијамо:

$$d_B(0, x) = \ln\left(\frac{1 \cdot (1 + \|x\|)}{1 \cdot (1 - \|x\|)}\right) = 2 \operatorname{artanh}(\|x\|). \quad (65)$$

Како Мебијусове трансформације чувају дворазмеру било које четири тачке ([1, Теорема 4.3.1]), можемо применити изометрију T_x која тачку x слика у 0, а тачку y у $T_x(y)$. Због инваријантности дворазмере важи:

$$d_B(x, y) = d_B(0, T_x(y)) = 2 \operatorname{artanh}(\|T_x(y)\|). \quad (66)$$

Баш као и у диференцијалном приступу, примена тригонометријског идентитета $\operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{2z^2}{1-z^2}\right)$ за $z = \|T_x(y)\|$ и замена Алфорсових идентитета доводи до потпуног скраћивања именилаца. Пројективна дворамера тиме ригорозно резултује идентичном једначином:

$$d_B(x, y) = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{2\|x - y\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}\right). \quad (67)$$

Трећи приступ: Алгебарски метод (преко инваријанте)

Трећи приступ (често коришћен у алгебарској топологији по Ратклифу) заобилази логаритамске и тригонометријске прелазе директно посматрајући алгебарску величину $s = \frac{\|x - y\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}$.

За Мебијусову трансформацију T_x која слика тачку $x \mapsto 0$, а тачку $y \mapsto T_x(y)$, ова инваријанта се своди на:

$$s = \frac{\|0 - T_x(y)\|^2}{(1 - \|0\|^2)(1 - \|T_x(y)\|^2)} = \frac{\|T_x(y)\|^2}{1 - \|T_x(y)\|^2}. \quad (68)$$

Из претходних приступа већ знамо да је $d_B(x, y) = 2 \operatorname{artanh}(\|T_x(y)\|)$. Нађимо директно хиперболички косинус овог растојања, користећи дефиницију $\cosh(2 \operatorname{artanh}(z)) = \frac{1+z^2}{1-z^2} = 1 + \frac{2z^2}{1-z^2}$. Узимајући $z = \|T_x(y)\|$, добијамо:

$$\cosh(d_B(x, y)) = 1 + 2 \frac{\|T_x(y)\|^2}{1 - \|T_x(y)\|^2}. \quad (69)$$

Како је $\frac{\|T_x(y)\|^2}{1 - \|T_x(y)\|^2}$ управо једнако нашој инваријанти s , директном заменом израза за s следи:

$$\cosh(d_B(x, y)) = 1 + 2 \left(\frac{\|x - y\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)} \right). \quad (70)$$

Применом инверзне функције, и овај чисто алгебарски приступ затвара математички круг и даје коначну једначину растојања:

$$d_B(x, y) = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{2\|x - y\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}\right). \quad (71)$$

4.4 Инфинитезимални прелаз (Тејлоров развој)

Да је глобална arcosh формула савршено конзистентна са Римановим елементом лука, потврђујемо обрнутим процесом. Ставимо $y = x + dx$ у формулу (71). Када $\|dx\| \rightarrow 0$, важи $\|x - y\|^2 = \|dx\|^2$ и $(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2) \approx (1 - \|x\|^2)^2$.

Тада је $\cosh d_B \approx 1 + \epsilon$, са $\epsilon = \frac{2\|dx\|^2}{(1 - \|x\|^2)^2}$. Из Тејлоровог развоја $\operatorname{arcosh}(1 + \epsilon) \approx \sqrt{2\epsilon}$ следи $d_B(x, x + dx)^2 \approx 2\epsilon$, тј.:

$$ds^2 = \frac{4 \|dx\|^2}{(1 - \|x\|^2)^2}, \quad (72)$$

чиме је, у граничном прелазу, савршено потврђен полазни елемент лука из Дефиниције 4.1.

4.5 Упоредна анализа три приступа

Презентована три начина извођења представљају три различите математичке филозофије које доводе до потпуно истог алгебарског резултата. На први поглед, Риманов диференцијални приступ, пројективна дворазмера и алгебарска анализа тачкасте инваријанте полазе од потпуно различитих премиса. Међутим, њихова еквиваленција није случајна, већ представља директну последицу Ерлангенског програма Феликса Клајна.

Према Клајну, својства простора су у потпуности дефинисана његовом групом аутоморфизама. Како сва три приступа траже фундаменталну метричку инваријанту у односу на исту групу симетрија — Мебијусову групу $M(\mathbb{B}^3)$ — она нужно конвергирају ка идентичној затвореној аналитичкој форми. Док Риманов метод конструише простор локално (интеграцијом инфинитезималних корака), пројективни метод га дефинише глобално (посматрајући апсолуту), потврђујући дубоко математичко јединство локалних и глобалних својстава хиперболичког простора.

Разумевање специфичности сваког од ових приступа кључно је за њихову примену у различитим научним дисциплинама:

- **Риманов (Интегрални) приступ:** Природан за диференцијалну геометрију. Омогућава рачунање дужине произвољних (не-геодезијских)

кривих и генерише тангентне просторе неопходне за дефинисање експоненцијалног и логаритамског пресликавања.

- **Пројективни приступ (Дворазмера):** Доминира у строго геометријском разматрању. Његова главна предност лежи у геометријској елеганцији и пружању интуиције о понашању простора близу границе. Међутим, рачунарски је неподесан јер захтева налажење пресека h -праве са апсолутом за сваки пар тачака.
- **Алгебарски (Мебијусов) приступ:** Затворена arcosh формула представља апсолутни стандард у примењеној математици и дубоком машинском учењу. Она је нумерички стабилна, не захтева тражење идеалних тачака на граници простора, а њен извод је директно применљив за рачунање градијената (енгл. *backpropagation*) у хиперболичким неуронским мрежама [5].

4.6 Функција Лобачевског и угао паралелности у моделу лопте

Један од најпознатијих и најважнијих појмова који карактеришу нееуклидски карактер хиперболичке геометрије јесте *угао паралелности*. За разлику од еуклидске геометрије, где је угао паралелности увек константан и износи $\pi/2$, у хиперболичком простору $\mathbb{H}^3$ овај угао зависи искључиво од хиперболичног растојања између уочене тачке и праве. Зависност угла паралелности од растојања описује се класичном *функцијом Лобачевског* [2].

У овом одељку дефинишемо угао паралелности у тродимензионалном Поенкареовом моделу лопте $\mathbb{B}^3$ и дајемо строго геометријско и аналитичко извођење функције Лобачевског.

Геометријска дефиниција угла паралелности

Будући да свака h -тачка $P \in \mathbb{B}^3$ и h -права $p \subset \mathbb{B}^3$ која је не садржи одређују јединствену h -раван Π_h (која је у овом моделу представљена или еуклидским кружним диском који пролази кроз координатни почетак O или делом еуклидске сфере која је ортогонална на апсолуту $\mathbb{S}^2$), проблем одређивања

међусобног положаја тачке и праве се без губитка општости може редуковати на дводимензионални случај унутар равни Π_h .

Дефиниција 4.5 (Угао паралелности и функција Лобачевског). Нека је a фиксна h -права и нека h -тачка $A \in \mathbb{B}^3$ не припада правој a . Нека је A' h -пројекција тачке A на h -праву a (тј. пресечна тачка h -нормале из A на a) и нека је $d = d(A, A') > 0$ њихово међусобно хиперболично растојање.

Према теорему о паралелности у хиперболичкој геометрији [2], постоје тачно две h -праве r_1 и r_2 које пролазе кроз тачку A и гранично су паралелне са h -правом a . Општар угао $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ који свака од ових правих заклапа са h -нормалом AA' назива се **угао паралелности** за растојање d .

Пресликавање $\Pi : \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})$ које сваком хиперболичком растојању $d > 0$ придружује одговарајући угао паралелности α :

$$\alpha = \Pi(d) \tag{73}$$

назива се **функција Лобачевског**.

Аналитичко извођење функције Лобачевског у моделу лопте

Захваљујући конформности Поенкареовог модела лопте, хиперболички углови се поклапају са еуклидским угловима између одговарајућих репрезентата. То нам омогућава да изведемо експлицитну функционалну везу између угла α и растојања d користећи чисту еуклидску геометрију унутар модела.

Користећи транзитивност деловања групе хиперболичких изометрија $I(\mathbb{B}^3)$ (Теорема о јединствености рефлексije), без губитка општости можемо пресликати h -пројекцију A' у сам координатни почетак (центар апсолуте) $O(0, 0, 0)$.

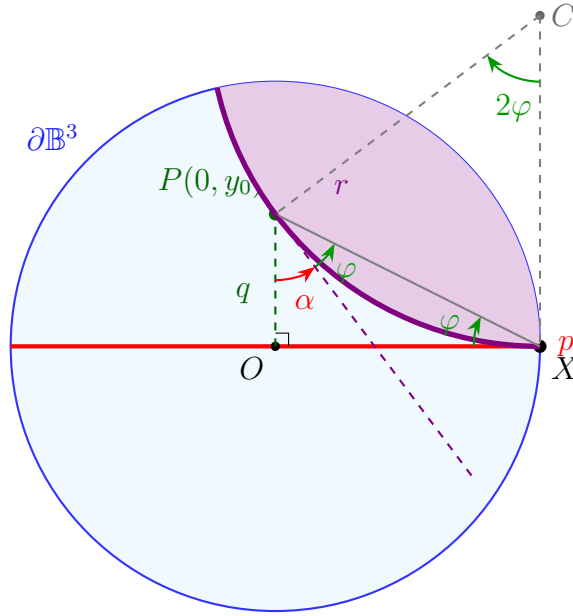
Теорема 4.6 (Експлицитна формула за функцију Лобачевског). *За свако хиперболично растојање $d \in (0, +\infty)$, угао паралелности $\Pi(d)$ даје следећом аналитичком формулом:*

$$\Pi(d) = 2 \arctan(e^{-d}). \tag{74}$$

Доказ. Нека је h -права p конструисана кроз центар апсолуте $O(0, 0, 0)$ у правцу једне од оса. Ова права је у моделу представљена еуклидским пречником лопте. Нека је $X \in \mathbb{S}^2$ једна од њених бесконачно далеких тачака на апсолути.

Посматрајмо h -тачку P која лежи на h -правој q која пролази кроз координатни почетак O и ортогонална је на p . Како је q еуклидски пречник лопте нормалан на p , хиперболичка нормала из тачке P на праву p се поклапа са правом q , при чему је хиперболичко растојање од центра O до тачке P управо $d = d(O, P)$.

Повуцимо h -праву r кроз тачку P која је гранично паралелна са правом p у смеру бесконачно далеке тачке $X \in \mathbb{S}^2$ (Слика 4.3). У моделу лопте, ова паралелна права представљена је кружним луком еуклидског круга $\tilde{r}$ са центром у тачки $C \in \mathbb{E}^3$. Будући да је права r паралелна са p , њен кружни репрезент $\tilde{r}$ мора да пролази кроз бесконачно далеку тачку X на апсолути и да садржи h -тачку P . Даље, како је права r ортогонална на апсолуту $\mathbb{S}^2$, центар еуклидског круга C мора лежати на правој која је тангентна на апсолуту у тачки X , што значи да је еуклидски троугао $\triangle O C X$ правоугли са правим углом код темена X , а сам кружни лук $\tilde{r}$ је ортогоналан на јединичну сферу.



Слика 4.3: Еуклидска конструкција за извођење функције Лобачевског. Хиперболичка права r (љубичасто) пролази кроз тачку P и асимптотски је паралелна са правом p (црвено) тежећи идеалној тачки X . Угао паралелности α (црвено) мери се између нормале q и тангенте на лук, док се углови φ (зелено) односе на геометрију кружног лука r .

Посматрајмо еуклидски једнаокраки троугао $\triangle CPX$, будући да су дужи CP и CX полупречници истог круга $\tilde{r}$ ортогоналног на апсолуту, те важи

$CP = CX = R_e = c_y$. Нека је еуклидски угао у темену тог троугла код центра круга $\angle PCX = 2\varphi$. С обзиром на то да је тетива еуклидског круга PX , гранични периферијски угао $\angle OXP$ између тетиве PX и тангенте на круг у тачки X (која је паралелна са y -осом) једнак је половини централног угла, односно:

$$\angle OXP = \varphi. \quad (75)$$

Тангента на круг $\tilde{r}$ у тачки P заклапа одређене углове са координатним осама. На основу конформности модела, угао између h -праве q (која лежи на y -оси) и h -праве r (лук кружнице $\tilde{r}$) у тачки пресека P јесте управо угао паралелности $\alpha = \Pi(d)$. Како еуклидски полупречник CP заклапа угао од φ са вертикалном осом, а тангента је нормална на полупречник, из геометрије правоуглих троуглова директно следи релација:

$$2\varphi + \alpha = \frac{\pi}{2}. \quad (76)$$

Одакле следи:

$$\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}. \quad (77)$$

Уочимо сада правоугли еуклидски троугао $\triangle OPX$ (који је правоугли код темена O). Како је његова катета на x -оси јединичне дужине ($OX = 1$), а катета на y -оси је еуклидска координата тачке P , коју означавамо са $y_0 := \|P\| \in (0, 1)$, тригонометријска веза у овом троуглу даје:

$$y_0 = \tan \varphi = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}. \quad (78)$$

С друге стране, хиперболичко растојање d између центра лопте O и тачке $P(0, y_0, 0)$ у моделу лопте рачуна се по класичној формули за растојање од координатног почетка:

$$d = d(O, P) = 2 \operatorname{artanh} y_0 \iff y_0 = \tanh \left(\frac{d}{2} \right) = \frac{e^{d/2} - e^{-d/2}}{e^{d/2} + e^{-d/2}} = \frac{e^d - 1}{e^d + 1}. \quad (79)$$

Изједначавањем израза за еуклидску координату y_0 у једначинама (78) и (79), добијамо:

$$\frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{e^d - 1}{e^d + 1}. \quad (80)$$

Унакрсним множењем претходне једначине добијамо следеће једноставне ко-
раке:

$$\begin{aligned} \left(1 - \tan \frac{\alpha}{2}\right) (e^d + 1) &= \left(1 + \tan \frac{\alpha}{2}\right) (e^d - 1) \\ e^d + 1 - e^d \tan \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2} &= e^d - 1 + e^d \tan \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2} \\ 2 &= 2e^d \tan \frac{\alpha}{2} \\ e^d \tan \frac{\alpha}{2} &= 1. \end{aligned} \quad (81)$$

Одатле директно следи кључна релација:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = e^{-d}. \quad (82)$$

Применом инверзне функције аркустангенс на једначину (82) добијамо конач-
ну формулу за угао паралелности:

$$\frac{\alpha}{2} = \arctan(e^{-d}) \quad (83)$$

тј.

$$\alpha = 2 \arctan(e^{-d}) \quad (84)$$

чиме је ова фундаментална теорема хиперболичке геометрије у потпуности
доказана. $\square$

Својства функције Лобачевског и гранични случајеви

Изведен јединствен и прецизан аналитички израз за функцију Лобачевског
(74) у Поенкареовом моделу омогућава нам да са лакоћом проучимо њена
кључна својства и геометријско понашање.

Тврђење 4.7 (Својства функције Лобачевског). *Функција Лобачевског $\Pi(d)$ задовољава следећа својства:*

1. **Сирога мононосии:** *Функција Лобачевског је сирого оидајућа функ-
ција растојања d , односно важи:*

$$d_1 > d_2 \iff \Pi(d_1) < \Pi(d_2). \quad (85)$$

2. **Асимптоиско понашање на бесконачности:** *Како се растојање
између тачке и праве бесконачно повећава, угао паралелности тежи
нули:*

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \Pi(d) = 0. \quad (86)$$

3. **Гранични случај у близини центара:** Када растојање тежи нули, угао паралелности тежи еуклидском правом углу:

$$\lim_{d \rightarrow 0^+} \Pi(d) = \frac{\pi}{2}. \quad (87)$$

Доказ. 1. Како је експоненцијална функција e^{-d} строго опадајућа на интервалу $(0, +\infty)$, а функција $\arctan(x)$ је строго растућа за све позитивне реалне бројеве, њихова композиција $\Pi(d) = 2 \arctan(e^{-d})$ представља строго опадајућу функцију по променљивој d .

2. Посматрајмо граничну вредност када $d \rightarrow +\infty$. Тада важи $e^{-d} \rightarrow 0$, па се гранична вредност угла паралелности добија као:

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \Pi(d) = 2 \arctan(0) = 0. \quad (88)$$

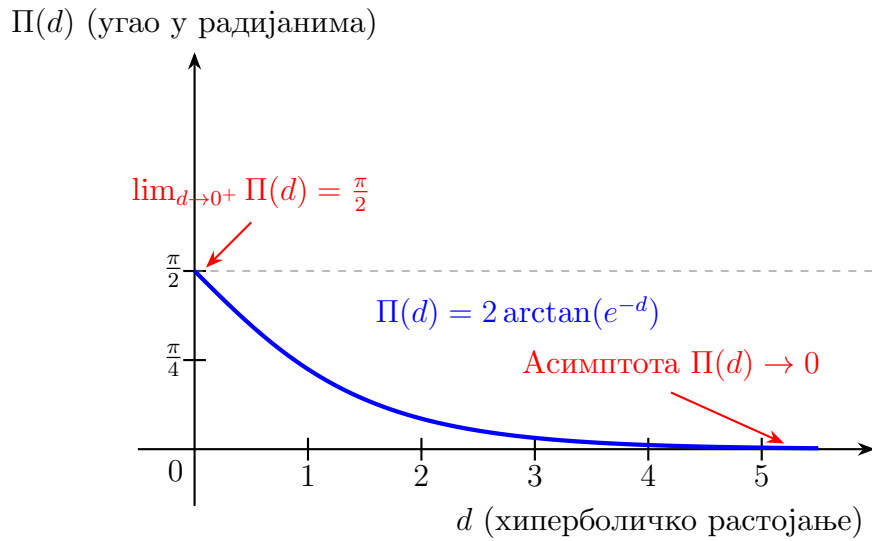
3. Посматрајмо десну граничну вредност када растојање $d \rightarrow 0^+$. Како је $\lim_{d \rightarrow 0^+} e^{-d} = 1$, добијамо:

$$\lim_{d \rightarrow 0^+} \Pi(d) = 2 \arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (89)$$

чиме су сва својства доказана.

□

Напомена 4.8. Својство изражено релацијом (87) носи дубоку физичку и филозофску суштину хиперболичке геометрије. Оно показује да се на веома малим хиперболичким растојањима ($d \rightarrow 0$) хиперболичка геометрија понаша готово идентично као класична еуклидска геометрија. Другим речима, локална структура у хиперболичком простору је равна, односно локално еуклидска. Овај важан принцип у потпуности одговара нашој физичкој реалности и интуицији: нееуклидске ефекте закривљености простора почињемо да уочавамо тек на изузетно великим, космичким скалама, док у нашој непосредној, свакодневној околини простор доживљавамо као локално раван.



Слика 4.4: График функције Лобачевског $\Pi(d)$. Функција је строго опадајућа. Када хиперболично растојање d тежи нули, угао паралелности тежи $\frac{\pi}{2}$ (локално еуклидско понашање). Како d расте, угао паралелности асимптотски тежи нули, што представља екстремно нееуклидско понашање простора на великим растојањима.

Глава 5

Еписфере у Поенкареовом моделу лопте

У тродимензионалном хиперболичком простору, Поенкареов конформни модел лопте $\mathbb{B}^3$ омогућава веома интуитивну анализу и визуелизацију уопштених сфера, које се у хиперболичкој геометрији називају **еписферама**, као што је детаљно изложено у [2]. Еписфере су тродимензионални аналог еуклидских сфера, али се у зависности од свог геометријског карактера и граничног понашања деле на три фундаментално различите класе површи: хиперболичке сфере, орисфере (хоросфере) и еквилистантне површи.

Ова класификација је у директној вези са типом снопова (елиптички, параболички или хиперболички) правих и равни који генеришу ове површи као геометријска места тачака [2]. У овом поглављу детаљно анализирамо сваку од ових класа површи, изводимо њихове еуклидске једначине унутар модела лопте $\mathbb{B}^3$ и доказујемо фундаменталне теореме о њиховој метричкој структури и међусобним изометријама.

5.1 Класификација и дефиниција еписфера

У складу са методологијом уведеном у класичној литератури [2, 4], уопштене сфере или еписфере у хиперболичком простору могу се дефинисати преко симетрије (h -рефлексије).

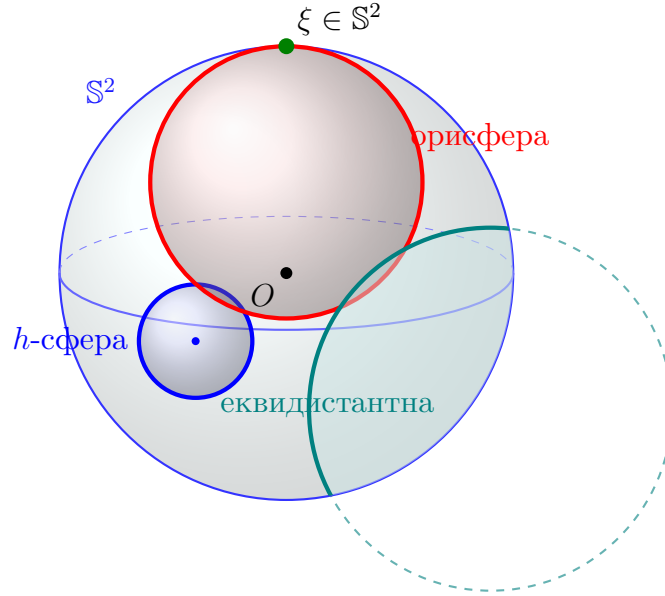
Дефиниција 5.1 (Еписфера). Нека је $\mathcal{U}$ сноп h -правих у простору $\mathbb{B}^3$ и нека је $X \in \mathbb{B}^3$ произвољна хиперболичка тачка која не представља центар снопа

(уколико је сноп елиптички). Скуп $\mathcal{F}(\mathcal{U}, X)$ свих тачака у простору које су симетричне (h -осносиметричне) тачки X у односу на h -праве снопа $\mathcal{U}$ назива се **еписфером** индукованом снопом $\mathcal{U}$ и тачком X .

У зависности од положаја средишта снопа $\mathcal{U}$ у односу на затворену лопту $\mathbb{B}^3$, разликујемо три типа еписфера:

1. **Елиптичка еписфера (Хиперболичка сфера):** Настаје када је средиште снопа реална h -тачка $a \in \mathbb{B}^3$. Она представља геометријско место тачака на константном хиперболичком растојању од центра a .
2. **Параболичка еписфера (Орисфера или хоросфера):** Настаје када је средиште снопа заједничка идеална тачка (бесконечно далека тачка) $b \in \mathbb{S}^2$ на апсолути. Она представља гранични случај хиперболичке сфере када центар тежи тачки на апсолути, а полупречник тежи бесконачности.
3. **Хиперболичка еписфера (Еквидистантна површ или хиперсфера):** Настаје када су праве снопа $\mathcal{U}$ ортогоналне на заједничку базичну h -раван Π_h (односно средиште снопа је имагинарна тачка изван $\mathbb{B}^3$). Она представља геометријско место тачака на константном хиперболичком растојању од фиксне базичне h -равни Π_h .

У наставку изводимо аналитичке једначине и проучавамо својства за сваку од ових класа.



Слика 5.1: Три врсте еписфера у Поенкареовом моделу лопте $\mathbb{B}^3$. **Хиперболичка сфера** (плаво) лежи строго унутар лопте. **Орисфера** (црвено) додирује апсолуту $\mathbb{S}^2$ у једној идеалној тачки ξ . **Еквидистантна површ** (тир-кизно) представља део еуклидске сфере која неортогонално сече апсолуту (испрекидана линија приказује њен део изван лопте).

5.2 Хиперболичке сфере (Елиптичке еписфере)

Хиперболичка сфера је најприроднији аналог еуклидске сфере у хиперболичком простору.

Дефиниција 5.2 (Хиперболичка сфера). Хиперболичка сфера са центром у тачки $a \in \mathbb{B}^3$ и хиперболичким полупречником $R > 0$, у ознаци $S_h(a, R)$, дефинише се као скуп:

$$S_h(a, R) = \{x \in \mathbb{B}^3 : d_B(x, a) = R\}. \quad (90)$$

Користећи формулу за хиперболичко растојање у Поенкареовом моделу лопте, као што је изведено у Глави 4 и у [1]:

$$\cosh d_B(x, a) = 1 + \frac{2\|x - a\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|a\|^2)} \quad (91)$$

можемо експлицитно одредити еуклидски облик хиперболичке сфере.

Теорема 5.3 (О еуклидском облику хиперболичке сфере). *Свака хиперболичка сфера $S_h(a, R)$ у Поенкареовом моделу лопте представљена је еуклидском сфером $S(C_e, R_e)$ која у топологији лежи унутар отворене лопте $\mathbb{B}^3$, при чему су њен еуклидски центар C_e и еуклидски полупречник R_e даћи изразима:*

$$C_e = \frac{1 - \tanh^2(R/2)}{1 - \|a\|^2 \tanh^2(R/2)} a, \quad R_e = \frac{\tanh(R/2)(1 - \|a\|^2)}{1 - \|a\|^2 \tanh^2(R/2)} \quad (92)$$

односно, у функцијама хиперболичких косинуса и синуса:

$$C_e = \frac{2}{(1 - \|a\|^2) \cosh R + (1 + \|a\|^2)} a, \quad R_e = \frac{(1 - \|a\|^2) \sinh R}{(1 - \|a\|^2) \cosh R + (1 + \|a\|^2)}. \quad (93)$$

Доказ. Нека је $d_B(x, a) = R$, одакле следи $\cosh d_B(x, a) = \cosh R$. Ради једноставности записа, уводимо смену $k = \cosh R > 1$. Из једначине (91) тада следи:

$$k = 1 + \frac{2 \|x - a\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|a\|^2)}. \quad (94)$$

Како важи $\|x - a\|^2 = \|x\|^2 + \|a\|^2 - 2(x \cdot a)$, претходни израз можемо трансформисати у облик:

$$k(1 - \|x\|^2)(1 - \|a\|^2) = (1 - \|x\|^2)(1 - \|a\|^2) + 2(\|x\|^2 + \|a\|^2 - 2(x \cdot a)). \quad (95)$$

Даљим сређивањем и груписањем чланова добијамо:

$$\|x\|^2 [1 + \|a\|^2 + k(1 - \|a\|^2)] - 4(x \cdot a) + [1 + \|a\|^2 - k(1 - \|a\|^2)] = 0. \quad (96)$$

Нека је $D = (1 - \|a\|^2) \cosh R + (1 + \|a\|^2) > 0$. Дељењем целе једначине са D , добијамо нормализовану једначину еуклидске сфере:

$$\|x\|^2 - 2 \left(x \cdot \frac{2a}{D} \right) + \frac{1 + \|a\|^2 - \cosh R(1 - \|a\|^2)}{D} = 0. \quad (97)$$

Ова једначина представља еуклидску сферу чији се центар налази у тачки:

$$C_e = \frac{2a}{D} = \frac{2}{(1 - \|a\|^2) \cosh R + (1 + \|a\|^2)} a. \quad (98)$$

Допуном једначине (97) до пуног квадрата бинома $\|x - C_e\|^2$, добијамо израз за квадрат еуклидског полупречника R_e^2 :

$$\begin{aligned} R_e^2 &= \|C_e\|^2 - \frac{1 + \|a\|^2 - \cosh R(1 - \|a\|^2)}{D} \\ &= \frac{4\|a\|^2 - [(1 + \|a\|^2) - \cosh R(1 - \|a\|^2)] [(1 + \|a\|^2) + \cosh R(1 - \|a\|^2)]}{D^2}. \end{aligned} \quad (99)$$

Даљим сређивањем имамо:

$$\begin{aligned}
 R_e^2 &= \frac{4\|a\|^2 - [(1 + \|a\|^2)^2 - \cosh^2 R(1 - \|a\|^2)^2]}{D^2} \\
 &= \frac{\cosh^2 R(1 - \|a\|^2)^2 - [(1 + \|a\|^2)^2 - 4\|a\|^2]}{D^2} \\
 &= \frac{\cosh^2 R(1 - \|a\|^2)^2 - (1 - \|a\|^2)^2}{D^2} \\
 &= \frac{(1 - \|a\|^2)^2(\cosh^2 R - 1)}{D^2} \\
 &= \frac{(1 - \|a\|^2)^2 \sinh^2 R}{D^2}.
 \end{aligned} \tag{100}$$

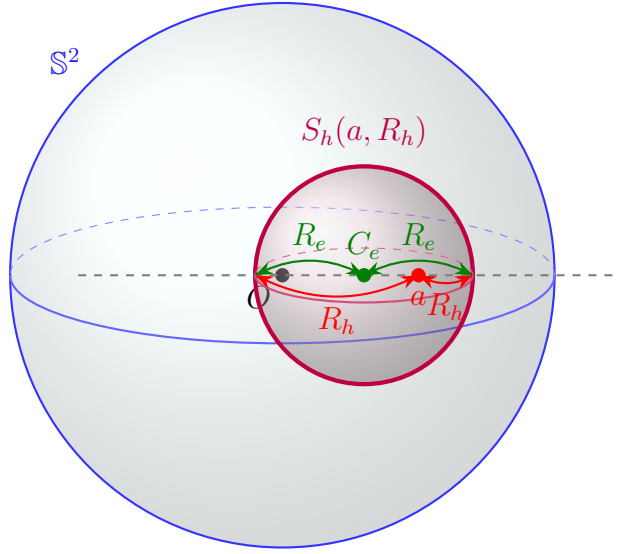
Одатле директно следи израз за еуклидски полупречник:

$$R_e = \frac{(1 - \|a\|^2) \sinh R}{D} = \frac{(1 - \|a\|^2) \sinh R}{(1 - \|a\|^2) \cosh R + (1 + \|a\|^2)}. \tag{101}$$

Формуле у облику (92) се једноставно добијају изражавањем $\cosh R$ и $\sinh R$ преко $\tanh(R/2)$, чиме је доказ у потпуности завршен. $\square$

Напомена 5.4. Из теореме 5.3 уочавамо веома важну геометријску чињеницу: хиперболичка сфера јесте еуклидска сфера, али се њен еуклидски центар C_e не поклапа са њеним хиперболичким центром a (осим у тривијалном случају када је $a = O$, када директно следи да је $C_e = O$ и $R_e = \tanh(R/2)$).

Наиме, како за $R > 0$ важи $\cosh R > 1$, именилац у изразу за еуклидски центар C_e задовољава неједнакост $D = (1 - \|a\|^2) \cosh R + (1 + \|a\|^2) > 2$, што показује да је коефицијент уз a строго мањи од 1 (односно важи $\|C_e\| < \|a\|$). Због тога, како се хиперболички центар a удаљава од координатног почетка према апсолути, он је увек ближи граници простора него еуклидски центар C_e . До овог померања хиперболичног центра ка спољашњости у односу на еуклидски центар долази услед конформне деформације метрике у близини границе [1].



Слика 5.2: Геометријска конструкција хиперболичке сфере $S_h(a, R_h)$ у Поенкареовом моделу. Иако је она визуелно савршена еуклидска сфера $S(C_e, R_e)$, њен **хиперболички центар** a (црвено) се не поклапа са њеним **еуклидским центром** C_e (зелено). Због деформације метрике у близини апсолуте $\mathbb{S}^2$, права хиперболичка средишња тачка a је увек померена ближе граници простора. Дужине лукова показују да је хиперболичко растојање од a до граница сфере константно и износи R_h , док се из перспективе еуклидског центра C_e мере једнака еуклидска растојања R_e .

5.3 Орисфере (Параболичке еписфере)

За разлику од хиперболичких сфера, које представљају строго ограничене површи унутар хиперболичког простора, орисфере нас воде до саме апсолутне границе модела. Орисфера (или хоросфера) је један од најфасцинантнијих објеката у хиперболичкој геометрији.

Дефиниција 5.5 (Орисфера/Хоросфера). Нека је дат параболички сноп h -правих у хиперболичком простору. **Орисфера** (хоросфера) Σ је површ у хиперболичком простору која је ортогонална на све праве тог параболичког снопа. Заједничка идеална тачка свих правих тог снопа на апсолути назива се *средишње* (или центар) орисфере.

Теорема 5.6 (О облику орисфере у моделу лопте). У Поенкареовом моделу лопте $\mathbb{B}^3$, свака орисфера представља еуклидску сферу која се налази унутар

$\mathbb{B}^3$ и која изнутра додирује апсолуту $\mathbb{S}^2$, при чему се тачка додира поклапа са средишњем орисфере (из које је сама тачка додира искључена).

Доказ. Доказ спроводимо преласком са модела лопте на модел горњег полупростора. Посматрајмо стереографску пројекцију простора са центром у јужном полу $S(0, 0, -1)$. Ово пресликавање је, као и стереографска пројекција са центром у северном полу, конформно [1].

Формуле ове трансформације $F: \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{U}^3$ дате су са:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + (1+z)^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + (1+z)^2}, \frac{1 - x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + (1+z)^2} \right). \quad (102)$$

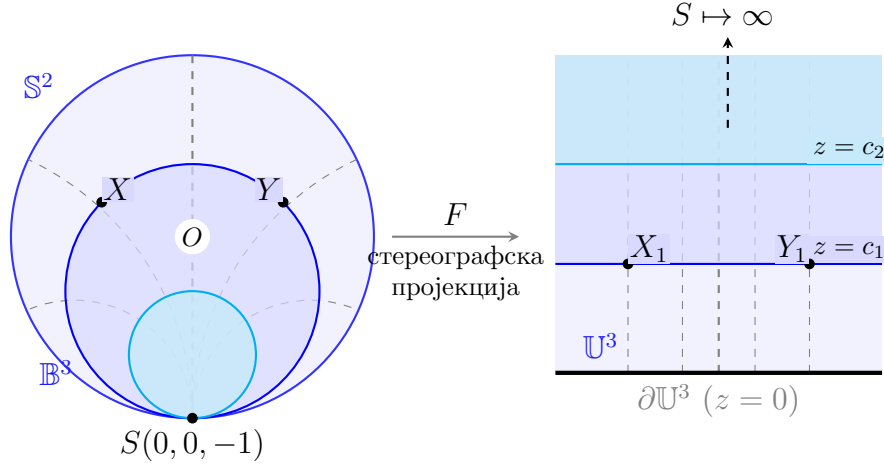
Овим пресликавањем се апсолута слика у раван $z = 0$, а тачке Поенкареовог модела лопте $\mathbb{B}^3$ у тачке полупростора где је $z > 0$. С обзиром на то да је $\mathbb{B}^3$ модел хиперболичке геометрије простора, и његова слика при овом пресликавању је такође модел хиперболичког простора. Овај модел се назива Поенкареов модел горњег полупростора и означаваћемо га са $\mathbb{U}^3$, као што је детаљно изложено у [1]. Њиме се уопштене сфере еуклидског простора сликају у уопштене сфере, па ће слике h -равни бити уопштене сфере ортогоналне на раван $z = 0$.

Претпоставимо да је тачка $S(0, 0, -1)$ центар параболичког снопа. Пресликавањем F , апсолута се слика у раван $z = 0$, а тачка S у бесконачно далеку тачку те равни. Зато се свака h -раван у $\mathbb{B}^3$ слика у уопштену сферу која садржи ту бесконачну тачку и ортогонална је на раван $z = 0$, односно слика се у еуклидску раван нормалну на $z = 0$ [1].

Нека су X и Y тачке одговарајуће орисфере, а X_1 и Y_1 њихове слике у моделу полупростора. Како симетрална h -раван тачака X и Y припада снопу кроз бесконачну тачку S , тачке X_1 и Y_1 биће у моделу полупростора хиперболички симетричне у односу на неку еуклидску раван нормалну на $z = 0$.

Зато је слика орисфере у моделу полупростора скуп свих тачака симетричних тачки X_1 у односу на равни нормалне на $z = 0$, што је заправо еуклидска раван паралелна равни $z = 0$. Примењујући инверз стереографске пројекције F^{-1} , добијамо да су тачке ове орисфере заправо тачке еуклидске сфере која изнутра додирује апсолуту $\mathbb{S}^2$ у тачки S (без саме тачке S) [1].

Ако је нека друга тачка апсолуте центар орисфере, постоји h -изометрија којом се она слика у S , па је тиме и свака друга орисфера скуп тачака еуклидске сфере која додирује апсолуту. $\square$



Слика 5.3: Визуелизација доказа Теореме 5.6. Конформна трансформација F пресликава Поенкареову лопту $\mathbb{B}^3$ у горњи полупростор $\mathbb{U}^3$. Тачке X и Y са орисфере пресликавају се у тачке X_1 и Y_1 које леже на еуклидској равни паралелној апсолути. Централна, подебљана испрекидана линија представља њихову симетралну h -праву (део параболичког снопа кроз S), у односу на коју тачке остају симетричне и након пресликавања.

Напомена 5.7. Посматрајмо промену метрике при стереографској пројекцији F . Уведимо ознаку за именилац $D = x^2 + y^2 + (1 + z)^2$ у једначини (102). Тада су координате у новом простору $\mathbb{U}^3$ дате са:

$$x' = \frac{2x}{D}, \quad y' = \frac{2y}{D}, \quad z' = \frac{1 - x^2 - y^2 - z^2}{D}.$$

Имамо да за диференцијале важи релација:

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = \frac{4}{D^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Ако овај израз поделимо квадратом нове координате z'^2 , добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{z'^2} &= \frac{\frac{4}{D^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{\left(\frac{1 - x^2 - y^2 - z^2}{D}\right)^2} \\ &= \frac{4(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2}. \end{aligned}$$

Како израз на десној страни једнакости представља управо квадрат хиперболичног растојања у $\mathbb{B}^3$, закључујемо да је модел горњег полупростора опремљен метриком:

$$ds^2 = \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{z'^2}.$$

Како смо претходном теоремом показали да орисфера у моделу $\mathbb{B}^3$ има облик еуклидске сфере, означимо њен еуклидски полупречник са r . Будући да ова сфера изнутра додирује апсолуту $\mathbb{S}^2$ у тачки b (при чему је $\|b\| = 1$), њен еуклидски центар се мора налазити на дужи која спаја координатни почетак O и тачку додира b (полупречник апсолуте). То значи да се центар налази на растојању $1-r$ од координатног почетка, односно дат је вектором $C_e = (1-r)b$. Да би орисфера лежала строго унутар лопте $\mathbb{B}^3$ (са изузетком саме тачке додира), мора важити услов $0 < r < 1$.

Једначина орисфере Σ у моделу лопте гласи:

$$\|x - (1-r)b\|^2 = r^2, \quad \text{за } \|x\| < 1. \quad (103)$$

Расписивањем једначине (103) добијамо следећу имплицитну форму:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 - 2(1-r)(x \cdot b) + (1-r)^2 &= r^2 \\ \|x\|^2 - 2(1-r)(x \cdot b) + 1 - 2r &= 0. \end{aligned} \quad (104)$$

Свака линеарна фамилија орисфера са заједничким средиштем $b \in \mathbb{S}^2$ чини параболички сноп еписфера.

Једна од најзначајнијих теорема хиперболичке геометрије, коју је први формулисао Николај Лобачевски, показује да је унутрашња геометрија на орисфери идентична геометрији еуклидске равни.

Теорема 5.8 (О изометричности орисфера и еуклидске равни). *Свака орисфера $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ опремљена индукованом хиперболичком метриком (првом фундаменталном формом) јесте локално изометрична дводимензионалном еуклидском простору $\mathbb{E}^2$. Другим речима, унутрашња геометрија орисфере је чистио еуклидска.*

Доказ. Доказ изводимо преласком са модела лопте на изометричан модел горњег полупростора, као што је детаљно изложено у [1]:

$$\mathbb{U}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : z > 0\} \quad (105)$$

који је, као што смо претходно показали, опремљен Римановом метриком:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}. \quad (106)$$

С обзиром на то да конформно пресликавање представља глобалну изометрију између модела лопте $\mathbb{B}^3$ и модела горњег полупростора $\mathbb{U}^3$ [1], довољно је

тврђење доказати у моделу $\mathbb{U}^3$. Група изометрија $I(\mathbb{B}^3)$, која је изоморфна групи Мебијусових трансформација $PSL(2, \mathbb{C})$, садржи елемент који пресликава средиште орисфере $b \in \mathbb{S}^2$ у бесконачно далеку тачку ∞ .

Ова конформна трансформација слика орисферу Σ , тангентну на апсолуту, у еуклидску раван Π која је паралелна граничној равни $z = 0$ у моделу горњег полупростора. Дакле, у моделу $\mathbb{U}^3$, орисфера је представљена хоризонталном равни:

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{U}^3 : z = z_0 = \text{const} > 0\}. \quad (107)$$

Да бисмо нашли индуковану метрику на овој орисфери, израчунавамо рестрикцију линијског елемента (106) на раван Π . Будући да је на Π вредност координате z константна ($z = z_0$), диференцијал је $dz = 0$. Заменом ових вредности у (106) добијамо индуковану метрику ds_Σ^2 :

$$ds_\Sigma^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{z_0^2}. \quad (108)$$

Увођењем нових, рескалираних координата унутар равни:

$$u = \frac{x}{z_0}, \quad v = \frac{y}{z_0} \quad (109)$$

метрика (108) се своди на стандардни еуклидски линијски елемент:

$$ds_\Sigma^2 = du^2 + dv^2. \quad (110)$$

Ово доказује да је Гаусова кривина орисфере у свакој њеној тачки идентички једнака нули ($K = 0$), што значи да је унутрашња геометрија на орисфери планарна, односно еуклидска, као што је показано у [2]. $\square$

Теорема 5.9 (О међусобној изометричности орисфера). *Све орисфере у Поенкареовом моделу лопте $\mathbb{B}^3$ су међусобно хиперболички изометричне.*

Доказ. Нека су Σ_1 и Σ_2 две произвољне орисфере у $\mathbb{B}^3$ са средиштима у $b_1, b_2 \in \mathbb{S}^2$ и еуклидским полупречницима r_1, r_2 , респективно. На основу доказа Теореме 5.6 и транзитивности групе хиперболичких изометрија $I(\mathbb{B}^3)$ на апсолути $\mathbb{S}^2$ [2], постоји h -изометрија која средиште b_1 пресликава у тачку b_2 . Након ове трансформације, без умањења општости можемо претпоставити да обе орисфере имају исто средиште $b \in \mathbb{S}^2$.

Сада посматрајмо h -транслацију дуж h -праве која спаја координатни почетак са тачком b . Ова транслација представља конформно пресликавање које

чува лопту $\mathbb{B}^3$ и фиксира јединствену тачку b на апсолути. Будући да транс-
 лација делује строго транзитивно дуж ове осе, постоји јединствена хипербо-
 личка транслација τ дуж ове осе која слика тачку пресека прве орисфере са
 осом у тачку пресека друге орисфере са осом. Како конформна пресликава-
 ња која чувају $\mathbb{B}^3$ и тачку b морају сликати еуклидске сфере тангентне на
 $\mathbb{S}^2$ у b у друге такве сфере, транслација τ једнозначно слика орисферу Σ_1 у
 Σ_2 . Тиме је доказано да су било које две орисфере међусобно хиперболички
 изометричне. $\square$

5.4 Еквидистантне површи (Хиперболичке еписфере)

Еквидистантна површ (или хиперсфера) представља геометријско место
 тачака које се налазе на константном хиперболичком растојању од фиксне
 хиперболичке равни, која се назива **базична раван**.

Дефиниција 5.10 (Еквидистантна површ). Нека је Π_h фиксна базична h -
 -раван у $\mathbb{B}^3$ и нека је $d > 0$. **Еквидистантна површ** $\mathcal{E}(\Pi_h, d)$ на растојању d
 од равни Π_h јесте скуп свих тачака хиперболичког простора које задовољавају:

$$\mathcal{E}(\Pi_h, d) := \{x \in \mathbb{B}^3 : d_B(x, \Pi_h) = d\}. \quad (111)$$

За разлику од еуклидске геометрије, где је еквидистантна површ у одно-
 су на раван поново раван паралелна полазној, у хиперболичкој геометрији
 еквидистантна површ **није**, за $d \neq 0$, хиперболичка раван. Ово је директ-
 на последица чињенице да су хиперболичке равни закривљене у еуклидском
 смислу, па се површ константног растојања мора кривити другачије од саме
 базичне равни.

У Поенкареовом конформном моделу, аналитички изглед еквидистантне
 површи изводимо у посебном канонском случају, када базична раван пролази
 кроз координатни почетак, а затим резултат уопштавамо помоћу хиперболич-
 ких изометрија (сферних инверзија).

Теорема 5.11 (О еуклидским једначинама еквидистантне површи). *Нека је
 базична h -раван Π_h представљена еуклидским координатним диском који при-
 њада екваторијалној равни $z = 0$ унутар лопте $\mathbb{B}^3$. Тада се еквидистантна*

површ $\mathcal{E}(\Pi_h, d)$ на растојању $d > 0$ састоји од две еуклидске калоте са заједничком границом на апсолуту $\mathbb{S}^2$ дуж кружнице $x^2 + y^2 = 1, z = 0$. Једначине ових сфера у $\mathbb{E}^3$ су даје са:

$$x^2 + y^2 + z^2 \mp 2z \operatorname{csch} d - 1 = 0, \quad \text{за } x^2 + y^2 + z^2 < 1, \quad (112)$$

где $\operatorname{csch} d = \frac{1}{\sinh d}$ означава функцију хиперболичног косеканса. Еуклидски центри $C_e^\pm$ и полупречници R_e ових сфера једнаки су:

$$C_e^\pm = (0, 0, \pm \operatorname{csch} d), \quad R_e = \coth d. \quad (113)$$

Доказ. Посматрајмо вертикалну осу z . На основу својстава конформности модела, вертикална оса z је h -права која пролази кроз координатни почетак $O(0, 0, 0)$ и ортогонална је на базичну равни $\Pi_h := \{z = 0\} \cap \mathbb{B}^3$. Према томе, минимално хиперболично растојање произвољне тачке дуж z -осе до базичне равни Π_h остварује се управо у координатном почетку O , као што је доказано у [2].

Нека еквидистантна површ сече позитивни део z -осе у тачки са еуклидским координатама $(0, 0, z_0)$ за $z_0 > 0$. Будући да је растојање те тачке до координатног почетка (који лежи у базичној равни) једнако d , из формуле за растојање од координатног почетка добијамо:

$$d = 2 \operatorname{artanh} z_0$$

тј.

$$z_0 = \tanh(d/2). \quad (114)$$

Будући да еквидистантна површ мора имати заједничку границу на апсолуту са својом базичном равни дуж граничне кружнице $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ [2], њен еуклидски репрезент мора бити еуклидска сфера која пролази кроз ову кружницу. Једначина било које еуклидске сфере која садржи кружницу $x^2 + y^2 = 1$ у равни $z = 0$ има центар на z -оси, $C_e = (0, 0, z_c)$, и полупречник R_e који мора задовољити услов инциденције са тачкама на апсолуту:

$$1^2 + (0 - z_c)^2 = R_e^2 R_e^2 = 1 + z_c^2.$$

тј.

$$R_e^2 = 1 + z_c^2. \quad (115)$$

Једначина те еуклидске сфере гласи:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z_c z - 1 = 0. \quad (116)$$

Како тачка пресека са z -осом $(0, 0, z_0)$ припада овој сфери, њена координата мора задовољити једначину (116):

$$z_0^2 - 2z_c z_0 - 1 = 0 \implies 2z_c z_0 = z_0^2 - 1 \implies z_c = \frac{z_0^2 - 1}{2z_0}. \quad (117)$$

тј.

$$z_c = \frac{z_0^2 - 1}{2z_0}. \quad (118)$$

Заменом $z_0 = \tanh(d/2)$ и коришћењем хиперболичких тригонометријских идентитета, добијамо вредност центра z_c :

$$z_c = \frac{\tanh^2(d/2) - 1}{2 \tanh(d/2)} = \frac{-\operatorname{sech}^2(d/2)}{2 \tanh(d/2)} = \frac{-1}{2 \sinh(d/2) \cosh(d/2)} = -\frac{1}{\sinh d} = -\operatorname{csch} d. \quad (119)$$

За горњи симетрични део површи, центар се налази у $z_c = \operatorname{csch} d$. Заменом ових вредности у (115) добијамо квадрат еуклидског полупречника R_e^2 :

$$R_e^2 = 1 + \operatorname{csch}^2 d = \coth^2 d \implies R_e = \coth d. \quad (120)$$

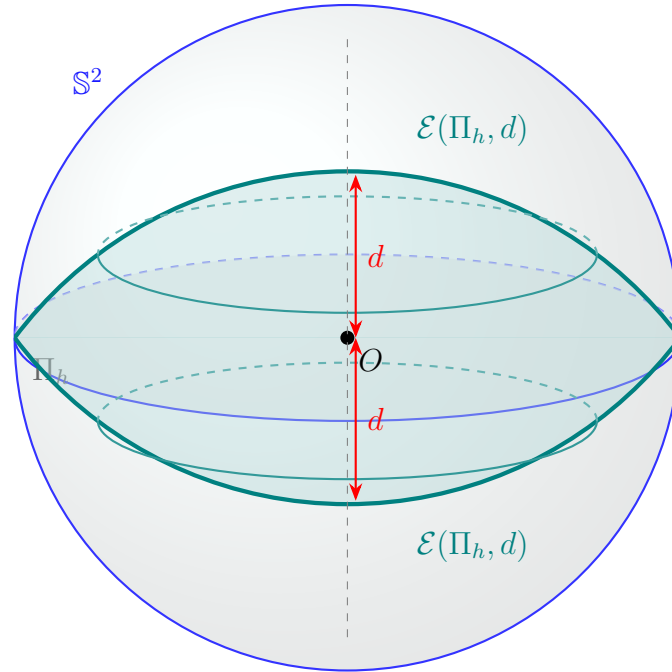
тј.

$$R_e = \coth d. \quad (121)$$

□

Теорема 5.12 (О међусобној изометричности еквидистантних површи). *Све еквидистантне површи $\mathcal{E}(\Pi_h, d)$ које се налазе на једнаком хиперболичком растојању $d > 0$ од својих одговарајућих базичних равни Π_h јесу међусобно хиперболички изометричне површи.*

Доказ. Доказ следи директно из транзитивности деловања групе хиперболичких изометрија $I(\mathbb{B}^3)$ на хиперболичке равни простора. Како за било које две базичне h -равни Π_1 и Π_2 у $\mathbb{B}^3$ постоји h -изометрија (композиција h -рефлексиија) $\phi \in I(\mathbb{B}^3)$ таква да је $\phi(\Pi_1) = \Pi_2$ [2], а хиперболичке изометрије чувају хиперболичка растојања, произилази да се цео систем еквидистантних површи у односу на Π_1 слика у систем еквидистантних површи у односу на Π_2 , чиме је тврђење доказано. □



Слика 5.4: Еквидистантна површ $\mathcal{E}(\Pi_h, d)$ у Поенкареовом моделу лопте. Да би се формирала површ константног h -растојања d у односу на базичну равн Π_h , еуклидски центри сфера морају бити померени дуж нормале у супротним смеровима (центар за горњу капу налази се на негативном делу z -осе и обрнуто). Захваљујући томе, ове сфере улазе у унутрашњост лопте формирајући облик симетричног биконвексног „сочива” које се са базичном равни додирује искључиво на апсолути $\mathbb{S}^2$. Хоризонталне кругови на капама представљају линије константне еуклидске висине, које додатно истичу 3D закривљеност површи.

Закључак

Циљ овог мастер рада био је да се свеобухватно и строго теоријски обради тродимензионални хиперболички простор кроз призму Поенкареовог сферног модела лопте $\mathbb{B}^3$. Полазећи од основних концепата инверзивне геометрије у проширеном еуклидском простору, видели смо како се елементарна пресликавања – рефлексije и инверзије – удружују у моћну групу Мебијусових трансформација. Ова група нам је послужила као главни алат за дефинисање и разумевање пуне групе изометрија хиперболичког простора.

Кроз поглавља смо систематски градили геометријску структуру модела. Детаљно смо испитали хиперболичке праве и равни, посматрајући их као делове еуклидских кружница и сфера ортогоналних на апсолуту. Централни део рада посвећен је ригорозном аналитичком извођењу хиперболичке метрике и растојања, где смо показали да се Риманов диференцијални приступ, пројективна дворамера и алгебарска Мебијусова инваријанта заправо свODE на потпуно исту математичку истину. На крају, класификацијом еписфера (хиперболичких сфера, орисфера и еквидистантних површи) заокружили смо слику о унутрашњој геометрији овог простора.

Иако су Поенкареов модел и хиперболичка геометрија настали у 19. веку из чисто теоријских побуда – као одговор на вековно питање о Еуклидовом петом постулату – занимљиво је осврнути се на то колико су ови концепти данас актуелни. Последњих неколико година сведоци смо праве ренесансе хиперболичке геометрије у областима вештачке интелигенције (AI) и машинског учења (Machine Learning).

Разлог за ово лежи управо у природи хиперболичке метрике коју смо анализирали. У савременим моделима машинског учења, један од највећих изазова је како прецизно сместити (уложити) велике скупове хијерархијски организованих података у неки непрекидан простор. Када се за то користи класичан еуклидски простор, сложени подаци (попут стабала или мрежа) се

често „гужвају” како њихова структура постаје разгранатија, чиме се губи прецизност модела.

Са друге стране, показало се да хиперболички простор, због своје специфичне закривљености и метрике у близини апсолуте, пружа природан оквир за овакве структуре. Употреба хиперболичких неуронских мрежа и такозваних Поенкареових улагања (Poincaré embeddings) омогућава да се хијерархијски односи науче много ефикасније и са знатно мањим бројем димензија. Притом, затворена аналитичка формула за хиперболичко растојање коју смо извели у раду представља нумерички стабилан темељ који се данас директно користи за рачунање у најмодернијим системима рачунарског вида и дубоког учења.

Све ово нам показује да хиперболичка геометрија у Поенкареовом моделу одавно није само прелепа, апстрактна математичка теорија, већ и изузетно моћан инжењерски апарат који нам помаже да решавамо неке од најсложенијих проблема у савременој технологији.

Литература

- [1] J. G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, 2. издање, Graduate Texts in Mathematics **149**, Springer, New York, 2006.
- [2] З. Лучић, *Еуклидска и хиперболичка геометрија*, Математички факултет, Универзитет у Београду, Београд, 1997.
- [3] L. V. Ahlfors, *Möbius Transformations in Several Dimensions*, Ordway Professorship Lectures in Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, 1981.
- [4] М. Антић, *Нееуклидска геометрија, скрипта* Математички факултет, Универзитет у Београду.
- [5] M. Nickel, D. Kiela, *Poincaré Embeddings for Learning Hierarchical Representations*, Advances in Neural Information Processing Systems, Vol. 30, Curran Associates, Inc., 2017, pp. 6338--6347.
- [6] Dubrovin, B. A. and Fomenko, A. T. and Novikov, S. P. *Modern Geometry--Methods and Applications: Part I*, Springer-Verlag, 2nd edition, 1992, § 15, str. 138ff.