

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Иван Турић

ДЕКОМПОЗИЦИЈА ОТВОРЕНЕ КЊИГЕ

мастер рад

Београд, 2026.

Ментор:

проф. др Игор Уљаревић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Дарко Милинковић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Александра Маринковић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Садржај

Предговор	1
1 Увод	2
2 Отворене књиге на контактним многострукостима	12
2.1 Тополошке отворене књиге	12
2.2 Контактне отворене књиге	17
3 Егзистенција контактних отворених књига	30
3.1 Квази-контактне структуре	30
3.2 Идеје из линеарне алгебре	33
3.3 Асимптотски холоморфна сечења	36
3.4 Доказ Теореме Жируа	39
4 Унутрашња структура контактних отворених књига	43
4.1 Идеални Лиувилкови домени	43
4.2 Лиувилкове отворене књиге	49
4.3 Идеалне Жируове форме	59
5 Отворене књиге и уредљивост	64
5.1 Контактна Хоферова норма	64
5.2 Уредљивост	68
5.3 Лабаве Лежандрове подмногострукости	70
5.4 Уредљивост и контактна Хоферова норма	72
6 О класификацији контактних структура у вишим димензијама	85
6.1 Заврнутост	85
6.2 Попуњивост	87
6.3 Буржоаве контактне структуре	88
6.4 Неколико примера	92
Литература	99

Предговор

Рад пред нама писан је у целости из перспективе почетника у области, са надом да може бити од користи некоем ко отпочиње са истраживањем контактне геометрије и топологије. Сходно томе, он садржи и велик број референци, које се понекад односе на недостајуће детаље у раду, али чешће представљају предлог за даље читање.

Велику захвалност дугујем свом ментору, проф. др Игору Уљаревићу, који ме је упутио на ову тему, и чије је разумевање мојих проблема у критичним тренуцима приликом израде тезе било готово тренутно, а савети и сугестије увек изванредни. Захваљујем се такође и члановима комисије, проф. др Дарку Милинковићу, чија су предавања један од битнијих узрока моје жеље да се бавим математиком уопштено, као и конкретном облашћу, и проф. др Александри Маринковић, на корисним дискусијама у вези тезе, као и извршном курсу на мастер студијама, на тему симплектичке и контактне геометрије.

Глава 1

Увод

У уводном поглављу пред нама желимо да укратко изложимо, на известан начин полазне, појмове који ће бити од интереса, што као објекат за који постављамо одређено питање, што као алат у раду са истим. Сходно томе, увод је подељен у неколико целина, у којима ћемо редом говорити о појмовима контактних многострукости, контактне повезане суме двеју контактних многострукости, а коју ћемо касније у тези искористити као једну од интерпретација, или боље речено алтернативних погледа, на конструкцију коју ћемо након што дефинишемо појам отворене књиге, централни у овој тези, природно добити, те специјалних симплектичких структура које зовемо Лиувилевим и Вајнстиновим

Контактне многострукости

Дефиниција 1. Контактна многострукост је пар (M, ξ) , где је M глатка многострукост, а ξ дистрибуција кодимензије 1, коју називамо контактна структура, локално задата формом $\alpha \in \Omega^1(U)$, за коју је $d\alpha|_{\xi}$ недегенерисано – овај услов често се у литератури среће под именом *максимална неинтеграбилност*. Уколико постоји $\alpha \in \Omega^1(M)$ која глобално задаје ξ , кажемо да је ξ кооријентабилно.

Лема 2. Нека је M многострукост димензије m , $\alpha \in \Omega^1(M)$ нигде нула и $\xi = \ker \alpha$. Следећа тврђења су еквивалентна

- (1) Форма $d\alpha|_{\xi}$ је недегенерисана, односно, (M, ξ) је контактна многострукост.
- (2) Тангентно раслојење над M се цепа као $TM = \ker d\alpha \oplus \ker \alpha$.
- (3) Постоји $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ такво да је $m = 2n + 1$ и $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$.

Доказ. (1) $\Rightarrow$ (2): За почетак, приметимо да како је антисиметрична форма нужно парног ранга, можемо закључити да је ξ раслојење парне димензије, те да постоји $n \in \mathbb{N}$ такво да је $m = 2n + 1$. Покажимо $\ker d\alpha \cap \ker \alpha = 0$. Уочимо произвољан тангентни вектор $v \in \ker d\alpha \cap \ker \alpha$. Тада је $d\alpha(v, \cdot) = d\alpha|_{\ker \alpha}(v, \cdot) = 0$, па је $v = 0$. Дакле, важи $\dim(\ker d\alpha) + \dim(\ker \alpha) \leq m$, па како је $\dim(\ker \alpha) = m - 1$, а $d\alpha$ не може бити недегенерисано на многострукости непарне димензије, мора бити $\dim(\ker d\alpha) = 1$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Како је $TM = \ker d\alpha \oplus \ker \alpha$, закључујемо да су $\alpha|_{\ker d\alpha}$ и $d\alpha|_{\ker \alpha}$ недегенерисане, и последично $\dim(\ker \alpha) = 2n$, за неко $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Такође, $(d\alpha)^n$ је форма запремине на $\ker \alpha$, па је $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ форма запремине на M .

(3) $\Rightarrow$ (1): За $v \in \ker \alpha$, из $v \in \ker d\alpha|_{\ker \alpha}$, добијамо $\iota_v(\alpha \wedge (d\alpha)^n) = 0$, одакле следи $v = 0$. $\square$

Уколико хоћемо да нагласимо да нам је битна конкретна контактна форма, контактну многострукост можемо означити и као пар (M, α) . Услов кооријентабилности геометријски представља могућност глатког избора позитивне и негативне стране хиперравни ξ_p у свакој тачки многострукости. У том контексту, контактне многострукости ћемо звати кооријентисаним, ако подразумевамо да је такав избор направљен. Сходно томе, контактну форму α ћемо звати позитивном, односно негативном. Тривијално је видети да се сваке две позитивне контактне форме α_1 и α_2 разликују до на позитиван конформални фактор, односно, да постоји глатко $f: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, такво да је $\alpha_2 = f\alpha_1$.

Дефиниција 3. Ребово поље контактне форме α , у ознаци R_α , представља јединствено векторско поље које задовољава $\iota_{R_\alpha}(d\alpha) = 0$ и услов нормираниости $\alpha(R_\alpha) = 1$.

Услов позитивности контактне форме сада можемо интерпретирати управо тако да њено Ребово поље у свакој тачки буде са одговарајуће стране контактне хиперравни.

Лема 4. Ребово векторско поље чува контактну форму.

Доказ. Употребом Картанове формуле, одмах добијамо

$$\mathcal{L}_{R_\alpha} \alpha = d(\iota_{R_\alpha} \alpha) + \iota_{R_\alpha} d\alpha = d1 + 0 = 0.$$

$\square$

Дефиниција 5. Контактморфизам $\varphi: (M, \xi_M) \rightarrow (N, \xi_N)$ је дифеоморфизам који чува контактну структуру, односно задовољава $\varphi_*\xi_M = \xi_N$. Уколико су додатно фиксирани и контактне форме α_M за ξ_M и α_N за ξ_N , за φ кажемо да је строг контактморфизам, ако је задовољено $\varphi^*\alpha_N = \alpha_M$.

Свакој контактної многострукости (M, α) , можемо придружити и симплектичку многострукост $(M \times \mathbb{R}, d(e^t\alpha))$, у ознаци SM , коју зовећмо њеном симплектизацијом. Алтернативно, симплектизацију можемо видети и као подмногострукост котангентног раслојења

$$SM = \{(p, \beta) \mid \ker \beta = \xi_p, \beta > 0\} \subset T^*M,$$

на којој је симплектичка форма дата помоћу рестрикције таутолошке форме λ_{can} .

Важан пример подмногострукости контактних многострукости су *Лежандрове подмногострукости*, пандан Лагранжевим у симплектичкој геометрији.

Дефиниција 6. За подмногострукост L , контактне многострукости (M, ξ) кажемо да је изотропна, ако за све $p \in L$ важи $T_pL \subset \xi_p$. Изотропне подмногострукости максималне димензије називамо Лежандровим.

Уз претходну дефиницију дугујемо и објашњење. Наиме, ако је α контактна форма на (M^{2n+1}, ξ) , онда услов $T_pL \subset \xi_p$ за све $p \in L$ повлачи $\alpha|_L \equiv 0$. Стога је и $d\alpha|_L \equiv 0$, па је за све $p \in L$, тангентни простор T_pL изотропни потпростор симплектичког простора $(\xi_p, d\alpha_p)$. Закључујемо да L не може бити димензије веће од n . Тривијално је видети да се свака Лежандрова подмногострукост подиже до Лагранжеве подмногострукости у симплектизацији.

Дефиниција 7. За векторско поље X , на контактної многострукости (M, α) , кажемо да је контактнo, ако је његов ток сачињен од контактморфизама.

На основу претходних дискусија, ако са φ_t означимо ток векторског поља X , ова дефиниција одговара томе да постоји, глатка по t фамилија f_t , глатких функција, за које је $\varphi_t^*\alpha = f_t\alpha$. Диференцирањем ове једнакости по t , добијамо еквивалентан услов $\mathcal{L}_X\alpha = h\alpha$, за неко $h \in C^\infty(M)$. Додатно, ако је $h \equiv 0$, имамо да је ток φ_t , фамилија строгих контактморфизама.

Дефиниција 8. Контактна подмногострукост од (M, ξ_M) је глатка подмногострукост N , заједно са контактном структуром ξ_N , за коју важи $\xi_N = TN \cap \xi_M$.

Нека је S оријентисана хиперповрш у контактної многострукости $(M^{2n+1}, \xi = \ker \alpha)$. На околини од S , дифеоморфної са $S \times \mathbb{R}$, при чему S идентификујемо са $S \times \{0\}$, контактну форму α можемо записати као

$$\alpha = \beta_r + u_r dr,$$

где је $(\beta_r)_{r \in \mathbb{R}}$ глатка фамилија 1-форми, а $(u_r)_{r \in \mathbb{R}}$ глатка фамилија глатких функција. Контактни услов може се записати са

$$\begin{aligned} 0 &\neq (\beta_r + u_r dr) \wedge \left(d\beta_r - \frac{\partial \beta_r}{\partial r} \wedge dr + du_r \wedge dr \right)^n \\ &= \left(-n \beta_r \wedge \frac{\partial \beta_r}{\partial r} + n \beta_r \wedge du_r + u_r d\beta_r \right) \wedge (d\beta_r)^{n-1} \wedge dr. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Пресек $TS \cap \xi|_S$ одређује дистрибуцију потпростора од TS . У претходном запису, она је дата са β_0 , прецизније ако за $p \in S$ важи $\beta_0(p) = 0$, онда је реч о читавом $T_p S$, док ако је $\beta_0(p) \neq 0$, имамо да је $T_p S \cap \xi_p$ кодимензије 1 у $T_p S$. У другом случају, можемо посматрати $d\alpha$ -ортогонални комплемент $(T_p S \cap \xi_p)^\perp$ који ће бити једнодимензионални потпростор од $T_p S \cap \xi_p$.

Дефиниција 9. Карактеристична фолијација S_ξ , хиперповрши S у (M, ξ) је сингуларна једнодимензионална фолијација дефинисана дистрибуцијом $(TS \cap \xi|_S)^\perp$.

Лема 10. Нека су β_0 , S , α и ξ као у претходној дискусији, те нека је Ω форма запремине на S . Тада је S_ξ дефинисано векторским пољем X које задовољава

$$\iota_X \Omega = \beta_0 \wedge (d\beta_0)^{n-1}.$$

Доказ. За почетак, проверимо да важи $\beta_0 \wedge (d\beta_0)^{n-1} \neq 0$, где год је $\beta_0 \neq 0$. Заиста, претпоставимо ли супротно, из (1.1) добијамо $(d\beta_0(p))^n \neq 0$, те на $\ker \beta_0(p)$, који је кодимензије 1 у $T_p S$, важи да је $d\beta_0(p)$ ранга $2n - 2$ и последично $\beta_0(p) \wedge (d\beta_0(p))^{n-1} \neq 0$.

Даље, уочимо

$$0 = \iota_X (\iota_X \Omega) = \beta_0(X) (d\beta_0)^{n-1} - (n-1) \beta_0 \wedge \iota_X d\beta_0 \wedge (d\beta_0)^{n-2}, \quad (1.2)$$

те посматрајући спољашњи производ са β_0 добијамо

$$\beta_0(X) \beta_0 \wedge (d\beta_0)^{n-1} = 0.$$

Узимајући у обзир претходно показано закључујемо $X \in \ker \beta_0$.

Преостаје да покажемо да за све $p \in S$, за које је $\beta_0(p) \neq 0$, важи да је за све $v \in T_p S \cap \xi_p$, $d\beta(X, v) = 0$.

На основу (1.2) и $X \in \ker \beta_0$ важи

$$\beta_0 \wedge \iota_X d\beta_0 \wedge (d\beta_0)^{n-2} = 0. \quad (1.3)$$

Случај $n = 1$ је тривијалан, те претпостављамо $n \geq 2$. Контракција једнакости (1.3) са v даје

$$-d\beta_0(X, v) \beta_0 \wedge (d\beta_0)^{n-2} + (n-2) \beta_0 \wedge \iota_X d\beta_0 \wedge \iota_v d\beta_0 \wedge (d\beta_0)^{n-3} = 0,$$

те уколико све помножимо слева са $d\beta_0$, те искористимо (1.3), добијамо

$$d\beta_0(X, v) \beta_0 \wedge (d\beta_0)^{n-1} = 0,$$

одакле следи тврђење. □

Пример 11. Уколико је (W, λ) тачна симплектичка многострукост има смисла говорити о њеној „контактизацији“. Наиме, јасно је да је са $\alpha = \lambda + dt$ задата форма на $W \times \mathbb{R}$ која испуњава контактни услов. Интересантно је тада посматрати тачну Лагранжеву подмногострукост $L \subset W$, односно уложену подмногострукост L , такву да постоји $f \in C^\infty(L)$ за које је $\lambda|_L = df$. Тада је са

$$\Lambda = \{(p, -f(p)) \mid p \in L\}$$

дефинисана једна уложена подмногострукост у $W \times \mathbb{R}$, која задовољава

$$\alpha|_\Lambda = \lambda|_\Lambda + dt|_\Lambda = df - df = 0,$$

односно реч је о Лежандровој подмногострукости у $(W \times \mathbb{R}, \lambda + dt)$.

Контактна повезана сума

У овом одељку изложићемо конструкцију контактне повезане суме две контактне многострукости исте димензије, на елементаран начин. У литератури, контактна повезана сума углавном се среће у оквиру општије дискусије о контактної хирургији. За овај општији третман, упућујемо на [47].

Користићемо ротационо симетричну контактну форму

$$\alpha_{\text{rot}} := dz + \sum_{j=1}^n (x_j dy_j - y_j dx_j) = dz + \sum_{j=1}^n r_j^2 d\varphi_j,$$

на $\mathbb{R}^{2n+1}$, где (r_j, φ_j) по паровима представљају поларне координате за пар (x_j, y_j) .

За дифеоморфизам дат са

$$\Psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) = \left(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, 2z + \sum_{j=1}^n x_j y_j \right)$$

важи $\Psi^* \alpha_{\text{rot}} = 2\alpha_{\text{std}}$, па је контактна структура $\xi_{\text{rot}} = \ker \alpha_{\text{rot}}$ контактоморфна стандардној контактної структури ξ_{std} на $\mathbb{R}^{2n+1}$. Векторско поље дато са $V(x, y, z) = (x, y, 2z)$ је контактнo за ξ_{rot} јер важи $\mathcal{L}_V \alpha_{\text{rot}} = \alpha_{\text{rot}}$. Посматрајмо јединичну сферу

$$S^{2n} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid \|x\|^2 + \|y\|^2 + z^2 = 1\},$$

и за $t \in \mathbb{R}$ поставимо $S_t := \varphi_V^t(S^{2n})$, где је φ_V^t ток векторског поља V .

Лема 12. Постоји контактоморфизам од $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{\text{rot}})$ који за све $t \in \mathbb{R}$ слика S_t у S_{-t} .

Доказ. Видети Лему 8.8 у [10]. □

Посматрајмо две контактне многострукости (M_i, ξ_i) и одаберимо две карте дате контактоморфизмима $\varphi_i: (\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{\text{rot}}) \hookrightarrow (M_i, \xi_i)$, $i = 1, 2$. За $t \in \mathbb{R}$, уведемо ознаку $B_t = \varphi_V^t(B^{2n+1})$, где је B^{2n+1} отворена јединична лопта са центром у координатном почетку, граница од $\overline{B_t}$ је тада S_t . Нека је са Ψ означен контактоморфизам из претходне леме. Дифеоморфизам

$$\varphi_2 \circ \Psi \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(\mathbb{R}^{2n+1}) \rightarrow \varphi_2(\mathbb{R}^{2n+1})$$

се рестрихује на дифеоморфизам

$$\Phi: \varphi_1(B_1 \setminus \overline{B_{-1}}) \rightarrow \varphi_2(B_1 \setminus \overline{B_{-1}}).$$

Са $M_1 \# M_2$ означимо глатку многострукост добијену од

$$(M_1 \setminus \varphi_1(\overline{B_{-1}})) \cup (M_2 \setminus \varphi_2(\overline{B_{-1}})),$$

идентификујући $\varphi_1(B_1 \setminus \overline{B_{-1}})$ и $\varphi_2(B_1 \setminus \overline{B_{-1}})$ помоћу Φ . Како је Ψ контакто-морфизам, контактну структуру на $M_1 \# M_2$ можемо дефинисати са

$$\xi_1 \# \xi_2 = \begin{cases} \xi_1, & \text{на } M_1 \setminus \varphi_1(\overline{B_{-1}}), \\ \xi_2, & \text{на } M_2 \setminus \varphi_2(\overline{B_{-1}}). \end{cases}$$

Сферу S_0 зовемо *раздвајајућом сфером*. Независно од направљених избора, овако конструисане контактне повезане суме све су међусобно изотопне. Конкретну конструкцију суштински одређује раздвајајућа сфера.

Лиувилони домени

Дефиниција 13. Лиувилова форма λ , на симплектичкој многострукости (W, ω) , је 1-форма која задовољава $d\lambda = \omega$. Јединствено векторско поље на W , које задовољава $\iota_{X_\lambda} \omega = \lambda$, зовемо Лиувилевим векторским пољем.

По Картановој формули, за Лиувилу форму λ и њој придружено Лиувилово векторско поље X_λ , имамо

$$\mathcal{L}_{X_\lambda} \omega = d(\iota_{X_\lambda} \omega) + \iota_{X_\lambda} (d\omega) = d\lambda = \omega,$$

стога, ток φ_t од X_λ задовољава $\varphi_t^* \omega = e^t \omega$, па можемо рећи да ω расте дуж тока.

Једноставном применом Стоксове теореме добијамо

$$0 < \int_W \omega^n = \int_W d(\lambda \wedge \omega^{n-1}) = \int_{\partial W} \lambda \wedge \omega^{n-1},$$

и закључујемо да не постоје затворене симплектичке многострукости које допуштају глобално дефинисану Лиувилу форму.

Дефиниција 14. Лиувил домен је компактна симплектичка многострукост са границом која допушта Лиувилу форму, чије Лиувилово векторско поље, дуж границе, показује трансверзално споља.

Наведени услов трансверзалности је веома природан. Наиме, ако уведемо ознаку $\alpha = \lambda|_{\partial W}$, добијамо

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} = \iota_{X_\lambda} d\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1} = \frac{1}{n} \iota_{X_\lambda} (d\lambda)^n,$$

те како је $(d\lambda)^n$ запреминска форма на W , трансверзалност X_λ на ∂W показује да је α контактна форма на ∂W . Додатно, услов да X_λ показује споља, гарантује да се оријентација на ∂W као границе од W , и она дефинисана са $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ слажу.

Друга важна последица овакве дефиниције је то што нам омогућава да, на изванштан начин, продужимо W дуж линија тока Лиувиловог векторског поља, те добијемо тачну симплектичку многострукост $(\widehat{W}, \widehat{\lambda})$, коју зовемо комплетирањем Лиувиловог домена. Прва опсервација је да је домен тока поља X_λ неограничен слева. Скуп тачака $p \in W$, за које $\varphi_t(p)$ није дефинисано за све $t \in \mathbb{R}$, је тачно скуп оних тачака кроз које пролази линија тока која у коначном времену стиже до ∂W . Идеја је да залепимо симплектичку многострукост на ∂W споља, тако да продужимо и домене ових линија тока на читаво $\mathbb{R}$.

Да бисмо ово урадили, посматрајмо симплектизацију границе Лиувиловог домена (W, λ) , односно многострукост $(\partial W \times \mathbb{R}, d(e^t \lambda|_{\partial W}))$. Можемо посматрати улагање

$$\begin{aligned} \Phi: \partial W \times \mathbb{R}_{\leq 0} &\rightarrow W \\ (p, t) &\mapsto \varphi_t(p), \end{aligned}$$

које је према претходној дискусији добро дефинисано. Тврдимо да је $\Phi^* \lambda = e^t \lambda|_{\partial W}$. Да бисмо ово проверили, фиксирајмо $(p, t) \in \partial W \times \mathbb{R}_{\leq 0}$ и $(u, v) \in T_{(p,t)}(\partial W \times \mathbb{R}_{\leq 0}) = T_p \partial W \oplus \mathbb{R}$, тада

$$\begin{aligned} \Phi^* \lambda(u, v) &= \lambda(D\Phi(p, t)(u, v)) \\ &= \lambda(D\Phi(p, t)(u, 0)) + \lambda(D\Phi(p, t)(0, v)) \\ &= u\lambda(X_\lambda(\varphi_t(p))) + \lambda(D\varphi_t(p)(v)) \\ &= u\iota_{X_\lambda} \omega(X_\lambda(\varphi_t(p))) + \lambda(D\varphi_t(p)(v)) \\ &= u\omega(X_\lambda(\varphi_t(p)), X_\lambda(\varphi_t(p))) + \lambda(D\varphi_t(p)(v)) \\ &= \varphi_t^* \lambda(v) \\ &= e^t \lambda(v). \end{aligned}$$

Дефиниција 15. Комплетирањем Лиувиловог домена (W, λ) зовемо тачну симплектичку многострукост $(\widehat{W}, \widehat{\lambda})$, конструисану на следећи начин. Глатко, $\widehat{W}$ је добијено лепљењем W и $\partial W \times \mathbb{R}$, помоћу улагања Φ , прецизније

$$\widehat{W} = W \sqcup \partial W \times \mathbb{R} / (p, t) \sim \varphi_t(p), \text{ за } p \in \partial W, t \leq 0.$$

Форма $\widehat{\lambda}$ је тада јединствена форма, која за улагања $i_W: W \hookrightarrow \widehat{W}$ и $i_{\partial W \times \mathbb{R}}: \partial W \times \mathbb{R} \hookrightarrow \widehat{W}$, задовољава

$$\begin{aligned} i_W^* \widehat{\lambda} &= \lambda \\ i_{\partial W \times \mathbb{R}}^* \widehat{\lambda} &= e^t \lambda|_{\partial W}. \end{aligned}$$

Њен извод дефинише симплектичку форму на $\widehat{W}$ по конструкцији, а њена глаткост проистиче из доказане чињенице $\Phi^* \lambda = e^t \lambda|_{\partial W}$.

За алтернативан поглед на комплетирање видети Пример 65.

Лиувилове и Вајнстинове многострукости

Нека је (W, λ) тачна симплектичка многострукост. На њој постоји јединствено векторско поље X_λ задато једначином $i_{X_\lambda} \omega = \lambda$ које зовео Лиувилевим векторским пољем.

Дефиниција 16. Тачну симплектичку многострукост (W, λ) зовео Лиувилевом многострукошћу ако су задовољени услови:

- (1) Ток φ_t Лиувиловог векторског поља је комплетан,
- (2) Постоји отворен скуп $U \subset W$ са компактним затворењем и глатком границом такав да

$$W = U \cup \bigcup_{t \geq 0} \varphi_t(\partial U).$$

Можемо дефинисати и скелет Лиувилове многострукости (W, λ) са

$$\text{Skel}(W, \lambda) := \bigcap_{t < 0} \varphi_t(\overline{U}).$$

Скелет не зависи од избора скупа U , док је рестрикција форме λ на ∂U контактна форма α . Лиувилово векторско поље дефинише слободно $\mathbb{R}$ -дејство на $W \setminus \text{Skel}(W, \lambda)$, а количник при овом дејству је многострукост M дифеоморфна са ∂U . На њој зато постоји контактна форма за коју важи да иако она сама зависи од избора U контактна структура $\xi = \ker \alpha$ не зависи. Другим речима, $W \setminus \text{Skel}(W, \lambda)$ је симплектоморфно симплектизацији од (M, ξ) . Због ове чињенице, (M, ξ) зовео идеалном контактном границом многострукости (W, λ) .

Пример 17. Посматрајмо Лиувилу многострукост $(\mathbb{R}^{2n}, \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i dy_i - y_i dx_i))$. Очигледно важи да је Лиувилово векторско поље дато са

$$X = \frac{1}{2} \sum (x_i \partial_{x_i} + y_i \partial_{y_i}).$$

Након канонске идентификације $T_p \mathbb{R}^{2n}$ и $\mathbb{R}^{2n}$ једначина која задаје његов ток је

$$\frac{d}{dt} \varphi_t(p) = \frac{1}{2} p$$

па је ток дат са $\varphi_t(p) = e^{\frac{t}{2}} p$. Одавде је јасно да за U можемо одабрати било који диск са центром у координатном почетку. Према томе важи

$$\text{Skel}(\mathbb{R}^{2n}, \lambda) = \{0\}, \quad (M, \xi) \cong (S^{2n-1}, \xi_{\text{std}}),$$

односно кажемо да је стандардна контактна сфера $(S^{2n-1}, \xi_{\text{std}})$ идеална контактна граница од $(\mathbb{R}^{2n}, \lambda)$.

Дефиниција 18. Лиувилу многострукост (W, λ) на којој постоји Морсова функција $F : W \rightarrow \mathbb{R}$ таква да постоје $\delta > 0$ и нека Риманова метрика на W за које је задовољено

$$dF(X_\lambda) \geq \delta(|X_\lambda|^2 + |dF|^2).$$

зовемо *Вајнстинова многострукост*.

Значајна новина коју доносе Вајнстинове многострукости огледа се у томе да док Лиувилу многострукости могу имати неповезану границу као и скелет димензије веће од n , граница Вајнстинове многострукости димензије веће или једнаке од четири је повезана, а скелет је унија изотропних подмногострукости које су стабилне подмногострукости критичних тачака Лиувиловог векторског поља (видети [11]). За Вајнстинову многострукост кажемо да је коначног типа ако Морсова функција F има коначно много критичних тачака. Тада је скелет L изотропни комплекс:

$$L^0 \subset \dots \subset L^n = L,$$

где је $L^i \setminus L^{i-1}$ изотропна подмногострукост димензије i . Критичним делом скелета зовемо $L^{\text{crit}} = L \setminus L^{n-1}$.

Глава 2

Отворене књиге на контактним многострукостима

2.1 Тополошке отворене књиге

Декомпозиција отворене књиге је појам који постоји и изван контактне геометрије. Реч је превасходно о тополошкој конструкцији, те ово поглавље отпочињемо детаљним излагањем ове дефиниције.

Постоји више еквивалентних начина да опишемо шта за дату многострукост значи да има декомпозицију отворене књиге и у зависности од потребе можемо се послужити било којим од њих. Један од њих изложен је у следећих неколико дефиниција.

Дефиниција 19. Апстрактна отворена књига је пар (P, Ψ) где је *страница* P компактна многострукост са границом без затворених компоненти, а *монодромија* Ψ дифеоморфизам од P који се поклапа са идентитетом на некој околини границе. Додатно, за две монодромије кажемо да су изотопне ако су изотопне као дифеоморфизми који се подударају са идентитетом у околини границе странице.

За дату апстрактну отворену књигу (P, Ψ) можемо конструисати *торус пресликавања* $P(\Psi)$, као количнички простор

$$P(\Psi) = P \times [0, 2\pi] /_{(x, 2\pi) \sim (\Psi(x), 0)}.$$

Пошто је Ψ тривијално у околини границе, $P(\Psi)$ је многострукост са границом $\partial P(\Psi) \cong \partial P \times S^1$. Стога можемо залепити $P(\Psi)$, дуж границе, са $\partial P \times D^2$ на природан начин. Добијену затворену многострукост означавамо са $OB(P, \Psi)$.

Дефиниција 20. За затворену многострукост M и апстрактну отворену књигу (P, ψ) кажемо да је (P, ψ) *декомпозиција отворене књиге* многострукости M ако је $M \cong OB(P, \psi)$.

Да бисмо стекли интуицију о претходној дефиницији размотримо неколико једноставних примера у ниским димензијама.

Пример 21. Поставимо $P = [0, 2\pi]$ и $\Psi = \text{id}$. Тада је

$$P(\text{id}) = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] /_{(x, 2\pi) \sim (x, 0)}$$

цилиндар са границом $\{0\} \times S^1 \sqcup \{2\pi\} \times S^1$. Идентификација у дефиницији $OB(P, \Psi)$ налаже да $P(\text{id})$ треба залепити на $\{0, 2\pi\} \times D^2$ идентификујући $\partial(P(\text{id})) = \{0, 2\pi\} \times S^1$ са $\partial(\{0, 2\pi\} \times D^2) = \{0, 2\pi\} \times S^1$. Ова конструкција даје цилиндар са два поклопца, што је затворена многострукост хомеоморфна са S^2 . Испоставља се да је S^2 заправо једина оријентисана 2-многострукост која има декомпозицију отворене књиге. Ово ћемо показати након што дамо следећу дефиницију отворене књиге.

Пример 22. Размотримо случај $P = D^2$ и $\Psi = \text{id}$. Тада је

$$P(\Psi) = D^2 \times [0, 2\pi] /_{(x, 2\pi) \sim (x, 0)}$$

пун торус $D^2 \times S^1$ са границом $\partial(P(\Psi)) = T^2 = S^1 \times S^1$. Пажљивим посматрањем лепљења у дефиницији $OB(P, \Psi)$ примећујемо да $P(\Psi)$ треба залепити са $\partial D^2 \times D^2 = S^1 \times D^2$ дуж заједнице границе $S^1 \times S^1$ идентификацијом

$$\rho: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1, \quad \rho(\theta, \phi) = (\theta, \phi),$$

дакле, меридијане првог пуног торуса лепимо за паралеле другог и обратно. Реч је управо о лепљењу које имамо у познатој декомпозицији

$$S^3 = \partial(D^4) = \partial(D^2 \times D^2) = (D^2 \times S^1) \sqcup_{\rho} (S^1 \times D^2),$$

па је добијена многострукост $OB(D^2, \Psi)$ дифеоморфна са S^3 .

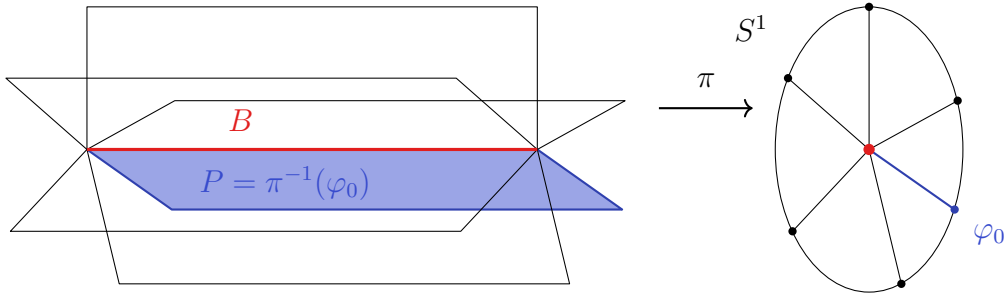
Дефиниција 23. Декомпозиција отворене књиге многострукости M је пар (B, π) где су B подмногострукост од M кодимензије 2 и $\pi: M \setminus B \rightarrow S^1$ локално тривијална глатка фибрација такви да постоји околина $U \cong B \times D^2$ од

B са поларним координатама на D^2 за коју следећи дијаграм комутира

$$\begin{array}{ccc} U \setminus B & \longrightarrow & B \times (D^2 \setminus \{0\}) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \varphi \\ S^1 & \longrightarrow & S^1 \end{array} .$$

B зовемо *повезом* отворене књиге, U његовом адаптираном околином а $P_\varphi = \pi^{-1}(\varphi)$ страницом отворене књиге.

Пар (P, Ψ) из Дефиниције 20 зваћемо *апстрактном*, а пар (B, π) из Дефиниције 23 *конкретном* отвореном књигом.



Слика 2.1: Отворена књига у околини повеза

Напомена 24. Важно је приметити да је за π из претходне дефиниције услов да је локално тривијална фибрација еквивалентан томе да је π сурјективна субмерзија, односно, узимајући у обзир димензију кодомена, просто сурјективно пресликавање без критичних тачака.

Покажимо сада тврђење поменуто у Примеру 21.

Тврђење 25. S^2 је једина оријентисана 2-многострукост која има декомпозицију отворене књиге.

Доказ. Нека је M оријентисана 2-многострукост са декомпозицијом отворене књиге. Нека је B повез а P страница те декомпозиције. Тада имамо фибрацију

$$M \setminus B \longrightarrow S^1.$$

Пошто је $\chi(M \setminus B) = \chi(F) \cdot \chi(S^1)$, следи $\chi(M \setminus B) = 0$. Приметимо да је B 0-димензионална многострукост, дакле скуп дисјунктних тачака. Уклањањем околине сваке тачке из 2-многострукости M добијамо једну нову граничну компоненту. Користећи формулу за Ојлерову карактеристику површи

са границом добијамо

$$\chi(M \setminus B) = 2 - 2g - b = 0,$$

где g означава род а b број граничних компоненти. Једино решење ове једначине је $b = 2$ и $g = 0$. Дакле M мора бити S^2 . $\square$

Ипак, тврђење наведено у Примеру 21 и даље није доказано. Оно се односило на постојање декомпозиције отворене књиге у смислу Дефиниције 20. Стога, да бисмо овај прелазак између дефиниција оправдали излажемо доказ еквиваленције између претходне две дефиниције декомпозиције отворене књиге.

Тврђење 26. Затворена многострукост M допушта декомпозицију отворене књиге у смислу Дефиниције 20 ако и само ако допушта декомпозицију отворене књиге у смислу Дефиниције 23.

Доказ. Претпоставимо за почетак да је (P, ψ) апстрактна отворена књига за M , односно да постоји дифеоморфизам $f : M \rightarrow OB(P, \psi)$. Дефинишимо $B' = \partial P \times \{0\} \subset \partial P \times \{D^2\}$ и поставимо $\pi' : P(\psi) \rightarrow S^1$ да буде $\pi'(p, \varphi) = \varphi$, S^1 -координата на торусу пресликавања и $\pi' : \partial P \times \{D^2 \setminus \{0\}\} \rightarrow S^1$ да буде $\pi'(p, \rho, \theta) = \theta$, угаона координата у поларним координатама на пробушеном диску. Ово пресликавање је добро дефинисано, што следи из дефиниције идентификације граница којом конструишемо $OB(P, \psi)$, али и глатко, што најједноставније можемо видети посматрајући крагнасте околине граница двеју залепљених многострукости. Уочимо сада $B = f^{-1}(B')$ и $\pi : M \setminus B \rightarrow S^1$ дефинисано са $\pi = \pi' \circ f$. Узевши у обзир Напомену 24 јасно је да је π фибрација, те је на овај начин конструисана конкретна отворена књига на M .

Са друге стране, нека је на M већ дата конкретна отворена књига (B, π) . Приметимо да смо у преласку са апстрактне на конкретну отворену књигу повез конструисали управо као руб апстрактне странице P виђен у $\partial P \times D^2$, и да је управо $\partial P \times D^2$ нормална околина повеза из дефиниције 2 при овој конструкцији, те да би природно било да тражену апстрактну отворену књигу (P, ψ) конструишемо тако да важи $P \cong P_\varphi$. Кључно питање је заправо како конструисати монодрому. У ту сврху уочимо адаптирану околинду повеза

$U \cong B \times D^2$ као и векторско поље ∂_φ , а потом одаберимо Риманову метрику g на M у којој је ∂_φ ортогонално на странице унутар $B \times B(0, \frac{5}{6})$. Овакву метрику можемо конструисати као комбинацију произвољне Риманове метрике g_1 и експлицитно конструисане метрике g_2 на $B \times (D^2 \setminus \{0\})$ која задовољава тражено својство, где додатно можемо захтевати да се g поклапа са g_2 на $B \times B(0, \frac{2}{3})$. Нека је потом са X означено векторско поље на $M \setminus B$ ортогонално на странице отворене књиге, а које се јасно, по конструкцији g , поклапа са ∂_φ на $B \times B(0, \frac{2}{3})$. Према томе, његов ток, за време 2π , биће идентитета на $B \times B(0, \frac{2}{3})$ чија је рестрикција на $P := P_0 \setminus B \times B(0, \frac{1}{2})$, у ознаци $\psi : P \rightarrow P$, управо тражена монодромија, таква да је очигледно $M \cong OB(P, \psi)$. $\square$

Ако кренемо од апстрактне отворене књиге (P, ψ) , конструишемо многострукост $OB(P, \Psi)$ са одговарајућом декомпозицијом отворене књиге, а затим из ње конструишемо нову апстрактну отворену књигу, на претходно описан начин, добијамо апстрактну отворену књигу са страницама $P' = P \cup \partial P \times [0, 1/2]$ и монодромијом Ψ' . Лако се види да је ова монодромија изотопна дифеоморфизму од P' добијеном продужењем од ψ на $\partial P \times [0, 1/2]$ идентитетом на $\partial P \times [0, 1/2]$. С друге стране, можемо показати да изотопне монодромије дају дифеоморфне отворене књиге.

Тврђење 27. Нека су (P, ψ_0) и (P, ψ_1) две апстрактне отворене књиге са изотопним монодромијама. Тада постоји дифеоморфизам Φ из $OB(P, \psi_0)$ у $OB(P, \psi_1)$ који странице индуковане декомпозиције отворене књиге на $OB(P, \psi_0)$ слика на странице декомпозиције отворене књиге на $OB(P, \psi_1)$.

Доказ. Нека је ψ_t изотопија од идентитета до $\psi_1^{-1} \circ \psi_0$ и $\mu : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 1]$ глатка, монотонно растућа функција једнака нули у околини 0 и јединици у околини 2π . Дефинишимо пресликавање

$$\Phi : P \times [0, 2\pi] \rightarrow P \times [0, 2\pi], \quad (x, \phi) \mapsto (\psi_{\mu(\phi)}(x), \phi).$$

Овај дифеоморфизам има својство да је $\Phi(x, \phi) = (x, \phi)$ за мало ϕ , и $\Phi(\psi_0^{-1}(x), \phi) = (\psi_1^{-1}(x), \phi)$ када је ϕ близу 2π . Стога, Φ дефинише дифеоморфизам $\Phi : P(\psi_0) \rightarrow P(\psi_1)$.

Пошто се ψ_t поклапа са идентитетом на околини границе од P , Φ можемо глатко продужити идентитетом и на $\partial P \times D^2$. Тиме је доказ завршен. $\square$

Пример 28. Посматрајмо $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ и на њему задате $B = \{0\}$ и $\pi : \mathbb{C} \setminus B \rightarrow S^1$ дато са $\pi(z) = \frac{z}{|z|}$. Лако је проверити да је на овај начин задана декомпозиција отворене књиге, у смислу дефиниције 23, на $\mathbb{R}^2$ коју због њеног значаја, у који ћемо се сада уверити, зовемо стандардном отвореном књигом на $\mathbb{R}^2$ и обележавамо са $\mathcal{B}_{std}$.

Дефиниција 29. Декомпозиција отворене књиге многострукости M дата је пресликавањем $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ трансверзалним на $\mathcal{B}_{std}$.

На једноставан начин можемо видети да је ова дефиниција еквивалентна Дефиницији 23, а последично, у случају декомпозиције на затвореној многострукости, и Дефиницији 20. Наиме, ако је дато $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ трансверзално на $\mathcal{B}_{std}$ такво да $0 \in f(M)$, лако се проверава да је $(B = f^{-1}(\{0\}), \pi = \frac{f}{|f|})$ конкретна отворена књига на M . С друге стране, ако је (B, π) конкретна отворена књига на M , пресликавање из Дефиниције 29 можемо дефинисати са

$$f(p) = \begin{cases} e^{i\pi(p)}, & p \in M \setminus B \\ 0, & p \in B \end{cases}.$$

Његову добру дефинисаност и глаткост видимо из чињенице да у нормалној околини повеза $B \times D^2$, из Дефиниције 23 важи $f(p, z) = z$. Додатно, није тешко видети да је за дато (B, π) одговарајуће f –одговарајуће у овом контексту значи да је $\arg(f(p)) = \pi(p)$ – јединствено до на множење позитивном глатком функцијом. Због тога има смисла функцију из Дефиниције 29 звати *дефинишућом* функцијом одговарајуће отворене књиге.

2.2 Контактне отворене књиге

Као што смо видели, декомпозиција отворене књиге је есенцијално чисто тополошка структура. Међутим, следећом дефиницијом, а коју за контактне многострукости произвољне димензије даје Жиру у [21], добијамо начин да отворене књиге доведемо у везу са контактним структурама.

Дефиниција 30. Кажемо да је контактна структура ξ на M *адаптирана* отвореној књизи (B, π) и обратно, ако постоји контактна форма α за ξ са следећим својствима:

- α индукује контактну форму на B ,
- $d\alpha$ индукује симплектичку форму на унутрашњости сваке странице P_φ ,
- оријентација од B одређена контактном формом α подудар се са оријентацијом коју B наслеђује као граница симплектичке многострукости $(P_\varphi, d\alpha)$, за било које $\varphi \in S^1$.

За форму α такође кажемо да је адаптирана отвореној књизи (B, π) .

Неки аутори користе алтернативну дефиницију, коју и ми усвајамо као карактеризацију адаптираности контактне форме декомпозицији отворене књиге. Наиме, ако са R_α означимо Ребово векторско поље форме α претходни услови своде се на то да је (B, α_B) контактна многострукост, а Ребово векторско поље позитивно трансверзално на π , прецизније $d\pi(R_\alpha) > 0$, и тангентно на B . Приметимо да је за све $\varphi \in S^1$ многострукост $P_\varphi \cup P_{\varphi+\pi}$ затворена хиперповрш у M но, будући да се оријентације коју свака од појединачних симплектичких страница задаје на B слажу, у оквиру хиперповрши $P_\varphi \cup P_{\varphi+\pi}$ оне се не могу слагати, односно $(P_\varphi \cup P_{\varphi+\pi}, d\alpha)$ није симплектичка многострукост.

Пример 31. Посматрајмо S^3 унутар $\mathbb{C}^2$ дато са

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Стандардна контактна форма, у поларним координатама по факторима, дата је са

$$\alpha = r_1^2 d\varphi_1 + r_2^2 d\varphi_2.$$

Нека је $B = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid z_1 z_2 = 0\}$. Фибрацију на $S^3 \setminus B$ можемо дефинисати са

$$\pi: S^3 \setminus B \longrightarrow S^1, \quad (z_1, z_2) \longmapsto \frac{z_1 z_2}{|z_1 z_2|},$$

што је у поменутих поларним координатама записано са

$$\pi: (r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) \longmapsto \varphi_1 + \varphi_2 \in S^1.$$

Страница $P_\varphi = \pi^{-1}(\varphi)$ може се параметризовати са

$$(0, 1) \times S^1 \longrightarrow P_\varphi \subset S^3 \setminus B, \quad (r_1, \varphi_1) \longmapsto \left(r_1 e^{i\varphi_1}, \sqrt{1 - r_1^2} e^{i(\varphi - \varphi_1)} \right),$$

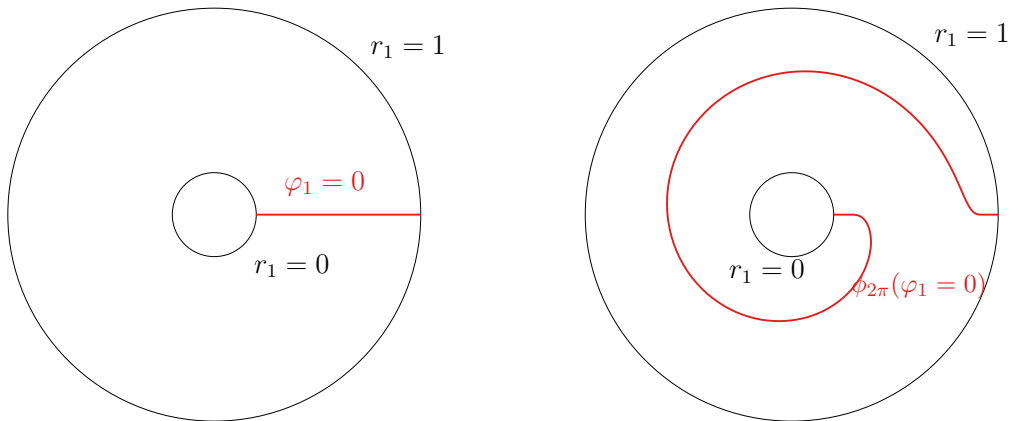
што узимајући у обзир све $\varphi \in S^1$, даје тривијализацију раслојења $S^3 \setminus B \xrightarrow{\pi} S^1$. У овим координатама се једноставно проверава да је α адаптирана контактна форма за отворену књигу (B, π) на S^3 .

Унутрашњост странице ове отворене књиге дифеоморфна је са $(0, 1) \times S^1$, те преостаје интересно питање, можемо ли експлицитно одредити монодромију? Испоставља се да је наш модел довољно пријатан за рад да ово питање добије веома једноставан одговор. Наиме, можемо илустровати поглед на доказ Тврђења 26 из обрнуте перспективе. Наиме, лако је приметити да ако узмемо опадајућу функцију $\delta: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, идентички једнаку 1 близу 0 и 0 близу 1, у поларним координатама можемо дефинисати ток $\phi_t: S^3 \rightarrow S^3$, са

$$\phi_t: \begin{cases} \varphi_1 \mapsto \varphi_1 + \delta(r_1)t, \\ \varphi_2 \mapsto \varphi_2 + (1 - \delta(r_1))t. \end{cases}$$

Како је $\pi \circ \phi_t = \pi + t$, важи да је ϕ_t трансверзално на странице отворене књиге (B, π) , како и да слика странице на странице. Додатно, близу $r_i = 0$, за $i = 1, 2$, важи $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t = \partial_{\varphi_i}$, те видимо да је монодромија дата баш са $\phi_{2\pi}$.

Да бисмо визуализовали лепљење у $OB(P_0, \phi_{2\pi})$ вратимо се на параметризацију странице дату помоћу (r_1, φ_1) . На Слици 2.2 приказана је страница отворене књиге са две обојене криве које ће бити идентификоване при лепљењу. Овако дефинисано пресликавање зовемо десно Деново увртање око $r_1 = \frac{1}{2}$.



Слика 2.2: Десно Деново увртање

Оно што отворене књиге чини веома снажним алатом за рад са контактним многострукостима је управо контрола коју можемо да остваримо на околини повеза.

Лема 32. Нека је (B, π) декомпозиција отворене књиге на M и α њој адаптирана контактна форма. Тада постоји околина U повеза B и дифеоморфизам $\psi : B \times D_\varepsilon^2 \rightarrow U$ такав да је

$$\psi^* \alpha = g \cdot (\alpha|_B + r^2 d\theta),$$

где функција $g : B \times D_\varepsilon^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ задовољава $\partial_r g < 0$ за $r > 0$.

Доказ. Идеја је да околину $B \times D_\varepsilon^2$ одредимо тако да радијални правац одговара карактеристичном правцу из Леме 10. За почетак, одаберимо фамилију $(\Omega_\theta)_{\theta \in S^1}$, форми запремине на страницама компатибилних са подразумевањем оријентацијом, датих са

$$\Omega_\theta = -(\cos \theta dx + \sin \theta dy) \wedge \alpha_B \wedge (d\alpha_B)^{n-1}.$$

Нека је $\beta_\theta = \alpha|_{TP_\theta}$, карактеристично векторско поље X_θ дато је тада са

$$\iota_{X_\theta} \Omega_\theta = -\beta_\theta \wedge (d\beta_\theta)^{n-1}.$$

Из дефиниције адаптираности форме α имамо да је X_θ трансверзално на B и показује ка унутрашњости странице. Како дуж B имамо читаву S^1 -фамилију векторских поља, није јасно да ток од X_θ дефинише улагање. Овај проблем решавамо разматрањем D^2 -фамилије векторских поља, датих са

$$\iota_{\tilde{X}_{re^{i\theta}}} (dx \wedge dy \wedge \alpha_B \wedge (d\alpha_B)^{n-1}) = (r \sin \theta dx - r \cos \theta dy) \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1},$$

где су (r, θ) поларне координате на D^2 .

Тврдимо да важи $\tilde{X}_{re^{i\theta}}|_{P_\theta} = r X_\theta$. Заиста, како је $TP_\theta = \ker(\sin \theta dx - \cos \theta dy)$, важи

$$(\sin \theta dx - \cos \theta dy)(X_\theta) = 0,$$

и последично

$$\begin{aligned} \iota_{X_\theta} ((\sin \theta dx - \cos \theta dy) \wedge \Omega_\theta) &= (\sin \theta dx - \cos \theta dy) \wedge \iota_{X_\theta} \Omega_\theta \\ &= (\sin \theta dx - \cos \theta dy) \wedge \beta_\theta \wedge (d\beta_\theta)^{n-1}. \end{aligned}$$

Како је $(\sin \theta \, dx - \cos \theta \, dy) \wedge \Omega_\theta = dx \wedge dy \wedge \alpha_B \wedge (d\alpha_B)^{n-1}$, ово је управо жељена једнакост.

Означимо са $\tilde{\psi}_t^{r,\theta}$ и ψ_t^θ токове векторских поља $\tilde{X}_{re^{i\theta}}$ и X_θ респективно. Преликавање

$$\begin{aligned} \Psi: B \times D_\varepsilon^2 &\longrightarrow B \times D^2 \\ (b, re^{i\theta}) &\longmapsto \tilde{\psi}_1^{r,\theta}(b, 0), \end{aligned}$$

дефинише улагање за ε довољно мало, при чему по конструкцији важи $\Psi(b, re^{i\theta}) = \psi_r^\theta(b, 0)$. У Лему 10 видели смо

$$\beta_\theta(X_\theta) = 0, \quad \mathcal{L}_{X_\theta}\beta_\theta = \mu_\theta\beta_\theta,$$

за неку глатку функцију $\mu_\theta: P_\theta \rightarrow \mathbb{R}$. Лако видимо $D\Psi(\partial_r|_{P_\theta}) = X_\theta$, па узевши претходне услове у обзир добијамо:

- $\Psi^*\alpha(\partial_r) = \alpha(D\Psi(\partial_r)) = \beta_\theta(X_\theta) = 0,$
- $\frac{d}{dr}\Psi^*\beta_\theta = \frac{d}{dr}(\psi_r^\theta)^*(\beta_\theta) = (\psi_r^\theta)^*(\mathcal{L}_{X_\theta}\beta_\theta) = (\psi_r^\theta)^*(\mu_\theta\beta_\theta).$

Закључујемо да постоји глатко $h: B \times D_\varepsilon^2 \rightarrow \mathbb{R}$, за које је $\alpha_B + h \, d\theta$ добро дефинисана 1-форма, која задовољава

$$\ker(\Psi^*\alpha) = \ker(\alpha_B + h \, d\theta),$$

односно $\Psi^*\alpha = \tilde{g}(\alpha_B + h \, d\theta)$, за неко $\tilde{g}: B \times D_\varepsilon^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

Доказ завршавамо стандардном применом Грејеве стабилности. Наиме, лако је проверити да, уз потенцијални избор мањег ε , линеарном интерполацијом добијамо фамилију контактних форми

$$\alpha_t = \alpha_B + (th + (1-t)r^2) \, d\theta, \quad t \in [0, 1],$$

па постоји изотопија ϕ_t , за коју је $\phi_1^*(\alpha_B + h \, d\theta) = \alpha_B + r^2 \, d\theta$. Додатно, ова изотопија генерисана је векторским пољем пропорционалним са ∂_r , па чува странице и фиксира B .

Постављајући $\psi = \Psi \circ \phi_1$, добијамо улагање које чува странице и задовољава $\psi^*\alpha = g(\alpha_B + r^2 \, d\theta)$. Једноставном рачунском провером може се утврдити да је услов адаптираности контактне форме посматраној отвореној књизи еквивалентан управо са $\partial_r g < 0$ за $r > 0$, те је доказ завршен. $\square$

Напомена 33. Сваке две контактне форме адаптиране истој отвореној књизи, које индукују симплектоморфне структуре на страницама су изотопне кроз контактне структуре. Да бисмо ово видели пођимо од две форме, α_0 и α_1 , адаптиране на (B, π) . На M поставимо Риманову метрику и дефинишимо $\tilde{d}: M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, која мери квадрат растојања од повеза. Како је $\tilde{d}$ глатко близу B , она се може деформисати до глатке функције $d: M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, која је једнака $\tilde{d}$ близу B и константна ван неке околине од B . За свако $K > 0$ можемо тада формирати, за $t \in [0, K]$, фамилије адаптираних контактних форми

$$\alpha_0^t = \alpha_0 + t\nu, \quad \alpha_1^t = \alpha_1 + t\nu,$$

где је $\nu = d\pi^*(d\theta)$ глатка форма на $M \setminus B$, која се нулом глатко продужава на B . Поента је да за довољно велико K , линеарном интерполацијом између α_0^K и α_1^K датом са

$$\tilde{\alpha}_t = (1 - t)\alpha_0^K + t\alpha_1^K,$$

добивамо фамилију контактних форми адаптираних на (B, π) . Стога смо описали гладак пут

$$\alpha_0 \longmapsto \alpha_0^K \longmapsto \alpha_1^K \longmapsto \alpha_1,$$

и доказ завршава примена Грејеве стабилности.

Последица 34. Нека је (B, π) декомпозиција отворене књиге на M и α њој адаптирана контактна форма. Тада је повез B конвексна граница сваке стране P_φ у односу на Лиувиллово векторско поље придружено Лиувилловој форми $\alpha|_{P_\varphi}$.

Доказ. Како је реч о својству везаном за произвољно малу околину границе, можемо искористити тривијализацију из претходне леме. У овој параметризацији имамо

$$\widetilde{P}_\varphi = \Psi^{-1}(P_\varphi) = \{(p, r, \theta) \in B \times D_\varepsilon^2 \mid \theta = \varphi\}.$$

Лиувиллово векторско поље на унутрашњости странице дато је једначином

$$\begin{aligned} g \alpha_B &= (\alpha_g)|_{P_\varphi} = \iota_{X_\alpha}(d\alpha_g)|_{P_\varphi} \\ &= \iota_{X_\alpha}(dg \wedge \alpha_B) + g d\alpha_B \\ &= dg(X_\alpha)\alpha_B - \alpha_B(X_\alpha)dg + g \iota_{X_\alpha}d\alpha_B, \end{aligned}$$

па ако распишемо $dg = \partial_r g dr + \eta$ и потражимо X_α у облику $h\partial_r$, преостаје само услов

$$g = (\partial_r g) \cdot h$$

који по Лемми 32 можемо испунити на $r > 0$, где добијамо $X_\alpha = (\partial_r g)^{-1} g \partial_r$. Како је $\frac{g}{\partial_r g} < 0$ за $r > 0$, заиста важи да је граница конвексна. $\square$

Напомена 35. Ако је (B, π, α) контактна отворена књига и $i: B \times D_\varepsilon^2 \hookrightarrow M$ улагање из Леме 32, онда претходна последица показује да је пар

$$\left(P_\varphi^\delta := P_\varphi \setminus i\{(p, \theta, r) \mid \theta = \varphi, r < \delta\}, \alpha|_{P_\varphi^\delta} \right)$$

Лиувилев домен, за све $\delta < \varepsilon$. Међутим, исто тако можемо видети и да $(P_\varphi, \alpha|_{P_\varphi})$ није Лиувилев домен, те конвексност из Последице 34 није просто конвексност границе Лиувилевог домена. Реч је заправо о конвексности у бесконачности комплетирања Лиувилевих домена $(P_\varphi^\delta, \alpha|_{P_\varphi^\delta})$. Ова чињеница може створити благу nelaгодност у односу према контактним отвореним књигама, а најелегантнији начин да је третирамо је помоћу концепта идеалних Лиувилевих домена, о којем ће бити речи у Глави 3.

Турстон-Винкелнкемперова конструкција

Видели смо да је геометријска структура контактних отворених књига изузетно пријатна за рад, односно да нам пружа доста могућности за експлицитан рачун на апстрактној контактної многострукости. Међутим, ако не бисмо могли да пронађемо контактне структуре ношене отвореном књигом, ова чињеница би нам при истраживању контактне геометрије била ирелевантна. Срећом, ово није случај. Вратимо се на апстрактне отворене књиге. Седамдесетих година претходног века Турстон и Винкелнкемпер полазећи од оријентабилне површи са границом P и њене монодромије Ψ конструишу контакту структуру на $OB(P, \Psi)$ адаптирану декомпозицији отворене књиге коју на њој дефинише (P, Ψ) . Доказ који користи савремену нотацију може се пронаћи у [20]. На овај начин они омогућавају широку примењивост резултата о контактним отвореним књигама у димензији три. Оријентабилност странице у димензији два одговара томе да је она симплектичка, стога, да бисмо добили сличан резултат у вишим димензијама, неопходно је да дамо нешто снажније услове.

Дефиниција 36. За апстрактну отворену књигу (P, Ψ) кажемо да је симплектичка ако је $(P, d\beta)$ тачна симплектичка многострукост са конвексном границом ∂P , а монодромија Ψ симплектоморфизам од $(P, d\beta)$.

Користећи симплектичке апстрактне отворене књиге и адаптирајући управо идеју из [43], Жиру у [21] даје скицу доказа егзистенције контактне структуре на $OB(P, \Psi)$, која је данас позната као *генерализована Турстон-Винкелн-кемперова конструкција*.

Кључно питање на које треба дати одговор је како симплектичку структуру странице искористити за дефинисање контактне структуре на њеном торусу пресликавања? Испоставља се да задовољавајући одговор на ово питање дајемо само у случају када је монодромија Ψ , странице $(P, d\beta)$, *тачан симплектоморфизам*, односно, када постоји нека функција f , таква да је $\Psi^*\beta - \beta = df$. Наредна лема послужиће нам да покажемо да ово није додатни услов.

Лема 37. Симплектичка монодромија Ψ странице $(P, d\beta)$ изотопна је (кроз симплектичке монодромије) тачном симплектоморфизму $\bar{\Psi}$.

Доказ. Дефинишемо векторско поље X на P једначином $\Psi^*\beta - \beta + \iota_X\omega = 0$ и његов ток означавамо са φ_t . X је нула на околини границе па је φ_t глобално дефинисано и једнако идентитети на околини границе. Тврдимо да је $\Psi \circ \varphi_1$ тражени симплектоморфизам. Нека је $\gamma = \Psi^*\beta - \beta = -\iota_X\omega$. Тада $d\gamma = 0$ и стога

$$\mathcal{L}_X\gamma = d(\gamma(X)) + \iota_X d\gamma = 0,$$

дакле $\varphi_t^*\gamma = \gamma$ за $t \in \mathbb{R}$. Слично

$$\mathcal{L}_X\omega = d(\iota_X\omega) = -d\gamma = 0$$

па видимо и $\varphi_t^*\omega = \omega$ за $t \in \mathbb{R}$. Јасно, добили смо да је $\Psi \circ \varphi_1$ изотопно Ψ кроз симплектоморфизме једнаке идентитети на околини границе. Додатно

$\mathcal{L}_X \beta = d(\beta(X)) - \gamma$, те рачунамо

$$\begin{aligned}
 (\Psi \circ \varphi_1)^* \beta - \beta &= \varphi_1^* \Psi^* \beta - \beta \\
 &= \varphi_1^* (\beta + \gamma) - \beta \\
 &= \gamma + \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi_t^* \beta \\
 &= \gamma + \int_0^1 \varphi_t^* (\mathcal{L}_X \beta) \\
 &= d \int_0^1 \varphi_t^* (\beta(X)).
 \end{aligned}$$

□

Проблем који се појављује у вишим димензијама и спречава нас да дамо доказ идентичан оном у три димензије (видети [20], стр. 151–154) је чињеница да је торус пресликавања сувише рестриктиван. Да бисмо то превазишли дајемо следећу дефиницију.

Дефиниција 38. За апстрактну отворену књигу (P, Ψ) и глатко $\tilde{\varphi}: P \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, константно на некој околини ∂P , дефинишемо *уопштени торус пресликавања* као количничку многострукост

$$P_{\tilde{\varphi}}(\Psi) := \{(x, \varphi) \in P \times \mathbb{R} \mid 0 \leq \varphi \leq \tilde{\varphi}(x)\} / (x, \tilde{\varphi}(x)) \sim (\Psi(x), 0).$$

Приметимо да је $\partial P_{\tilde{\varphi}}(\Psi) \cong \partial P \times (\mathbb{R}/c\mathbb{Z})$, где је c вредност функције $\tilde{\varphi}$ близу ∂P .

Дефинишемо и уопштење конструкције $OB(P, \Psi)$ као количнички простор

$$OB_{\tilde{\varphi}}(P, \Psi) := (P_{\tilde{\varphi}}(\Psi) \sqcup \partial P \times D^2) / \sim$$

где је $\sim$ идентификација $(x, e^{i\varphi}) \in \partial(\partial P \times D^2)$ и $[x, c\frac{\varphi}{2\pi}] \in \partial(P_{\tilde{\varphi}}(\Psi))$. Приметимо да пресликавање дато као идентитета на $\partial P \times D^2$ и са $(x, \varphi) \mapsto [x, \frac{\varphi}{2\pi} \tilde{\varphi}(x)]$ дефинише дифеоморфизам између $OB(P, \Psi)$ и $OB_{\tilde{\varphi}}(P, \Psi)$.

Теорема 39. Нека је M дифеоморфно са $OB(P, \Psi)$, где је (P, Ψ) симплектичка отворена књига. Тада, на M постоји контактна форма α адаптирана на декомпозицију отворене књиге (B, π) која одговара апстрактној отвореној књизи (P, Ψ) .

Доказ. Користећи Лему 37 и Тврђење 27 закључујемо да је довољно разматрати случај када је (P, Ψ) тачна симплектичка отворена књига, конкретно, на Лиувилевом домену $(P, d\beta)$ важи

$$\Psi^*\beta - \beta = d(\tilde{\varphi}),$$

за неку функцију $\tilde{\varphi} \in C^\infty(P)$. Како је P компактно можемо претпоставити $\tilde{\varphi}: P \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

На основу претходне дискусије довољно је конструисати контактну форму α на $OB_{\tilde{\varphi}}(P, \Psi)$.

• *Контактна форма на $P_{\tilde{\varphi}}(\Psi)$*

На $P \times \mathbb{R}$ контактну форму α можемо задати са $\alpha = \pi_P^*(\beta) + dt$, где је π_P пројекција на P , а t пројекција на $\mathbb{R}$. Посматрајмо

$$\begin{aligned} \Phi: P \times \mathbb{R} &\longrightarrow P \times \mathbb{R} \\ (x, \varphi) &\longmapsto (\Psi(x), \varphi - \tilde{\varphi}(x)). \end{aligned}$$

Није тешко видети да важи $P_{\tilde{\varphi}}(\Psi) = P \times \mathbb{R} / \langle \Phi \rangle$, где $\langle \Phi \rangle$ означава цикличну групу $\{\Phi^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Стога, α дефинише форму на $P_{\tilde{\varphi}}(\Psi)$ ако и само ако је $\Phi^*\alpha = \alpha$. Рачун показује

$$\begin{aligned} \Phi^*(\pi_P^*(\beta)) &= (\pi_P \circ \Phi)^*\beta = (\Psi \circ \pi_P)^*\beta = \pi_P^*(\Psi^*\beta), \\ \Phi^*(dt) &= d(t \circ \Phi) = d(t - \tilde{\varphi} \circ \pi_P) = dt - \pi_P^*(d\tilde{\varphi}), \end{aligned}$$

те добијамо

$$\Phi^*\alpha = \pi_P^*(\Psi^*\beta - d\tilde{\varphi}) + dt = \pi_P^*(\beta) + dt.$$

Дакле, α индукује контактну форму на $P_{\tilde{\varphi}}(\Psi)$.

Додатно, како је $\tilde{\varphi} \equiv c$ на некој околини од ∂P , постоји крагнаста околина од $\partial P_{\tilde{\varphi}}(\Psi)$ дифеоморфна са $(-\varepsilon, 0] \times \partial P \times \mathbb{R}/c\mathbb{Z}$, где је $(-\varepsilon, 0] \times \partial P$ крагнаста околина дата током Лиувиловог векторског поља X_β на $(P, d\beta)$, у ознаци $(f_s)_{s \in (-\varepsilon, 0]}$. На њој важи

$$\frac{d}{ds} f_s^* \beta = f_s^*(\mathcal{L}_{X_\beta} \beta) = f_s^* \beta,$$

те закључујемо да у овим координатама на $(-\varepsilon, 0] \times \partial P \times \mathbb{R}/c\mathbb{Z}$ имамо $\alpha = e^s \beta_\partial + d\varphi$.

• Контактна форма на $\partial P \times D^2$

Слично као у [20, стр. 153], користимо добијену крагну да благо модификујемо лепљење у конструкцији $OB_{\tilde{\varphi}}(P, \Psi)$. Прецизније, залепимо читаве крагне са

$$\begin{aligned} (-\varepsilon, 0] \times \partial P \times \mathbb{R}/c\mathbb{Z} &\longrightarrow \partial P \times \{1 \leq r < 1 + \varepsilon\} \times \mathbb{R}/c\mathbb{Z} \\ (s, x, \varphi) &\longmapsto (x, r := 1 - s, \varphi). \end{aligned}$$

Контактну форму на $\partial P \times D^2(1 + \varepsilon)$ сада конструишемо у облику $\alpha = h_1(r)\beta_{\partial} + h_2(r)d\varphi$, где функције h_1, h_2 чине такозвани *Луцов пар*, односно задовољавају

1. Близу $r = 0$: $h_1(r) = 2$ и $h_2(r) = r^2$;
2. За $r \geq 1$: $h_1(r) = e^{1-r}$ и $h_2(r) = 1$;
3. За све $r \in [0, 1 + \varepsilon)$ важи $h_1(r)h_2'(r) - h_1'(r)h_2(r) > 0$.

Услов (1) обезбеђује глаткост α у $\partial P \times \{0\}$. Услов (2) обезбеђује глаткост продужења форме α на $OB_{\tilde{\varphi}}(P, \Psi)$. Контактни услов за α на $\partial P \times D^2(1 + \varepsilon)$ је

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n = n h_1^{n-1} (h_1 h_2' - h_1' h_2) \beta_{\partial} \wedge (d\beta_{\partial})^{n-1} \wedge dr \wedge d\varphi > 0,$$

односно еквивалентан је услову (3).

• Адаптираност контактне форме α

Унутар $\partial P \times D^2$ странице су дате условом $\varphi = \text{const}$, па је на њима рестрикција $d\alpha$ једнака $h_1'(r) dr \wedge \beta_{\partial} + h_1(r) d\beta_{\partial}$. Примећујемо да са наведеним h_1 већ имамо проблем јер је $h_1' \equiv 0$ близу нуле. Ипак, ово лако решавамо постављајући услов $h_1(r) = 2 - r^2$ близу нуле. Избегли смо да ово урадимо раније јер чини проверу контактнoг услова за α непријатнијом, али лако се уверити да не мења ништа суштински. Претпоставимо такође и да је $h_1'(r) < 0$ за све $0 \leq r < 1 + \varepsilon$. Оријентација странице унутар $B \times D^2(1 + \varepsilon)$ дата је са

$$(d\alpha)^n = n h_1^{n-1} h_1' dr \wedge \beta_{\partial} \wedge (d\beta_{\partial})^{n-1},$$

док је оријентација повеза дата са

$$(\alpha|_{TB}) \wedge (d\alpha|_{TB})^{n-1} = 2^n \beta_{\partial} \wedge (d\beta_{\partial})^{n-1}.$$

Услов адаптираности проверавамо контракцијом са спољашњом нормалом $-\partial_r$, па како је

$$\iota_{-\partial_r} h'_1 dr \wedge \beta_\partial \wedge (d\beta_\partial)^{n-1} = -h'_1 \beta_\partial \wedge (d\beta_\partial)^{n-1},$$

то се две оријентације на B поклапају, што је и требало доказати. $\square$

Ако је (P, β, Ψ) симплектичка отворена књига, многострукост добијену генерализованом Турстон–Винкелнкемперовом конструкцијом примењеном на њу означаваћемо са $OB(P, \beta, \Psi)$.

За крај поглавља, дајемо веома значајан пример контактних многострукости добијених генерализованом Турстон–Винкелнкемперовом конструкцијом, након промене симплектичке монодромије полазне апстрактне отворене књиге.

Пример 40. Посматрајмо Вајнстинов домен (W, λ) и претпоставимо да садржи уложену Лагранжеву сферу $L \subset (W, \lambda)$. Позната чињеница у симплектичкој геометрији је да L има околину симплектоморфну околина нултог сечења у T^*L (видети Теорему 3.4.13 у [33]). Стога, довољно је модификовати монодромију унутар околине нултог сечења у T^*S^n .

Да бисмо ово урадили, на S^n фиксирајмо такозвану *облу метрику*, односно метрику која потиче од еуклидске метрике на $\mathbb{R}^{n+1}$. Помоћу ње идентификујемо TS^n и T^*S^n , кроз музички изоморфизам $v \mapsto g(v, \cdot)$. Конструкцију сада спроводимо на TS^n , на којем је симплектичка форма дата као диференцијал повлачења канонске форме са T^*S^n , експлицитно

$$\lambda_g|_{(p,v)}(X) = g(v, d\pi(X)).$$

Дефинишемо Ден–Зајделово увртање $\tau: TS^n \rightarrow TS^n$ са $\tau(p, v) = (p', v')$, где је p' добијено крећући се дуж геодезијске кроз p за време $\pi - |v|$, а v' дефинисано као паралелни транспорт вектора v . У случају $|v| > \pi$ постављамо $\tau = \text{id}$. Није тешко видети да је τ симплектоморфизам јер је добијено као композиција подизања антиподалног пресликавања и Хамилтоновог тока за хамилтонијан $H = \max \left\{ \frac{|v|^2}{2}, \frac{\pi^2}{2} \right\}$.

Како је L тачна, затворена Лагранжева подмногострукост оно дефинише Лежандрову подмногострукост Λ у $OB(W, \lambda, \Psi)$, по принципу изложеном у Примеру 11, а служећи се Тврђењем 78 и компактношћу L . Да бисмо ово нагласили уводимо ознаку $(M, \xi, \Lambda) = OB(W, \lambda, L)$. Испоставља се да важи да

композиција монодромије са Ден–Зајделовим увртањем, након генерализоване Турстон–Винкелнкемперове конструкције, одговара контактної хирургији (видети [47]) дуж Λ . Прецизније, $OB(W, \lambda, \Psi \circ \tau_L)$ може се добити од $(Y, \xi) = OB(W, \lambda, \Psi)$, контактном хирургијом дуж Λ .

Пођемо ли сада од Лагранжевог диска $D \subset (W, \lambda)$, са Лежандровом границом $\partial D \subset (\partial W, \ker \lambda)$, можемо закачити Вајнстинову ручку H дуж сфере ∂D , те добити нови Вајнстинов домен $(W \cup H, \lambda')$. Он природно садржи Лагранжеву сферу L чија је доња хемисфера D , а горња језгро ручке H . Контактну многострукост $OB(W \cup H, \lambda', \Psi \circ \tau_L)$ тада зовео *позитивном*, а контактну многострукост $OB(W \cup H, \lambda', \Psi \circ \tau_L^{-1})$ *негативном стабилизацијом* од $OB(W, \lambda, \Psi)$, дуж D .

Напомињемо да у конструкцији за нама постоји евидентан проблем са глаткошћу, који овај пример чини неформалним. Но, са циљем да пре свега изложимо Зајделову идеју о вишедимензионалном Деновом увртању, изабрали смо овакав приступ. Свим детаљима који недостају да претходна конструкција буде формална посвећене су белешке Ота ван Курта [46].

Глава 3

Егзистенција контактних отворених књига

Наш примарни циљ у овој Глави је да изложимо доказ следеће теореме, која показује да су отворене књиге свеприсутне у контактної геометрији и топологији.

Теорема 41. ([21]) На свакој затвореној контактної многострукости постоји контактна отворена књига.

Кључна у Жируовом доказу је контактна верзија техника које у симплектичкој геометрији развија Доналдсон у [14] и [15]. Пратићемо углавном експозе дат у [40].

Доказ Теореме 41 своди се, након опсервације да су инверзне слике нуле за једну класе сечења комплексног раслојења које се природно придружује свакој контактної многострукости њене контактне подмногострукости, на техничке детаље. Контактне многострукости, међутим, нису минималан амбијент на коме можемо развити потребне технике. Са жељом да ову тезу обогатимо што већим бројем концепта са којима се човек сусреће у покушају да истражује контактну геометрију и топологију, дискутујемо и о следећој нешто широј класи многострукости.

3.1 Квази-контактне структуре

Дефиниција 42. Квази-контактна структура на $(2n + 1)$ -многострукости M је пар (ξ, β) где је ξ кооријентисана дистрибуција, а β 1-форма на M таква да је $(\xi, d\beta)$ симплектичко раслојење.

Јасно, ако је $(M, \xi = \ker \alpha)$ контактна многострукост, онда је $(\xi, d\alpha)$ квази-контактна структура на M .

Свакој квази-контактној структури (ξ, β) можемо придружити предквантизабилно линијско раслојење које чине тривијално ермитско линијско раслојење $L = M \times \mathbb{C}$ и конексија $\nabla_L = d - i\beta$. О овоме треба размишљати на следећи начин.

- На L постоји канонски избор ермитске структуре h дат са $h((p, a), (p, b)) = a\bar{b}$
- Конексија је пресликавање $\nabla_L : \Gamma(L) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes L)$. Како је у посматраном случају простор глатких сечења раслојења L једноставно простор глатких функција на M са вредностима у $\mathbb{C}$, ∇_L може бити схваћено као оператор који сваком сечењу додељује глатку 1-форму са вредностима у $\mathbb{C}$. За задато ∇_L имамо

$$(\nabla_L s)_p(v) = ds_p(v) - i\beta_p(v)s(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(\gamma(t)) - s(p)}{t} - is(p)\beta_p(v),$$

где је $s \in \Gamma(L)$, $v \in T_p M$, $\gamma : (-1, 1) \rightarrow M$ крива за коју је $d\gamma(0)(\partial_t) = v$.

- На датом ермитском раслојењу $(E \rightarrow M, h)$ конексија ∇ је ермитска ако за $s, t \in \Gamma(E)$ и $v \in \mathfrak{X}(M)$ важи $v(h(s, t)) = h(\nabla_v s, t) + h(s, \nabla_v t)$. У нашем случају можемо овај услов записати и као

$$\begin{aligned} h(\nabla_L s, t) + h(s, \nabla_L t) &= (ds - i\beta s)\bar{t} + s(\overline{dt - i\beta t}) \\ &= \bar{t} ds - i\beta s\bar{t} + s\bar{dt} + i\beta s\bar{t} \\ &= s\bar{dt} + \bar{t} ds \\ &= d(\bar{s}t) \\ &= d(h(s, t)), \end{aligned}$$

где смо искористили чињеницу да β узима вредности у $\mathbb{R}$.

- На послетку, свака конексија задовољава Лајбницово правило $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$, за све $s \in \Gamma(E)$ и $f \in C^\infty(M)$, што лако проверавамо.

Свакој конексији придружујемо и њену кривину, $F_\nabla(v_1, v_2)s = \nabla_{v_1}\nabla_{v_2}s - \nabla_{v_2}\nabla_{v_1}s - \nabla_{[v_1, v_2]}s$, а ∇_L задовољава $F_{\nabla_L} = -id\beta$.

На многострукости са квази-контактном структуром (ξ, β) можемо одабрати компатибилну скоро комплексну структуру J просто као компатибилну комплексну структуру на симплектичком раслојењу $(\xi, d\beta)$. Потом има смисла говорити и о компатибилној Римановој метрици на M — то је било која Риманова метрика g која за све $u, v \in \xi$ задовољава услов $g(u, v) = d\beta(u, Jv)$, као и да је $\ker d\beta$ ортогонално на ξ . Овакво g очигледно није јединствено, али се избор јасно своди на избор јединичног векторског поља у $\ker d\beta$. Овако одабрано поље зваћемо Ребовим и означавати са R . Дефинишемо још и 1-форму α са $\alpha(v) := g(R, v)$. Јасно, важи $\xi = \ker \alpha$.

Након што смо дефинисали компатибилну скоро комплексну структуру J можемо направити и кључни корак за даља разматрања — раздвојити конексију било ког ермитског раслојења ∇ дуж ξ на њен холоморфни и анти-холоморфни део, ∂ и $\bar{\partial}$ респективно. Они су дефинисани са:

$$\begin{aligned}\partial_v s &= \frac{1}{2}(\nabla_v s - i \cdot \nabla_{Jv} s), \\ \bar{\partial}_v s &= \frac{1}{2}(\nabla_v s + i \cdot \nabla_{Jv} s).\end{aligned}$$

Јасно, $\nabla = \partial + \bar{\partial}$, те како је ∂ комплексно линеарно, а $\bar{\partial}$ комплексно анти-линеарно, можемо рећи да $\bar{\partial}$ мери одступање ∇ од комплексно линеарног пресликавања.

За крај одељка наведимо и један куриозитет о квази-контактним структурама. Дуго недоказана хипотеза у контактної топологији био је h -принцип:

Теорема 43. Свака скоро контактна структура на многострукости M хомотопна је контактної структури.

Случај када је M отворена директно је имплициран Громовљевим h -принципом [23]. У димензији три доказ даје Луц у [28], за просто повезане затворене многострукости димензије пет Гајгес у [19], а за произвољну многострукост димензије пет, Касал, Панчоли и Пресас у [9]. У последњем раду показана је важност квази-контактних многострукости, наиме за њих важи аналоган h -принцип:

Теорема 44. Свака скоро контактна структура на многострукости M хомотопна је квази-контактної структури.

Служећи се посве другачијим техникама, случај затворене многострукости произвољне димензије показују Борман, Елијашберг и Марфи [3].

3.2 Идеје из линеарне алгебре

Дефиниција 45. За линеарно пресликавање $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ кажемо да је ϵ -трансверзално на нулу ако има десни инверз норме мање од ϵ^{-1} .

Лема 46. Линеарно пресликавање $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ је ϵ -трансверзално на нулу ако и само ако постоји m -димензионални потпростор $W \subset \mathbb{R}^n$ такав да за све $w \in W$ важи $\|f(w)\| \geq \epsilon\|w\|$.

Доказ. ($\Rightarrow$): Нека је $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ десни инверз пресликавања f . Простор $W := g(\mathbb{R}^m)$ задовољава жељено својство.

($\Leftarrow$): Ако је $W \subset \mathbb{R}^n$ потпростор са својством из исказа теореме десни инверз g норме мање од ϵ^{-1} можемо дефинисати као инверз линеарног изоморфизма $f|_W : W \rightarrow \mathbb{R}^m$.

□

На основу појма ϵ -трансверзалности можемо доћи до довољних услова да тангентна раслојења одговарајућих подмногострукости буду симплектичка подраслојења. Први корак је и даље потпуно линеаран.

Лема 47. Нека је $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ једно $\mathbb{R}$ -линеарно пресликавање ϵ -трансверзално на нулу. Тада постоји $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такво да ако антихомоморфни део пресликавања f задовољава

$$\|f^{0,1}\| = \|f + if(i\cdot)\| \leq \delta,$$

онда је $\ker f$ симплектички потпростор од $\mathbb{C}^n$.

Доказ. Радимо са произвољним комплексним структурама J_1 и J_2 , произвољним симплектичким формама ω_1 и ω_2 на $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ редом. Све норме рачунамо у односу на компатибилне скаларне производе $g_i = \omega_i(\cdot, J\cdot)$, за $i \in \{1, 2\}$.

Тврдимо да је довољно одабрати $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{8}$. Стога посматрајмо $f = f^{1,0} + f^{0,1}$, где су $f^{1,0}$ и $f^{0,1}$ пресликавања за која важи:

$$f^{1,0} \circ J_1 = J_2 \circ f^{1,0}, \quad f^{0,1} \circ J_1 = -J_2 \circ f^{0,1}, \quad \|f^{0,1}\| < \delta.$$

Пресликавање f је ϵ -трансверзално на нулу, специјално оно је сурјективно, па важи

$$\dim_{\mathbb{R}}(K := \ker f) = 2n - 2m.$$

Са K' означимо потпростор $\ker f^{1,0}$, а са $g : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ десни инверз пресликавања f норме мање од ϵ^{-1} . Тада је $f^{1,0}g = \text{Id}_{\mathbb{C}^m} - f^{0,1}g$ инвертибилно јер је $\|f^{0,1}g\| \leq \delta\epsilon^{-1} = \frac{1}{8} < 1$, са инверзом $(f^{1,0}g)^{-1}$ норме мање или једнаке од $(1 - \frac{\delta}{\epsilon})^{-1}$.

Пресликавање $\tilde{g} := g(f^{1,0}g)^{-1}$ дефинише десни инверз пресликавања $f^{1,0}$ норме мање од $\frac{\epsilon^{-1}}{1-\delta\epsilon^{-1}} = \frac{1}{\epsilon-\delta}$. Закључујемо да је $f^{1,0}$ сурјективно, а K' комплексни потпростор од $(\mathbb{C}^n, J_1)$ реалне димензије $2n - 2m$.

Посматрајмо сада пресликавања $F_K = \text{Id} - gf$ и $F_{K'} = \text{Id} - \tilde{g}f^{1,0}$. Очигледно важи $F_K|_K = \text{Id}$, $F_{K'}|_{K'} = \text{Id}$, док за $u' \in K'$ имамо $\|u' - F_K(u')\| = \|gf^{0,1}(u')\| \leq \frac{\|u'\|}{8}$, а за $u \in K$ важи

$$\|u - F_{K'}(u)\| = \|\tilde{g}f^{1,0}(u)\| = \|\tilde{g}(-f^{0,1})(u)\| \leq \frac{\delta}{\epsilon - \delta}\|u\| = \frac{1}{7}\|u\|.$$

Да бисмо показали да је $\omega_1|_K$ недегенерисано фиксирајмо $v \in K$ норме 1. Нека је $v' = F_{K'}(v)$. Тада $f^{1,0}(v') = f^{1,0}(v) - f^{1,0}(v)\tilde{g}f^{1,0}(v) = 0$, односно $v' \in K'$. Како је K' комплексан векторски потпростор од $(\mathbb{C}^n, J_1)$ имамо и $J_1v' \in K'$. Поставимо сада $w = F_K(J_1v')$. Тада важи $f(w) = f(J_1v') - gf(J_1v') = 0$, односно $w \in K$. По конструкцији и претходним разматрањима имамо:

$$\begin{aligned} \|v - v'\| &= \|v - F_{K'}(v)\| \leq \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{6}{7} \leq \|v'\| \leq \frac{8}{7}, \\ \|w\| &\leq \|J_1v'\| + \|w - J_1v'\| \leq \frac{8}{7} + \frac{1}{7} = \frac{9}{7}. \end{aligned}$$

Како важи

$$\omega_1(v, w) = \omega_1(v', J_1v') + \omega_1(v - v', w) + \omega_1(v', w - J_1v'),$$

из Коши-Шварцове неједнакости следи $|\omega_1(a, b)| \leq \|a\|\|b\|$, па на основу претходних оцена добијамо $|\omega_1(v, w)| \geq \frac{13}{49} > 0$.

Закључујемо да је $\omega_1|_K$ недегенерисано, што је и требало доказати. $\square$

Мотивисани резултатима Леме 47 дајемо следећу дефиницију.

Дефиниција 48. Нека је $E \rightarrow M$ ермитско комплексно раслојење на којем је дата конексија ∇ . За сечење $s : M \rightarrow E$ кажемо да је ϵ -трансверзално на нулу дуж ξ ако за све $p \in M$ важи бар један од услова:

- $\|s(p)\| > \epsilon$
- $\nabla_\xi(s)(p) : \xi_p \rightarrow E_p$ је ϵ -трансверзално на нулу.

За подмногострукост $S \hookrightarrow i(M, \xi, \beta)$ кажемо да је квази-контактна ако је ξ свуда трансверзално на S и ако је $(i^*(\xi), i^*(\beta))$ квази-контактна структура на S .

Пандан Леми 47 је:

Лема 49. За свако $\epsilon > 0$ постоји $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такво да ако је $s : M \rightarrow E$ ϵ -трансверзално на нулу дуж ξ и $\|\bar{\partial}s\| \leq \delta$, онда је $Z(s) := s^{-1}(0_s)$ глатка квази-контактна подмногострукост од (M, ξ, β) .

Доказ. Са r означимо ранг комплексног раслојења E . Локална форма произвољне конексије је $\nabla = d + \omega$, за неко $\omega \in \Omega^1(U, \text{End}(E))$ (видети Главу 11 у [44]) и стога на $Z(s)$ важи $\nabla s = ds$. Кад год је $s(p) = 0$ имамо ϵ -трансверзалност пресликавања $\nabla_\xi s : T_p M \rightarrow E_p$, специјално, $\nabla_\xi s$ је сурјективно па закључујемо да је на $Z(s)$, сечење s трансверзално на нулто сечење у E . Одавде следи први део тврђења: $Z(s)$ је глатка подмногострукост од M реалне димензије $2(n - r) + 1$.

У $p \in Z(s)$ имамо

$$T_p Z(s) \cap \xi_p = \ker \nabla s(p) \cap \xi_p = \ker \nabla_\xi s(p),$$

те поново из сурјективности $\nabla_\xi s(p)$ имамо $\dim_{\mathbb{R}}(T_p Z(s) \cap \xi_p) = 2(n - r)$. Закључујемо да не важи $T_p Z(s) \subset \xi_p$ и, будући да је кодимензија раслојења ξ једнака 1, $T_p Z(s) + \xi_p = T_p M$. Како је $p \in Z(s)$ произвољно важи $Z(s) \pitchfork \xi$.

Преостаје да проверимо да је $(i^*(\xi), d\beta) = (\ker \nabla_\xi s, d\beta)$ симплектичко раслојење за довољно мало δ , но ово је управо закључак Леме 47. $\square$

3.3 Асимптотски холоморфна сечења

Нека је L линијско раслојење које смо придружили квази-контактној многострукости M . Датом ермитском раслојењу можемо тада придружити низ раслојења $E_k := E \otimes L^{\otimes k}$. Ако је g метрика на M дефинисана у Поглављу 3.1 за $k \in \mathbb{N}$ дефинишемо $g_k = k \cdot g$.

Дефиниција 50. Низ сечења $s_k : M \rightarrow E_k$ зовемо C^r -асимптотски холоморфним ако важи:

$$\|s_k\|_k = O(1), \quad \|\nabla^\ell s_k\|_k = O(1), \quad \|\nabla^{\ell-1} \bar{\partial} s_k\|_k = O(k^{-\frac{1}{2}}), \quad \forall \ell \leq r,$$

где норме рачунамо у односу на низ метрика g_k .

Наш први значајнији циљ је да докажемо следећу теорему.

Теорема 51. Нека је E ермитско раслојење над M и $s_k : M \rightarrow E_k$ асимптотски холоморфан низ сечења. Тада постоји $\epsilon > 0$ и асимптотски холоморфан низ сечења $\tilde{s}_k : M \rightarrow E_k$, ϵ -трансверзалних на нулу дуж ξ такав да је $|\tilde{s}_k - s_k|_{C^2} \leq \delta$.

Из дефиниције асимптотске холоморфности и Леме 49 непосредно следи да ако је асимптотски холоморфан низ сечења s_k ϵ -трансверзалан на нулу, онда је за довољно велико k скуп нула $Z(s_k)$ квази-контактна подмногострукост од (M, ξ, β) .

Доказ базирамо на теорему коју у овој верзији, у [35] показује Жан Пол Мосен. Да бисмо дали исказ теореме неопходно је да знамо шта значи да за симплектичку многострукост (M, ω) кажемо да је целобројне класе. Наиме, како је ω затворена форма, односно $d\omega = 0$, имамо $[\omega] \in H_{dR}^2(M)$. Потом можемо искористити де Рамову теорему, у којој је успостављен изоморфизам између група у де Рамовој кохомологији и група у глаткој сингуларној кохомологији (које су изоморфне „обичној” сингуларној кохомологији). Овај изоморфизам дат је са

$$[\beta] \mapsto^J \left([\sigma] \mapsto \int_\sigma \beta \right),$$

где је $[\beta] \in H_{dR}^p(M)$ и $[\sigma] \in H_p^\infty(M, \mathbb{R}) \cong H_p(M, \mathbb{R})$, а σ било који глатак p -цикл који представља хомолошку класу $[\sigma]$. Како радимо са коефицијентима

у пољу $\mathbb{R}$ имамо $H^p(M, \mathbb{R}) \cong \text{Hom}(H_p(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$, те је са J успостављен изоморфизам између $H_{dR}^p(M)$ и $H^p(M, \mathbb{R})$, за све p .

Дефиниција 52. За (M, ω) кажемо да је целобројне класе ако $J[\omega]$, где је J де Рамов изоморфизам, лежи у слици природног хомоморфизма, индукованог хомоморфизмом коефицијената, $H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M, \mathbb{R})$.

Детаљна дискусија о де Рамовом изоморфизму може се пронаћи у Глави 18 у [26]. Напомињемо, такође, да се није тешко уверити да је $J[\omega]$ у слици $H^2(M, \mathbb{Z})$, ако и само ако, за све σ који представљају класу у $H_2^\infty(M, \mathbb{R})$ важи $\int_\sigma \omega \in \mathbb{Z}$.

Теорема 53. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост целобројне класе. За фиксирану компатибилну скоро комплексну структуру J , затворену подмногострукост S и ермитско раслојење $E \rightarrow M$ посматрајмо асимптотски холоморфан низ сечења $s_k : M \rightarrow E \otimes L^{\otimes k}$. Тада за произвољно $\delta > 0$ постоји C^3 -асимптотски холоморфан низ сечења $\tilde{s}_k : M \rightarrow E \otimes L^{\otimes k}$ који задовољава

- $|\tilde{s}_k - s_k|_{C^2} \leq \delta$
- $\tilde{s}_k$ је ϵ -трансверзално на нулу дуж S , за неко ϵ које не зависи од k .

Напомена 54. У исказу претходне теореме не наводимо шта за низ сечења ермитског раслојења значи да је C^r -асимптотски холоморфан, но та дефиниција била би сувишна јер је идентична Дефиницији 50. Много значајнији детаљ је захтев да $[\omega]$ буде целобројна класа. Он је заправо еквивалентан услову да постоји линијско ермитско раслојење $L \rightarrow M$ са конексијом ∇ чија је кривина $F_\nabla = -i\omega$ (Тврђење 8.3.1 у [48]), који је у случају квази-контактне структуре био канонски остварив.

За дату квази-контактну многострукост (M, ξ, β) можемо дефинисати њену симплектизацију $SM = M \times [-\sigma, \sigma]$ са формом $\omega_S = d(\beta + t\alpha)$, где је σ бирано довољно мало тако да је ω_S симплектичка. M тада можемо видети унутар SM као затворену подмногострукост $M \times \{0\}$. Идеја нам је да некако пренесемо закључке Теореме 53 на $M \times \{0\}$. Први предуслов за овако нешто је компатибилност одговарајућих структура на M и SM . Ово остварујемо помоћу неколико избора.

- Компатибилно J са (M, ξ, β) продужавамо на SM тако што узимајући у обзир $TSM = \xi \oplus \langle R \rangle \oplus \langle \partial_t \rangle$ постављамо $\hat{J}\partial_t = R$. Управо овако дефинисана скоро комплексна структура компатибилна је са ω_S .
- Придružена Риманова метрика $\hat{g} = \omega_S(\cdot, \hat{J}\cdot)$ задовољава да је ∂_t ортогонално на TM и јединично.
- Дефинисано предквантизабилно раслојење над M може се видети као рестрикција тривијалног раслојења $L = SM \times \mathbb{C}$ са конексијом $\nabla = d - i\hat{\beta}$.

Дефиниција 55. Нека је $E \rightarrow SM$ ермитско раслојење са конексијом ∇ . За сечење $s : SM \rightarrow E$ кажемо да је ϵ -трансверзално на нулу дуж M ако за све $p \in M$ важи једно од два тврђења

- $|s(p)| > \epsilon$
- $\nabla_M(s)(p) : (T(M \times \{0\}))_p \rightarrow E_p$ је ϵ -трансверзално на нулу.

Ако са i означимо улагање $M \hookrightarrow M \times \{0\} \subset SM$, те ако је $s_k : SM \rightarrow E \otimes L^{\otimes k}$ асимптотски холоморфан низ сечења, на основу малопређашњих коментара о релевантним структурама на SM тривијално имамо да је $i^*s_k : M \rightarrow E_k$ асимптотски холоморфан низ сечења. Да бисмо видели да се и трансверзалност дуж M преводи у трансверзалност дуж ξ дајемо следећу лему.

Лема 56. Нека је $s : SM \rightarrow E$ ϵ -трансверзално на нулу дуж M . Тада постоји $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такво да ако је $\|\bar{\partial}s(p)\| < \delta$ за све $p \in M \times \{0\}$, онда је $i^*s : M \rightarrow i^*E$ $\frac{\epsilon}{2}$ -трансверзално на нулу дуж ξ .

Доказ. Фиксирајмо $p \in M \times \{0\}$. Ако је $|s(p)| > \epsilon$ немамо шта да проверавамо. Претпоставимо зато да је $\nabla_M s(p) : \xi_p \oplus \langle R \rangle \rightarrow E_p$ ϵ -трансверзално на нулу. Нека је са r означена комплексна димензија раслојења E . Желимо да покажемо да је $F := (\nabla_M s(p))|_{\xi_p}$ $\frac{\epsilon}{2}$ -трансверзално на нулу. Нека је $f = \partial s(p)$ и δ довољно мало тако да је $\epsilon' = \frac{3}{4}\epsilon$ и f ϵ' -трансверзално на нулу — ово је могуће јер $\|\nabla_M s(p) - \partial s(p)\| \leq \delta$, па $\partial s(p)$ има десни инверз норме мање од $(\epsilon - \delta)^{-1} = (\epsilon')^{-1}$.

Према Лемми 46 постоји $2r$ -димензионални потпростор $W \subset \xi_p \oplus \langle R \rangle$ такав да за $w \in W$ важи $|f(w)| \geq \epsilon' \|w\|$. Ако је $W \subset \xi_p$ доказ је завршен.

У супротном, нека је $V = W \cap \xi_p$. Тада је $\dim_{\mathbb{R}} V = 2r - 1$ и $H = f(V)$ је реална хиперраван у E_p . Нека је ω_E симплектичка форма на E_p . У односу на њу можемо одабрати изотропан потпростор од H димензије r . Означимо га са U . Нека је $\tilde{U} = f^{-1}(U)$ и $\tilde{U}_{\mathbb{C}} := \tilde{U} \oplus J\tilde{U}$. Из $f(\tilde{U} \oplus J\tilde{U}) = U \oplus iU = E_p$ закључујемо да је $\dim_{\mathbb{R}} \tilde{U}_{\mathbb{C}} = 2r$, а по дефиницији скоро комплексне структуре J важи $\tilde{U}_{\mathbb{C}} \subset \xi_p$. Доказ завршавамо опсервацијом да за $u = u_1 + Ju_2$ важи:

$$\begin{aligned} \|f(u)\|^2 &= \|f(u_1) + if(u_2)\|^2 \\ &= \|f(u_1)\|^2 + \|f(u_2)\|^2 + 2g_E(f(u_1), if(u_2)) \\ &= \|f(u_1)\|^2 + \|f(u_2)\|^2 \\ &\geq (\epsilon')^2(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2) \\ &\geq \frac{(\epsilon')^2}{2} \|u\|^2. \end{aligned}$$

□

Доказ Теореме 51. Посматрајмо описану симплектичку многострукост $(SM, d(\beta + t\alpha))$. За затворену подмногострукост S из исказа Теореме 53 одаберимо баш $M \times \{0\}$. Ако одаберемо низ $s_k: SM \rightarrow E \otimes L^{\otimes k}$ нула сечења он је тривијално асимптотски холоморфан. Теорема 53 тада гарантује постојање асимптотски холоморфног низа сечења $\tilde{s}_k: SM \rightarrow E \otimes L^{\otimes k}$ ε -трансверзалних на нулу дуж M . На основу претходне дискусије и Леме 56 рестрикција на $i: M \hookrightarrow M \times \{0\}$ дефинише низ сечења $i^*\tilde{s}_k: M \rightarrow E_k$ који је асимптотски холоморфан и за који важи да је почевши од неког k_0 свако $i^*\tilde{s}_k \stackrel{\varepsilon}{\sim} \frac{\varepsilon}{2}$ -трансверзално на нулу дуж ξ . □

3.4 Доказ Теореме Жируа

Покажимо сада Теорему 41.

• Конструкција тополошке отворене књиге

Нека је β контактна форма на (M, ξ) . Фиксирајмо ознаке из Поглавља 3.1. Читава теорија коју смо претходно развили за квази-контактне многострукости важи и у овом специјалном случају, уз напомену да је квази-контактна

подмногострукост из Леме 49 у овом случају тривијално контактна подмногострукост. Теорема 51 гарантује стога постојање низа асимптотски-холоморфних сечења $s_k: M \rightarrow L^{\otimes k}$, ε -трансверзалних на нулу дуж ξ почевши од неког k_0 . Лема 49 обезбеђује да је $B_k := Z(s_k)$ контактна подмногострукост од (M, ξ) . Управо неко B_k искористићемо за дефинисање повеза.

Посматрајмо низ пресликавања $\pi_k: M \setminus B_k \rightarrow S^1$ датих са $\pi_k(p) = \frac{s_k(p)}{|s_k(p)|}$. Напомињемо да је кодомен добар јер је по дефиницији $L^{\otimes k}$ тополошки тривијално, односно једнако $M \times \mathbb{C}$, те се свако s_k заиста може схватити као глатко пресликавање из M у $\mathbb{C}$. На основу Напомене 24, покажемо ли да је π_k субмерзија и да можемо пронаћи одговарајућу околину од B_k , имамо да је (B_k, π_k) декомпозиција отворене књиге на M .

У ту сврху посматрамо фамилије скупова $U_k = \{p \in M \mid |s_k(p)| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ и $V_k = \{p \in M \mid |s_k(p)| > \frac{\varepsilon}{4}\}$. Коваријантни извод сечења s_k је $\nabla s_k = ds_k(p) - ik\alpha s_k(p)$, па дуж Ребовог поља важи $\nabla_{R_\beta} s_k(p) = d_{R_\beta} s_k(p) - ik s_k(p)$. По конструкцији у 3.1 Ребово поље задовољава

$$\begin{aligned} \|R_\beta\|_k &= \left(g_k(R_\beta, R_\beta)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= (kg(R_\beta, R_\beta))^{\frac{1}{2}} \\ &= k^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

а коваријантни извод задовољава $\|\nabla s_k\| = O(1)$, па закључујемо $|d_{R_\beta} s_k - ik s_k| = O(k^{\frac{1}{2}})$.

На V_k добијамо $d_{R_\beta} s_k = ik s_k \left(1 + O(k^{-\frac{1}{2}}) \right)$, и рачунамо

$$\begin{aligned} d_{R_\beta} \pi_k &= \left(\frac{ds_k}{|s_k|} - \frac{s_k}{|s_k|^2} d|s_k| \right) (R_\beta) \\ &= \frac{d_{R_\beta} s_k}{|s_k|} - \frac{s_k}{|s_k|^2} d_{R_\beta} |s_k| \\ &= \frac{1}{|s_k|} \left(d_{R_\beta} s_k - \frac{1}{\bar{s}_k} 2 \operatorname{Re} (\bar{\pi}_k d_{R_\beta} s_k) \right) \\ &= \frac{1}{|s_k|} \left(ik s_k + O(k^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{\bar{s}_k} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{s}_k}{|s_k|} (ik s_k + O(k^{\frac{1}{2}})) \right) \right) \\ &= \frac{1}{|s_k|} ik s_k + O(k^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Закључујемо да је за довољно велико k Ребово поље трансверзално на π_k на отвореном скупу V_k , односно да је $\pi_k|_{V_k}$ субмерзија.

Фиксирајмо сада $p \in U_k$. За $v \in \xi_p$ важи $\nabla_v s_k = d_v s_k(p)$, па из чињенице да ε -трансверзалност за $p \in U_k$ повлачи да је $\nabla_{\xi_p} s_k: \xi_p \rightarrow \mathbb{C}$ сурјективно закључујемо да је $s_k|_{U_k}: U_k \rightarrow \mathbb{C}$, а последично и $\pi_k|_{U_k} = \frac{s_k}{|s_k|}|_{U_k}: U_k \rightarrow S^1$ субмерзија за довољно велико k .

Показали смо, дакле, да је за довољно велико k , са (B_k, π_k) задата декомпозиција отворене књиге на M .

• *Адаптираност контактне структуре*

Унутар V_k услов адаптираности $d_{R_\beta} \pi_k \neq 0$ је већ проверен. Међутим, не можемо очекивати да је све задовољено и на околини повеза B_k — ово би значило да је произвољна контактна форма α адаптирана конструисаној отвореној књизи (B_k, π_k) . Идеја је зато да изменимо контактну форму близу B_k .

Прва важна опсервација је да је свако $B_k(t) = Z(s_k - t)$ контактна подмногострукост од (M, ξ) за $t \in D^2(\frac{\varepsilon}{2})$. Заиста, премда $s_k - t$ није асимптотски холоморфан низ сечења за одабране t он остаје низ сечења $\frac{\varepsilon}{2}$ -трансверзалних на нулу дуж ξ , а антихоломорфни део коваријантног извода сечења остаје непромењен јер је $\bar{\partial}t = 0$. Пресликавање

$$\begin{aligned} \Pi_k: U_k &\longrightarrow D^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ p &\longmapsto s_k(p) \end{aligned}$$

је тада контактна фибрација. Понављајући у потпуности први део доказа Леме 32 добијамо функцију $\delta: B_k \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ такву да за $\tilde{U}_k = \{(p, v) \in B_k \times \mathbb{C} \mid |v| \leq \delta(p)\}$ постоји дифеоморфизам

$$\phi_k: B_k \times D^2(\delta_0) \rightarrow \tilde{U}_k,$$

за који је $\pi_{D^2} = \Pi_k \circ \phi_k$ и важи

$$\phi_k^* = \tilde{g}(\beta_{B_k} + r^2 d\theta).$$

Идентично као у Лемми 32 имамо $\partial_r \tilde{g} < 0$ на $\phi_k^{-1}(\tilde{U}_k \cap V_k)$, међутим близу B_k ово не мора бити тачно.

Контактну форму модификујемо управо унутар $B_k \times D^2(\delta_0)$ тако што $\tilde{g}$ замењујемо глатком функцијом $g: B_k \times D^2(\delta_0) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ која задовољава $\partial_r g < 0$ за $r > 0$, $g(p, r) = k - r^2$ близу B_k , $g \equiv \tilde{g}$ на $\phi_k^{-1}(V_k \cap \tilde{U}_k)$. Како је за довољно велико k увек могуће одредити овакво g доказ је завршен. $\square$

Конструкција коју смо дали има још једну веома важну последицу. Не само да свака затворена контактна многострукост допушта контактну отворену књигу, већ за унутрашњости страница рестрикција адаптиране форме дефинише структуру Вајнстинове многострукости. За доказ ове чињенице видети Тврђење 12 у [21].

Глава 4

Унутрашња структура контактних отворених књига

4.1 Идеални Лиувилкови домени

Пре свега, напомнимо да у контексту овог поглавља *домен* представља компактну многострукост са границом.

Дефиниција 57. Идеални Лиувилков домен је пар (F, ω) који чине домен F и идеална Лиувилова структура ω . Идеална Лиувилова структура ω је тачна симплектичка форма на $\text{Int } F$ која допушта примитивну форму λ такву да се за неку функцију $u: F \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ са регуларним скупом нивоа $B = \partial F = u^{-1}(\{0\})$ форма $u\lambda$ продужава до форме на F која индукује контактну форму на граници B .

Форму λ зовемо *идеалном Лиувилковом формом*, а њој дуално векторско поље X_λ — поље које задовољава $i_{X_\lambda}\omega = \lambda$ — *идеалним Лиувилковим пољем*.

Напомена 58. Нека је (F, ω) идеални Лиувилков домен, λ нека идеална Лиувилова форма и $u: F \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ нека функција из Дефиниције 57. Нека је $v: F \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ произвољна функција са регуларним скупом нивоа $B = v^{-1}(\{0\})$. Посматрајмо форму $v\lambda$. На $\text{Int } F$ важи $v\lambda = \frac{v}{u} \cdot u\lambda$. Нека је $B \times (-1, 0]$ нека крагнаста околина границе $B = \partial F$. За $p \in B$ важи $du_p \neq 0$, $dv_p \neq 0$ но како је $B = u^{-1}(\{0\}) = v^{-1}(\{0\})$ важи $T_p B = \ker du_p = \ker dv_p$, те из цепања које даје крагнаста околина $T_p F \cong T_p B \oplus \langle \partial_r \rangle$ закључујемо $\frac{\partial u}{\partial r}(p) \neq 0$, $\frac{\partial v}{\partial r}(p) \neq 0$. Адамарова лема даје нам додатно $u = r\varphi$, $v = r\psi$ па имамо

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{v}{u} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\partial_r v}{\partial_r u} > 0.$$

Стога је рестрикција форме $v\lambda$ на B једнака рестрикцији форме $u\lambda$ на B помножене позитивном функцијом. Закључујемо да у случају да је λ идеална

Лиувилова форма на (F, ω) можемо одабрати било коју функцију са својствима из Дефиниције 57 те да контактна структура на B , заједно са кооријентацијом, не зависи од овог избора.

Испоставља се да важи и више — ни сама идеална Лиувилова форма није део података.

Тврђење 59. Нека је (F, ω) идеални Лиувилев домен. Тада је претходно описана позитивна контактна структура ξ на $B = \partial F$ у потпуности одређена формом ω . Додатно, она је лево инваријантна при сваком дифеоморфизму домена F који чува ω .

Доказ. Фиксирајмо произвољне λ и u из Дефиниције 57. Већ смо видели да ξ не зависи од u . Означимо сада са β глатко продужење форме $u\lambda$ са $\text{Int } F$ на F . На $\text{Int } F$ тада важи

$$\omega = d\lambda = d\left(\frac{\beta}{u}\right) = u^{-2}(u d\beta + \beta \wedge du).$$

Закључујемо да се $u^2\omega$ продужава до форме на F коју ћемо означити са γ , а која задовољава да је дуж B једнака $\beta \wedge du$. Уочимо да $\gamma = u d\beta + \beta \wedge du$ од u зависи само до на конформални фактор. Дуж B , а што поново најједноставније видимо имајући на уму неку крагнасту околину границе, γ је ранга 2 — она је ненула на Ребовом правцу у односу на индуковану контактну структуру на TB и дуж радијалног правца у крагни. Специјално, њено језгро је управо контактна дистрибуција ξ . $\square$

Напомена 60. У претходном доказу нисмо добили само ξ већ и контактну форму. Приметимо да за њу не можемо рећи да зависи само од ω , али јесте јединствено одређена са du дуж B . Како се du дуж B може схватити као сечење конормалног раслојења границе B , један додатни елегантан исказ је следећи: позитивне контактне форме које одговарају кооријентисаној контактної структури на граници идеалног Лиувиловог домена су у 1–1 кореспонденцији са негативним сечењима конормалног раслојења границе.

За рад са идеалним Лиувилевим доменима често је веома корисно посматрати симплектизације њихових граница. Сетимо се да симплектизацију контактне многострукости (B, ξ) можемо видети као подмногострукост

$$SB = \{\beta_p \in T^*B \mid \ker \beta_p = \xi_p, \beta_p > 0\},$$

где $\beta_p > 0$ означава да је свако β_p позитивно у односу на одабрану кооријентацију. Симплектичка форма на SB дата је са $d\lambda_\xi$, где λ_ξ представља рестрикцију канонске Лиувилевог форме са T^*B на SB . Природно можемо дефинисати и многострукост коју зовемо *пројективним комплетирањем симплектизације*

$$\overline{SB} = (SB \times \mathbb{R}_{\geq 0}) / \mathbb{R}_{> 0}$$

где је слободно и својствено дејство $\mathbb{R}_{> 0}$ дато просто као множење по факторима. Ова конструкција одговара томе да многострукости $SB \cong (SB \times \mathbb{R}_{> 0}) / \mathbb{R}_{> 0}$ залепимо границу $B \cong SB \times \{0\} / \mathbb{R}_{> 0}$.

Тврђење 61. Нека је (F, ω) идеалан Лиувилев домен, (B, ξ) његова контактна граница и λ идеална Лиувилова форма. Тада важи:

(1) Лиувилово векторско поље X_λ је комплетно и сингуларна фолијација коју индукује продужава се до фолијације на читавом F која је несингуларна дуж B и трансверзална на B . Са U означавамо крагнасту околину границе B која се састоји од свих листова продужене фолијације који секу B .

(2) Постоји јединствено улагање $i = i_\lambda: \overline{SB} \rightarrow F$ такво да је $i|_B = \text{id}$, $i^*\lambda = \lambda_\xi$ и $i(\overline{SB}) = U$.

Доказ.

(1) Фиксирајмо неку функцију $u: F \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ са регуларним скупом нивоа $B = u^{-1}(\{0\})$, те са β означимо продужење на F форме $u\lambda$. За $n = \frac{1}{2} \dim F$

$$\begin{aligned} \omega^n &= \left(d\left(\frac{\beta}{u}\right)\right)^n = u^{-2n} (u d\beta + \beta \wedge du)^n \\ &= u^{-2n} (u^n (d\beta)^n + nu^{n-1} (d\beta)^{n-1} \wedge \beta \wedge du) \\ &= u^{-n-1} (u d\beta + n \beta \wedge du) \wedge (d\beta)^{n-1} \\ &=: u^{-n-1} \mu, \end{aligned}$$

где је $\mu = (u d\beta + n \beta \wedge du) \wedge (d\beta)^{n-1}$ форма запремине на F . Постоји јединствено векторско поље ν на F које задовољава $i_\nu \mu = n \beta \wedge (d\beta)^{n-1}$. Како β индукује контактну форму на B , ν је несингуларно на B . Једнакост

$$\begin{aligned} i_\nu(0) &= i_\nu(du \wedge \mu) = (i_\nu du) \mu - du \wedge i_\nu \mu \\ &= \nu(u) \mu - du \wedge (n \beta \wedge (d\beta)^{n-1}), \end{aligned}$$

уз чињеницу да дуж B важи $\mu = n\beta \wedge du \wedge (d\beta)^{n-1}$, показује да дуж B важи $\nu(u) = -1$. Специјално, ν је трансверзално на B и показује споља. На $\text{Int } F$ важи

$$\begin{aligned} n\beta \wedge (d\beta)^{n-1} &= n(u\lambda) \wedge (u d\lambda + du \wedge \lambda)^{n-1} \\ &= n u^n \lambda \wedge (d\lambda)^{n-1} \\ &= u^n i_{X_\lambda} \omega^n \\ &= u^{-1} i_{X_\lambda} \mu \end{aligned}$$

па из дефиниције векторског поља ν закључујемо $X_\lambda = u\nu$. Доказ дела (1) следи непосредно.

(2) Са $\tau(p)$ означимо време потребно да $p \in U$ стигне дуж тока φ_t векторског поља ν до B . Функција $\tau: U \rightarrow \mathbb{R}$ тада је имплицитно задата са $u(\varphi_{\tau(p)}(p)) = 0$, па како је $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau(p)} u(\varphi_t(p)) = \nu(u) = -1$ на основу теореме о имплицитној функцији закључујемо да је τ глатка функција. На U можемо дефинисати глатку пројекцију на B дату са $\pi(p) = \varphi_{\tau(p)}(p)$.

Није тешко проверити да за овако дефинисано π важи $\ker d\pi_p = \langle \nu_p \rangle$, за све $p \in U \setminus B$ па је $\pi: U \setminus B \rightarrow B$ субмерзија, и пресликавање $j: U \setminus B \rightarrow T^*B$ дато са $j(p) = (\pi(p), \tilde{\lambda}_p)$, где је $\tilde{\lambda}_p(v) = \lambda_p(\hat{v})$ за било које $\hat{v} \in (d\pi_p)^{-1}(v)$, је добро дефинисано и глатко. Штавише, користећи везу између X_λ и ν , те њихових токова на $U \setminus B$ добијамо да, ако са $(\psi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ означимо ток векторског поља X_λ , важи формула

$$j(\psi_s(p)) = (\pi(p), e^s j(p)).$$

Закључујемо да је j дифеоморфизам између $U \setminus B$ и SB .

Дефинишимо $\tilde{j}: U \rightarrow \overline{SB}$ са $\tilde{j}|_B \equiv \text{id}_B$, $\tilde{j}(p) = [(u(p)j(p), u(p))]$ за $p \in U \setminus B$. По конструкцији $\tilde{j}$ је дифеоморфизам. Преостаје да проверимо чему је једнако $\tilde{j}^* \lambda_\xi$. У ту сврху означимо са π_ξ канонску пројекцију $T^*B \rightarrow B$ тако да је

$(\lambda_\xi)_{(p,\theta)}(v) = \theta_p(d\pi_\xi(v))$. Тада важи

$$\begin{aligned} (\tilde{j}^* \lambda_\xi)_p(v) &= (\lambda_\xi)_{\tilde{j}(p)}\left(\left(\tilde{d}\tilde{j}\right)_p(v)\right) \\ &= (\lambda_\xi)_{j(p)}\left((dj)_p(v)\right) \\ &= j(p)\left((d\pi_\xi \circ dj)_p(v)\right) \\ &= j(p)\left((d\pi)_p(v)\right) \\ &= \lambda_p(v), \end{aligned}$$

односно $\tilde{j}^* \lambda_\xi = \lambda$. Тражено улагање је $i = \tilde{j}^{-1}$.

Јединственост следи из чињенице да је једини дифеоморфизам $f: \overline{SB} \rightarrow \overline{SB}$, који фиксира B , а на SB задовољава $f^* \lambda_\xi = \lambda_\xi$ управо $f \equiv \text{id}$. $\square$

Следеће тврђење даје нам и одговарајући појам *стабилности* идеалних Лиувиллових домена.

Тврђење 62. Нека је F домен и $(\omega_t)_{t \in [0,1]}$ гладак пут идеалних Лиувиллових структура на F . Тада постоји изотопија $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ на F , која задовољава $\varphi_0 = \text{id}$ и $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$, за све $t \in [0,1]$. Специјално, уколико све идеалне Лиувиллове структуре индукују исту контактну структуру на граници, ова изотопија може бити одабрана тако да буде релативна у односу на $B = \partial F$.

Доказ. Видети Лему 6 у [22]. $\square$

Дефиниција 63. За хиперповрш у контактної многострукости (M, ξ) кажемо да је ξ -конвексна ако је трансверзална на неко контактну векторско поље.

Пример 64. Нека је S једна ξ -конвексна хиперповрш контактне многострукости (M, ξ) и ν њој придружено контактну векторско поље. Посматрајмо деобни скуп

$$\Gamma = \{p \in S \mid \nu_p \in \xi_p\} \subset S.$$

Затворење сваке од повезаних компоненти у $S \setminus \Gamma$ тада природно долази са структуром идеалног Лиувиловог домена. Да бисмо ово видели одаберимо произвољну контактну форму α и поставимо $u := \alpha(\nu)$. Деобни скуп Γ је тада управо скуп нула рестрикције $u|_S$. Контактну векторско поље ν задовољава

$\mathcal{L}_\nu \alpha = \mu \alpha$, за неко $\mu \in C^\infty(M)$, па из Картанове формуле добијамо

$$\begin{aligned}\mu \alpha &= \mathcal{L}_\nu \alpha = \iota_\nu d\alpha + d(\iota_\nu \alpha) \\ &= \iota_\nu d\alpha + du,\end{aligned}$$

па на $\xi = \ker \alpha$ важи $du = -\iota_\nu d\alpha$.

За фиксирано $p \in \Gamma$ тада имамо $\iota_{\nu_p} d\alpha|_{\xi_p} \neq 0$. Како је $T_p S \oplus \langle \nu_p \rangle = T_p M$ можемо закључити и $\xi_p = (\xi_p \cap T_p S) \oplus \langle \nu_p \rangle$, те $du_p|_{T_p S} \neq 0$. Специјално, 0 је регуларна вредност пресликавања $u|_S$, $\Gamma = u|_S^{-1}(\{0\})$ је подмногострукост од S и важи $T_p \Gamma = \ker(du_p|_{T_p S})$.

Да бисмо видели да је реч о контактної подмногострукости од M , приметимо да на Γ важи

$$0 \neq \iota_\nu (d\alpha)^n|_\xi = n \iota_\nu d\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}|_\xi = -n du \wedge (d\alpha)^{n-1}|_\xi,$$

те да ако размотримо шта се дешава на цепању $\xi_p = \langle v_p \rangle \oplus \langle \nu_p \rangle \oplus (\xi_p \cap T_p \Gamma)$, где је $v_p \in T_p S$ вектор за који важи $du(v_p) \neq 0$, добијамо

$$0 \neq -n du \wedge (d\alpha)^{n-1}|_\xi(v_p, -) = -n du(v_p)(d\alpha)^{n-1}|_{\xi_p \cap T_p \Gamma},$$

што је и требало доказати.

Коначно, лако се проверава да је $\frac{\alpha}{u}$ контактна форма на отвореном скупу $\{u \neq 0\} \subset M$, чије је Ребово поље управо ν . Непосредно закључујемо да је $d\left(\frac{\alpha}{u}\right)$ симплектичка форма на $S \setminus \Gamma$.

Пример 65. Нека је (W, λ) Лиувилев домен и $u: W \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ функција са регуларним скупом нивоа $B = \partial W = \{u = 0\}$, која додатно задовољава да за Лиувилево векторско поље X_λ , на $\text{int } W$, важи $X_\lambda(\ln u) < 1$. Тада је

$$\omega := d\left(\frac{\lambda}{u}\right) = \frac{d\lambda}{u} - \frac{1}{u^2} du \wedge \lambda = \frac{1}{u}(d\lambda - d(\ln u) \wedge \lambda)$$

симплектичка форма на $\text{int } W$. Заиста,

$$\begin{aligned}\omega^n &= \frac{1}{u^n} (d\lambda)^n - \frac{n}{u^n} d(\ln u) \wedge \lambda \wedge (d\lambda)^{n-1} \\ &= \frac{1}{u^n} ((d\lambda)^n - d(\ln u) \wedge \iota_{X_\lambda} (d\lambda)^n),\end{aligned}$$

па из чињенице $d(\ln u) \wedge (d\lambda)^n = 0$, и Лајбницевог правила за унутрашње диференцирање добијамо

$$\omega^n = \frac{1 - X_\lambda(\ln u)}{u^n} (d\lambda)^n.$$

Како услови за u дефинишу конвексан скуп функција, на основу Тврђења 62, добијамо да (W, ω) до на изотопију релативно у односу на границу, не зависи од избора u . Одаберимо, зато, u које не расте дуж орбита поља X_λ , те које је идентички једнако 1 ван крагнасте околине границе из Тврђења 61. Сада је тривијално видети да је $(\text{int } W, \omega)$ симплектоморфно комплетирању од (W, λ) .

С овим на уму, конструисано (W, ω) зовемо *идеалним комплетирањем* од (W, λ) , а алтернативно га можемо конструисати лепљењем контактне границе (B, λ_B) на обично комплетирање $(\widehat{W}, \widehat{\lambda})$, на идентичан начин као при конструкцији пројективног комплетирања симплектизације.

4.2 Лиувиллове отворене књиге

Дефиниција 66. Лиувилова отворена књига (B, π, ω_t) на затвореној многострукости M је отворена књига (B, π) чије странице P_t долазе са идеалним Лиувилловим структурама ω_t које допуштају примитивне λ_t такве да за неко $h: M \rightarrow \mathbb{C}$ које дефинише (B, π) важи да су форме $|h|\lambda_t$ рестрикције на унутрашњости страница неке 1-форме β на M . Овакву форму β зовемо *повезујућом 1-формом*.

Отворена књига (B, π) на M , као што смо видели, задата је монодромијом своје странице. У нешто већој општости, када допуштамо да монодромија буде неидентичка свуда сем на граници странице Биће нам неопходан нешто општији појам *слабо глатких* векторских поља на (M, B, π) . За детаљан третман глаткости коју описујемо, праћен мотивацијом и применама, погледати [34] и [39]. У конкретном случају наше отворене књиге (B, π) на многострукости M полазимо од тривијалне нормалне околине

$$i: B \times D^2 \xrightarrow{\cong} U \subset M,$$

и пресликавања

$$\begin{aligned}\mu: \tilde{U} &:= [0, 1) \times S^1 \times B \rightarrow U \\ (r, \theta, q) &\mapsto i(re^{i\theta}, q).\end{aligned}$$

Јасно је да је $\mu|_{(0,1) \times S^1 \times B}$ дифеоморфизам, те да је $\mu|_{\{0\} \times S^1 \times B}(0, \theta, q) = q$, па користећи μ можемо залепити $M \setminus B$ и $\tilde{U}$, идентификујући $U \setminus B$ и $(0, 1) \times S^1 \times B$. Добијену многострукост означаваћемо са $\text{Bl}_B(M)$. Реч је о многострукости са границом, чија је унутрашњост дифеоморфна (готово идентички једнака) са $M \setminus B$, а чија је граница дифеоморфна са $S^1 \times B$. Свако векторско поље ν на $M \setminus B$ природно се подиже на унутрашњост многострукости $\text{Bl}_B(M)$ до векторског поља $\tilde{\nu}$.

Крагнаста околина границе $\partial \text{Bl}_B(M)$ дифеоморфна је са $[0, 1) \times S^1 \times B$, и на њеној унутрашњости имамо

$$\tilde{\nu} = a \partial_r + b \partial_\theta + X,$$

где је X тангентно на B фактор. Видимо да $\tilde{\nu}$ дефинише глатко векторско поље ако и само ако a , b и X допуштају глатко продужење на читаво $[0, 1) \times S^1 \times B$, управо тада за ν кажемо да је *слабо глатко* на M . За нас су од интереса слабо глатка векторска поља на (M, B, π) која задовољавају додатне услове $\nu|_B \equiv 0$ и $\nu(\pi) = 1$ на $M \setminus B$. Оваква векторска поља зваћемо *ротирајућим*. Напомињемо да ротирајућа векторска поља очигледно сачињавају један конвексан простор.

Дефиниција 67. Нека је F домен и нека је са $\mathcal{D}_\partial(F)$ означен скуп дифеоморфизама релативних у односу на границу домена F . Класе путне повезаности (где су путеви изотопије) у $\mathcal{D}_\partial(F)$ зваћемо *групом класа пресликавања* домена F и означавати са $\text{MCG}(F)$.

Сваком ротирајућем пољу ν можемо придружити његов ток за време 2π и он ће бити представник једне класе у $\text{MCG}(F)$. Штавише, уколико допустимо да ν узме сваку могућу вредност у конвексном простору ротирајућих векторских поља, придружени дифеоморфизми представљаће све могуће представнике једне класе у $\text{MCG}(F)$. Да бисмо стекли интуицију о томе шта слаба глаткост доноси у односу на глаткост погледајмо следећи пример.

Пример 68. На $\mathbb{R}^2$ посматрајмо глатко векторско поље дато са $\nu = \partial_\theta + rf \partial_r$, где је $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ глатка функција. Нека су $\psi, \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дифеоморфизми x -осе

добити као вредности тока векторског поља ν за времена π и 2π , респективно. Тада ψ мења оријентацију, док је φ чува. Ово задаје одређене рестрикције за φ . Рецимо, Тејлоров развој функције φ у 0 не може бити облика $x + x^2 + \dots$. Заиста, тада би постојало $\varepsilon > 0$ такво да је $\varphi(x) > x$ на $(0, \varepsilon]$, те како је φ растуће, а ψ опадајуће, имали бисмо

$$\varphi \circ \psi(x) = \psi \circ \varphi(x) < \psi(x), \quad \text{за све } x \in (0, \varepsilon],$$

и стога $\varphi(x) < x$, за све $x \in [\psi(\varepsilon), 0)$, што није могуће при услову $\varphi(x) = x + x^2 + o(x^2)$. С друге стране, уколико допустимо да ν буде само слабо глатко, што одговара услову да је f глатко као функција на $\mathbb{R}_{\geq 0} \times S^1$, а не као функција на $\mathbb{R}^2$, придружени дифеоморфизам φ може бити било који репрезент своје класе у групи класа пресликавања.

У контексту Лиувиллових отворених књига говорићемо о простору ротирајућих векторских поља ν на M која додатно чувају фамилију идеалних Лиувиллових структура $\{\omega_t\}_{t \in S^1}$, то јест чији ток φ_t^ν задовољава $(\varphi_t^\nu)^* \omega_t = \omega_0$, за све $t \in S^1$. Оваква векторска поља зваћемо *симплектичким ротирајућим пољима*. Лако је проверити да је свако ротирајуће поље симплектичко ако и само ако лежи у језгру затворене 2-форме $\sigma \in \Omega^2(M \setminus B)$ која задовољава $\sigma|_{P_t} = \omega_t$.

Теорема 69. Нека је (B, π, ω_t) Лиувилова отворена књига и $h: M \rightarrow \mathbb{C}$ једно од њој придружених дефинишућих пресликавања. Тада се за сваку повезујућу 1-форму β , векторско поље ν на $M \setminus B$, које лежи у језгру форме $d\left(\frac{\beta}{|h|}\right)$ и задовољава $d\pi(\nu) = 1$, продужава нулом на B до глатког векторског поља на M . Додатно, β се може изабрати тако да ν буде 2π -периодично близу B .

Доказ. За почетак, рестрикција произвољне повезујуће 1-форме β на повез B дефинише заједничку контактну структуру граница свих идеалних Лиувиллових страница. Уочавамо да одавде следи да постоји $\varepsilon > 0$ такво да за све $w \in \mathbb{C}$, модула мањег од ε , за подмногострукости $B_w = h^{-1}(w)$ важи да је са $\alpha_w := \beta|_{B_w}$ дефинисана контактна форма.

Фиксирајмо додатно и околину повеза

$$N = h^{-1}(\{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq \varepsilon\}).$$

Како важи да је свако $\alpha_w = \beta|_{B_w}$ нигде нула диференцијална форма, са $\sigma = \ker \beta|_N$ дефинисана је дистрибуција ранга $2n$ на N . Такође, контактне дистрибуције $\xi_w = \ker \alpha_w$, задане на сваком B_w , заједно чине глатку дистрибуцију на N . Заиста, за све w важи $TB_w = \ker dh$, па за дистрибуцију $\xi = \sigma \cap \ker dh$ важи $\xi|_{B_w} = \xi_w$. Ранг дистрибуције ξ је $2n - 2$. Како је $d\beta$ недегенерисано на σ можемо посматрати и $d\beta$ -ортогонални комплемент од ξ унутар σ и важи $\sigma = \xi \oplus \xi^\perp$.

Управо ово цепање омогућава нам да говоримо о контактної конексији. Не улазећи у детаље, реч је о томе да је $h: N \rightarrow D^2(\varepsilon)$ фибрација, те да је у свакој тачки $dh: \xi_p^\perp \rightarrow \mathbb{C}$ изоморфизам и $dh|_\xi \equiv 0$. Ово нам омогућава да подижемо векторска поља са диска на N тако да леже у $\xi^\perp$. Уочимо сада неколико поља.

- ∂_α : векторско поље на N , које лежи у $\ker dh$ и чија је рестрикција на свако B_w Ребово R_{α_w} .
- $\tilde{\partial}_\theta, \tilde{\partial}_r$: векторска поља у $\xi^\perp$ која се са dh пројектују на ∂_θ и ∂_r , где су са (r, θ) означене поларне координате на $D^2(\varepsilon)$.

Векторско поље ν сада можемо записати као

$$\nu = a\tilde{\partial}_\theta + b\tilde{\partial}_r + c\partial_\alpha + \tilde{\nu}, \quad (4.1)$$

где су a, b, c глатке функције на $M \setminus B$, а $\tilde{\nu}$ лежи у ξ . Искористимо услове дате за ν .

- $d\pi(\nu) = 1$

У наведеним координатама $\pi(p)$ је управо θ -координата тачке $h(p)$. Стога $d\pi(\nu) = d\theta(dh(\nu)) = d\theta(a\tilde{\partial}_\theta + b\tilde{\partial}_r) = a$, одакле закључујемо $a \equiv 1$.

- ν лежи у $\ker d\left(\frac{\beta}{|h|}\right)$

Како је r -координата тачке $h(p)$ управо $|h(p)|$, означимо функцију $|h|$ са r , тада добијамо једнакости

$$d\left(\frac{\beta}{r}\right) = \frac{d\beta}{r} - \frac{1}{r^2} dr \wedge \beta, \quad (4.2)$$

и

$$\begin{aligned}
 i_\nu(dr \wedge \beta) &= dr(\nu)\beta - \beta(\nu)dr \\
 &= dr \left(\tilde{\partial}_\theta + b\tilde{\partial}_r + c\partial_\alpha + \tilde{\nu} \right) \beta - \beta \left(\tilde{\partial}_\theta + b\tilde{\partial}_r + c\partial_\alpha + \tilde{\nu} \right) dr \\
 &= b\beta + c\beta(\partial_\alpha)dr \\
 &= b\beta + cdr,
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

где последња у низу једнакости следи из чињенице да $(\partial_\alpha)_p = \left(R_{\alpha_{h(p)}} \right)_p$, као и $\beta|_{TB_{h(p)}} = \alpha_{h(p)}$.

Према томе $i_\nu(d(\frac{\beta}{r})) = 0$ еквивалентно је са

$$i_\nu(d\beta) = \frac{a}{r}\beta + \frac{b}{r}dr. \tag{4.4}$$

Ову једнакост можемо искористити да изразимо коефицијенте a, b , као и векторско поље $\tilde{\nu}$ из (4.1) у терминима $\tilde{\partial}_r, \tilde{\partial}_\theta$ и ∂_α .

• *Рачун за $\tilde{\nu}$*

$$\begin{aligned}
 i_\nu(d\beta)(v) &= d\beta \left(\tilde{\partial}_\theta + a\tilde{\partial}_r + b\partial_\alpha + \tilde{\nu}, v \right) \\
 &= d\beta(\tilde{\nu}, v).
 \end{aligned}$$

$\beta(v) = \alpha_{h(p)}(v) = 0$, јер $v \in \xi_p = \ker \alpha_{h(p)}$.

$dr(v) = 0$ јер је $dh(v) = 0$.

Закључујемо да за све $p \in N$ и све $v \in \xi_p$ важи $d\beta(\tilde{\nu}_p, v) = 0$. Из недегенерисаности форме $d\alpha_{h(p)} = (d\beta)|_{TB_{h(p)}}$ следи $\tilde{\nu} \equiv 0$.

• *Рачун за b*

$$\begin{aligned}
 i_\nu(d\beta)(\tilde{\partial}_r) &= d\beta \left(\tilde{\partial}_\theta + a\tilde{\partial}_r + b\partial_\alpha, \tilde{\partial}_r \right) \\
 &= d\beta(\tilde{\partial}_\theta, \tilde{\partial}_r) + d\beta(\partial_\alpha, \tilde{\partial}_r).
 \end{aligned}$$

$$\beta(\tilde{\partial}_r) = 0, dr(\tilde{\partial}_r) = 1$$

Једнакост (4.4) постаје

$$d\beta(\tilde{\partial}_\theta, \tilde{\partial}_r) + b d\beta(\partial_\alpha, \tilde{\partial}_r) = \frac{b}{r},$$

што је еквивалентно са

$$b = \frac{r d\beta \left(\tilde{\partial}_\theta, \tilde{\partial}_r \right)}{1 + r d\beta \left(\partial_\alpha, \tilde{\partial}_r \right)}.$$

• *Рачун за a*

$$i_\nu(d\beta)(\partial_\alpha) = d\beta \left(a\tilde{\partial}_r, \partial_\alpha \right) + d\beta \left(\tilde{\partial}_\theta, \partial_\alpha \right).$$

$$\beta(\partial_\alpha) = 1, dr(\partial_\alpha) = 0$$

Услов (4.4) по ∂_α трансформише се у

$$a d\beta \left(\tilde{\partial}_r, \partial_\alpha \right) + d\beta \left(\tilde{\partial}_\theta, \partial_\alpha \right) = \frac{a}{r},$$

односно

$$a = \frac{d\beta \left(\tilde{\partial}_\theta, \partial_\alpha \right)}{1 + r d\beta \left(\partial_\alpha, \tilde{\partial}_r \right)}.$$

Рутинском провером утврђујемо да је за добијене a, b услов (4.4) остварен и по ∂_θ . Како се a и b продужавају нулом до глатких функција на N , доказ првог дела тврђења је завршен.

Преостаје да повезујућу 1-форму β модификујемо у повезујућу β' тако да ν' које јој придружујемо буде 2π -периодично. Помоћу контактне конекције о којој је било речи можемо изабрати тривијализацију за $N \cong B \times D^2(\varepsilon)$ такву да у (p, r, θ) координатама важи $\tilde{\partial}_r = \partial_r$, односно, такву да управо поље ∂_r лежи у $\xi^\perp$. Напомињемо да не можемо истовремено гарантовати и $\partial_\theta = \tilde{\partial}_\theta$. Међутим, једноставно се проверава да се $\beta(\partial_\theta)d\theta$ глатко продужава до форме на читавом $B \times D^2(\varepsilon)$. Поставимо

$$\beta' = \beta - S \beta(\partial_\theta) d\theta,$$

где је $S: V \rightarrow [0, 1]$ глатка функција чији носач лежи у N , и која је једнака 1 близу B . Ова модификација не мења рестрикцију на странице па β' остаје повезујућа форма. С друге стране, близу B задовољено је

$$\beta' = f p_B^* \alpha_0,$$

где је f позитивна функција, $\alpha_0 = \beta|_{TB}$ и $p_B: B \times D^2(\varepsilon) \rightarrow B$ пројекција.

Разматрање услова који одређују ν' доводи нас до закључка да је ν' хоризонтално (лежи у сваком (p, r, θ) у тангентном простору на диск $\{p\} \times D^2(\delta)$) и тангентно на нивое функције $\frac{f}{|h|}$, близу B . Непосредно закључујемо да је ν' 2π -периодично. $\square$

Када на неком домену F фиксирамо идеалну Лиувилу структуру ω , можемо посматрати посебну групу класа пресликавања, која је сачињена од класа путне повезаности симплектичких дифеоморфизама идеалног Лиувиловог домена (F, ω) , где пут представља једну симплектичку изотопију. Ову групу означавамо са $\text{MCG}(F, \omega)$. Слично као што је био случај и код обичних ротирајућих векторских поља, симплектичка ротирајућа поља на (F, ω) генерисаће на описани начин све представнике једне класе у $\text{MCG}(F, \omega)$. Коначно, захтев да монодромија буде једнака идентитети на околини границе домена добија свој пуни смисао и можемо разумети његову рестриктивност. Наиме, важи:

Тврђење 70. Свака симплектичка монодромија једнака идентитети на околини границе потиче од глатког симплектичког ротирајућег поља.

Скица доказа. На основу Теореме 69, уз симплектоморфизам из исказа тврђења можемо посматрати и један генерисан глатким симплектичким ротирајућим векторским пољем који је представник исте класе у $\text{MCG}(P, \omega)$. Техника коју потом можемо искористити да конструишемо тражено векторско поље је да искористимо Тврђење 61 како бисмо конструисали изотопију између два представника која фиксира читаву околину границе. $\square$

У раду са идеалним Лиувилевим доменима такође постоји адаптација Турстон–Винкелнселерове конструкције. Доказ је до на техничке детаље готово идентичан оном изложеном у Теорему 39, стога наредно тврђење наводимо без њега. Сви детаљи могу се пронаћи у [22].

Теорема 71. Нека је (F, ω) идеални Лиувилев домен и $\Psi: F \rightarrow F$ симплектички дифеоморфизам који фиксира ∂F . Отворена књига $OB(F, \Psi)$ је тада Лиувилова отворена књига.

Ипак, у овој тези нећемо прибегавати ларпурларистичким принципима — идеални Лиувилеви домени не интересују нас сами себе ради. Прву везу

између Лиувилевих отворених књига и контактних структура видимо у следећој теорему.

Теорема 72. Нека је (M, ξ) затворена контактна многострукост и (B, π) адаптирана отворена књига са дефинишућим пресликавањем $h: M \rightarrow \mathbb{C}$. Тада је скуп контактних форми α за ξ , за које $d\left(\frac{\alpha}{|h|}\right)$ индукује идеалну Лиувилеву структуру на страницама, непразан и конвексан.

Доказ. Пођимо од произвољне адаптиране форме α . Идентичан рачун као у примеру 65 показује да је $d\left(\frac{\alpha}{|h|}\right)$ симплектичка форма на унутрашњости странице, ако и само ако, је $X_\alpha(\ln |h|) < 1$, где је X_α Лиувилево поље на унутрашњости произвољне странице. Ово не мора бити тачно за посматрану форму α . Међутим, ако приметимо да је $X_\alpha(\ln |h|) < 0$ близу B , јасно је да постоји $\delta > 0$, такво да кад год је $|h| < \delta$, важи $X_\alpha(\ln |h|) < 0$. Одаберимо произвољну глатку функцију φ , која задовољава

$$\varphi|_{[0, \frac{\delta}{3}]} \equiv \text{id}, \quad \varphi' \geq 0, \quad \varphi|_{[\frac{2\delta}{3}, +\infty)} = \text{const.}$$

Јасно је да је за $v := \varphi \circ |h|$, са $\beta = \frac{|h|}{v}\alpha$ дефинисана једна контактна форма на (M, ξ) . Такође,

$$X_\alpha(\ln v) = \frac{\varphi'(|h|)}{\varphi(|h|)} X_\alpha(\ln |h|) < 0,$$

по конструкцији, што показује да контактна форма β припада траженом скупу. $\square$

Теорема 72 мотивише следећу дефиницију.

Дефиниција 73. Нека је (B, π, ω_t) Лиувилова отворена књига на затвореној многострукости M и h једно њој придружено дефинишуће пресликавање. Контактна структура на M адаптирана је на (B, π, ω_t) ако допушта контактну форму α такву да $\frac{\alpha}{|h|}$ индукује идеалну Лиувилеву форму на свакој од страница.

Једна лепа чињеница везана за претходну дефиницију је следећа. Наиме, ако поменута повезујућа форма постоји она је и јединствена (подразумевајући да је дефинишуће пресликавање отворене књиге h фиксирано). Она следи из својстава самих идеалних Лиувилевих домена, прецизније, једина функција $f: \text{Int } F \rightarrow \mathbb{R}$, која за фиксирану идеалну Лиувилеву форму λ задовољава да је $d(f\lambda) = \omega$, је константна функција 1.

Заиста, у случају $\dim F \geq 4$, у свакој тачки $p \in \text{Int } F$, хиперраван $H_p = \ker \lambda_p$ садржи симплектички потпростор од $(T_p M, \omega_p)$. Ово следи из прости дискусије о димензији јер важи $\dim (H_p \cap H_p^{\perp \omega}) = 1$ и $\dim H_p \geq 3$. Јасно, исту логику не можемо применити и у случају $\dim F = 2$, где је аргумент нешто сложе- нији. За почетак, није тешко приметити да важи

$$df \wedge \lambda = X_\lambda(f) \omega.$$

Стога је

$$d(f\lambda) = f\omega + df \wedge \lambda = (f + X_\lambda(f)) \omega.$$

Доказ чињенице $f \equiv 1$ своди се на доказ да $g := f - 1$, које задовољава услов

$$X_\lambda(g) = -g \tag{4.5}$$

мора бити идентички 0. Да бисмо ово показали позовимо се још једном на Тврђење 61.

Оно гарантује комплетност векторског поља X_λ . Означимо са φ_t његов ток. Услов (4.5) даје нам

$$\frac{d}{dt}(g(\varphi_t(x))) = X_\lambda(g)(\varphi_t(x)) = -g(\varphi_t(x)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Дакле, задовољено је $g(\varphi_t(x)) = e^{-t}g(x)$ за $t \in \mathbb{R}$. Закључујемо да ако је за неко $p \in \text{Int } F$ $g(p) \neq 0$, онда важи $\lim_{t \rightarrow -\infty} |g(\varphi_t(p))| = +\infty$. Међутим, услов $\nu(u)|_K \equiv -1$ из Тврђења 61 нам каже да постоји $\varepsilon > 0$ такво да крећући се дуж негативног тока векторског поља X_λ не можемо прећи из области $\{u > \varepsilon\}$ у област $\{u < \varepsilon\}$. Стога, скуп $\{\varphi_t(p) \mid t \leq 0\}$ лежи у компактном $F \setminus \{u < \min\{\varepsilon, u(p)\}\}$, што је у контрадикцији са претходно показаном неограниченошћу функције g на том скупу.

Коначно, дајемо и следеће тврђење о вези између контактних и Лиувиллових отворених књига.

Теорема 74. На затвореној многострукости, контактне структуре адаптиране датој Лиувиловој отвореној књизи формирају непразан, конвексан и слабо-контрактибилан потпростор у простору свих контактних структура. Специјално, све су изотопне.

Доказ. Нека је M посматрана $(2n + 1)$ -многострукост, (B, π, ω_t) дата Лиувилева отворена књига на њој и $h : M \rightarrow \mathbb{C}$ њој одговарајуће дефинишуће преликавање. За произвољну повезујућу форму β , као и раније, постоји $\varepsilon > 0$ такво да је рестрикција форме β на сваку фибру $B_\omega = \{h = \omega\}$ контактна форма за све $|\omega| \leq \varepsilon$. Да бисмо показали да је простор из исказа теореме непразан, за $c \geq 0$ формирајмо фамилију форми

$$\beta_c = \beta + c|h|f(|h|)d\theta,$$

где је $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ произвољна неоппадајућа функција која задовољава $f(x) = x$ за $x \leq \frac{\varepsilon}{2}$ и $f(x) = 1$ за $x \geq \varepsilon$. Јасно, на свакој страници $\frac{\beta_c}{|h|} = \frac{\beta}{|h|}$, те је реч о фамилији повезујућих форми. Стога, довољно је да докажемо да је за довољно велико c , β_c контактна форма на M . Ради лепшег записа уведемо ознаку $r = |h|$. Важи једнакост

$$\begin{aligned} \beta_c \wedge (d\beta_c)^n &= ncrf'(r)dr \wedge d\theta \wedge \beta \wedge (d\beta)^{n-1} \\ &\quad + cf(r)d\theta \wedge (rd\beta + n\beta \wedge dr) \wedge (d\beta)^{n-1} \\ &\quad + \beta \wedge (d\beta)^n. \end{aligned}$$

Како је реч о форми на компактној многострукости M , сабирак $\beta \wedge (d\beta)^n$, за велике c , је занемарљив. Стога, довољно је имати позитивност прва два сабирка. Наравно, да бисмо говорили о знаку форме неопходно је да знамо како је задата оријентација на M . На $M \setminus B$ оријентација је задата са $d\theta \wedge (d(\frac{\beta}{r}))^n$. Овако задата, она се близу B слаже са оријентацијом коју дефинишу оријентација на B , дата формом $\beta \wedge (d\beta)^{n-1}$, те оријентација наслеђена од диска у нормалној околини $\{r < \varepsilon\}$, дата са $h^*(dx \wedge dy) = r dr \wedge d\theta$.

- Форма $\Omega_1 = f'(r)dr \wedge d\theta \wedge \beta \wedge (d\beta)^{n-1}$:

Како је по конструкцији $f'(r)$ ненегативно, идентички нула ван $\{r < \varepsilon\}$, строго позитивно на $\{r \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$, на основу претходне дискусије, Ω_1 је ненегативно и позитивно близу B .

- Форма $\Omega_2 = f(r)d\theta \wedge (rd\beta + n\beta \wedge dr) \wedge (d\beta)^{n-1}$:

Једнака је нули дуж повеза $B = \{r = 0\}$. На $\{r > 0\}$ приметимо да важи

$$d\theta \wedge (rd\beta + n\beta \wedge dr) \wedge (d\beta)^{n-1} = r^{n+1}d\theta \wedge \left(d\left(\frac{\beta}{r}\right)\right)^n.$$

Узимајући у обзир претходну дискусију о оријентацији, јасно је да је Ω_2 строго позитивно на $\{r > 0\}$.

Закључујемо да је $\Omega_1 + \Omega_2$ позитивна форма на читавом M , одакле следи тврђење.

За доказ слабе контрактибилности фиксирајмо $k \geq 0$ и k -сферу контактних структура $\{\xi_s \mid s \in S^k\}$, адаптираних датој Лиувиловој отвореној књизи. Видели смо да свакој од њих одговара јединствена повезујућа контактна форма α_s . Технички детаљ који изостављамо, а који се може добити разматрањима у изложеном доказу о јединствености, је да је и придруживање $s \mapsto \alpha_s$ непрекидно. Искористимо чињеницу да је простор повезујућих форми конвексан и формирајмо $(k+1)$ -диск повезујућих форми $\{\beta_s \mid s \in D^{k+1}\}$ тако да за $s \in S^k$ важи $\beta_s = \alpha_s$. Форме у овом диску модификујемо на следећи начин. Из компактности D^{k+1} следи да постоји ε из првог дела доказа које одговара свакој од конструисаних форми. Поновимо за то ε изложену конструкцију. Компактност тада гарантује постојање $c_0 > 0$ за које је

$$\{\beta_{s,c_0} = \beta_s + c_0 |h| f(|h|) d\theta \mid s \in D^{k+1}\}$$

диск повезујућих контактних форми. Добијена k -сфера $\{\beta_{s,c_0} =: \alpha_{s,c_0} \mid s \in S^k\}$ хомотопна је полазној у посматраном простору, а хомотопија је дата експлицитно са

$$\alpha_{s,c} = \alpha_s + c |h| f(|h|) d\theta, \quad c \in [0, c_0].$$

Дакле, и полазна сфера је нулхомотопна, што је и требало доказати. $\square$

4.3 Идеалне Жируове форме

Теорема 72 показује да, за дату контактну отворену књигу (B, π) на (M, ξ) , увек постоји позитивна контактна форма α која дефинише Лиувилу отворену књигу $\left(B, \pi, d\left(\frac{\alpha}{|h|}\right) \Big|_{TP_t}\right)$, те потом Теорема 69 гарантује да за симплектичко ротирајуће векторско поље придружено добијеној Лиувиловој отвореној књизи можемо сматрати да је глатко на M , лако се види да 2π -периодичност из другог дела исказа Теореме 69 није остварива под условом да повезујућа форма остане и контактна форма на (M, ξ) . Ова опсервација своди се, суштински, на следећи елементаран пример.

Пример 75. У цилиндричним координатама (r, θ, z) на $\mathbb{R}^3$ стандардна контактна форма дата је са $\alpha = dz + r^2 d\theta$. Декомпозиција отворене књиге дата

је дефинишућим пресликавањем $h : (x, y, z) \mapsto x + iy$. Форма α тада индукује структуру Лиувилове отворене књиге, будући да је интериор сваке странице скуп

$$\text{int } P_t = \{r > 0, \theta = t\},$$

на којем се $d(\frac{\alpha}{r})$ рестрикује као $\frac{1}{r^2}dr \wedge dz$. Придружено симплектичко ротирајуће поље је пропорционално са $\partial_\theta + r^2\partial_z$. С друге стране, да смо уместо $\frac{\alpha}{r}$ посматрали $\frac{\alpha}{r^2}$ добили бисмо управо векторско поље ∂_θ .

Претходна запажања крију иза себе исти феномен као и она изнешена у Напомени 35. Проблем који смо тада изнели учинили смо једноставним увођењем појма идеалних Лиувилових домена — колоквијално речено, поделили смо све растојањем од повеза. У претходном примеру крије се и разрешење новодобијених проблема — треба пронаћи ефикасан начин да делимо квадратом растојања од повеза. Ово примећују и Курт и Масо у [13], те уводе следећи појам.

Дефиниција 76. Нека је (B, π) декомпозиција отворене књиге многострукости M . Идеална Жируова форма адаптирана на (B, π) је контактна форма α на $M \setminus B$ која задовољава:

- $d\pi(R_\alpha) > 0$,
- постоји позитивна контактна форма β на B и околина $i : B \times D^2 \hookrightarrow M$ од B таква да важи $i^*\pi = \theta$ и $i^*\alpha = d\theta + \frac{\beta}{r^2}$, где су (r, θ) поларне координате на D^2 .

Ефективност идеалних Жируових форми у области коју изучавамо почива на чињеници да заправо готово ништа ново није дефинисано. Покажимо то.

Тврђење 77. Нека је (M, ξ) контактна многострукост и (B, π) декомпозиција отворене књиге на M . Контактна структура ξ тада има контактну форму адаптирану на (B, π) ако и само ако је дефинисана идеалном Жируовом формом адаптираном на (B, π) .

Доказ. У оба смера модификујемо дату форму у околини повеза. Приметимо за почетак да уколико одаберемо тривијалну околину повеза $B \times D^2$, те у њој дату форму α заменимо са $f\alpha$, за неко $f : B \times D^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, услови адаптираности свде се у оба случаја на $\partial_r f < 0$, за r мало.

Уколико пођемо од идеалне Жируове форме α и модификујемо је унутар $B \times D^2$, где је $i^*\alpha = \frac{\beta}{r^2} + d\theta$, постављајући $\alpha' = f(r)(\beta + r^2 d\theta)$, где је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ глатка функција која задовољава $f'(r) < 0$, за $r > 0$, и $f(r) = \frac{1}{r^2}$, за r близу 1.

С друге стране, пођемо ли од адаптиране форме α , можемо искористити Лему 32 да добијемо околинду повеза $i : B \times D^2 \hookrightarrow M$, на којој важи $i^*\alpha = g(\beta + r^2 d\theta)$. Одаберимо тада $\chi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ које задовољава:

$$\chi'(r) \leq 0, \quad \chi|_{[0, \varepsilon]} \equiv 1, \quad \chi|_{[\frac{2}{3}, 1]} \equiv 0.$$

Унутар $B \times D^2$ модификујемо $i^*\alpha$ постављајући

$$\alpha'(r) = \left(\frac{\chi(r)}{r^2} + (1 - \chi(r))g \right) (\beta + r^2 d\theta).$$

Лако се проверава да је $\tilde{\alpha}$ дато са $(i^{-1})^*\alpha'$, на $i(B \times D^2)$, и α , ван $i(B \times D^2)$, идеална Жируова форма. $\square$

У наредном поглављу екстензивно ћемо користити идеалне Жируове форме, прецизније, динамику коју оне индукују на затвореној контактної многострукости. За сада, наведимо неколико непосредних запажања.

- Контактна структура $\ker \alpha$ глатко се продужава на повез јер важи $\ker(d\theta + \frac{\beta}{r^2}) = \ker(r^2 d\theta + \beta)$.
- На унутрашњости страница, рестрикција идеалне Жируове форме индукује структуру Лиувилево многострукости, коначног типа, чију контактну границу у бесконачности можемо идентификовати са B .
- Ребово поље R_α индукује пресликавање које ћемо звати његовом *холономијом*. Наиме, ако са $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ означимо криву јединичне брзине, онда можемо посматрати функцију $f_\gamma : M \setminus B \rightarrow \mathbb{R}$, време које је потребно току $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ Ребовог поља да стигне од странице $\pi^{-1}(\gamma(a))$ до странице $\pi^{-1}(\gamma(b))$. Она је јединствено решење једначине

$$\pi(\varphi_{f_\gamma(p)}(p)) = \pi(p) + (b - a),$$

па је реч о глаткој функцији. Холономија Ребовог поља R_α је тада дифеоморфизам између $\pi^{-1}(\gamma(a))$ до $\pi^{-1}(\gamma(b))$, дат са $h_\gamma(p) = \varphi_{f_\gamma(p)}(p)$. Реч је заправо о тачном симплектоморфизму двеју Лиувилевох многострукости јер очигледно важи $h_\gamma^*\alpha = \alpha + df_\gamma$. Посебно је занимљиво шта се дешава у околини

повеза из Дефиниције 76, наине, Ребово поље се на $B \times D^2$ поклапа са ∂_θ , па је ту $f_\gamma \equiv b - a$, а холономија не мења форму α . Специјално, за $a = 0$ и $b = 2\pi$, добијамо да је монодромија $\Psi : \pi^{-1}(0) \rightarrow \pi^{-1}(0)$ са носачем у компактном скупу и задовољава $\Psi^*\alpha = \alpha + df$, где је $f > 0$ и $f \equiv 2\pi$ ван компактног скупа.

Пружимо још један одговор на питање постављено у Напомени 35. Наине, Тврђење 77 можемо тумачити тако да прелазак са разматрања адаптираних форми на разматрање идеалних Жируових форми, представља тек промену контекста. На основу претходних запажања, за дату контактну отворену књигу, о унутрашњости странице можемо апстрактно говорити као о датој Лиувиловој многострукости (W, λ) . Имамо тада још једну локалну „тривијализацију“ коју везујемо за декомпозицију отворене књиге.

Тврђење 78. Нека је M затворена многострукост и α идеална Жируова форма на њој адаптирана на декомпозицију отворене књиге (B, π) и нека је (W, λ) Лиувилова многострукост коначног типа тачно симплектоморфна страницама. Тада, за свако $c \in S^1$ и сваки отворен интервал $I \subset S^1$, који садржи c , постоји фибрација $\tilde{\pi} : M \setminus B \rightarrow S^1$ таква да:

- $\tilde{\pi} = \pi$, близу B и на $\pi^{-1}(S^1 \setminus I)$,
- α је адаптирано на $(B, \tilde{\pi})$,
- постоји улагање $g : W \times \mathbb{R} \rightarrow \pi^{-1}(I)$, такво да $g^*\alpha = f(\lambda + dt)$, где је $f \equiv 1$ и $g^*\tilde{\pi} = c + t \pmod{2\pi}$ на $W \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, за неко $\varepsilon > 0$.

Доказ. По претпоставци, постоји дифеоморфизам $i : W \rightarrow \pi^{-1}(c)$, такав да је $i^*\alpha = \lambda + dk$, за неку функцију k са компактним носачем. Можемо га искористити да дефинишемо имерзију

$$\begin{aligned} j_0 : W \times \mathbb{R} &\rightarrow M \setminus B \\ (p, t) &\mapsto \varphi_t(i(p)), \end{aligned}$$

где је $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ток Ребовог поља R_α . Овако дефинисано j_0 задовољава

$$\begin{aligned} j_0^*\alpha &= i^*\varphi_t^*\alpha + \alpha(R) dt \\ &= \lambda + dk + dt. \end{aligned}$$

Можемо посматрати и композицију

$$\begin{aligned} j : W \times \mathbb{R} &\xrightarrow{\delta} W \times \mathbb{R} \xrightarrow{j_0} M \setminus B \\ (p, t) &\mapsto (p, t - k(p)) \mapsto \varphi_{t-k(p)}(i(p)). \end{aligned}$$

Она задовољава

$$\begin{aligned} j^* \alpha &= \delta^*(\lambda + dk + dt) \\ &= \lambda + dk + d(t - k) \\ &= \lambda + dt, \end{aligned}$$

међутим, $\pi^{-1}(c)$ је слика од $\{t = k(p)\}$ при j . Са f_+ , односно f_- , означимо време које је потребно току φ да дође од $i(p)$ до $\pi^{-1}(S^1 \setminus I)$ и обратно. Обе функције ограничене су одоздо позитивном константом, што можемо видети из претходних запажања о току Ребовог поља близу B . Ако уведемо ознаку

$$Y = \{(p, t) \mid k(p) - f_-(p) < t < k(x) + f_+(x)\},$$

онда је $j|_Y : Y \rightarrow \pi^{-1}(I)$ дифеоморфизам.

Желимо да деформишемо $j^* \pi$ кроз функције растуће по t унутар компактног подскупа од Y , тако да на њему важи $j^* \pi = t + c \pmod{2\pi}$. Јасно је да је ово могуће ако и само ако имамо $k - f_- < 0$ и $k + f_+ < 0$, што а priori не мора бити тачно. Међутим, можемо уочити токове Ψ и Ψ' , Лиувиллових форми λ и $\alpha|_{\pi^{-1}(c)}$, респективно, те i са почетка доказа заменити са $i_s = \Psi'_{-s} \circ i \circ \Psi_s$. Тада се функција k мења, у складу са $i_s^* \alpha = \lambda + dk_s$, по правилу

$$\begin{aligned} i_s^* \alpha &= \Psi_s^* (i^* (\Psi_{-s}^* \lambda)) = \Psi_s^* (i^* (e^s \lambda)) \\ &= \Psi_s^* (e^s \lambda + e^s dk) \\ &= \lambda + d(e^{-s} \cdot k \circ \Psi_s), \end{aligned}$$

односно $k_s = e^{-s}(k \circ \Psi_s)$. Како је $k \circ \Psi_s$ са компактним носачем, то се за довољно велико s , функција k_s може учинити произвољно малом. Ово наравно не мења доње ограничење за f_+ и f_- .

Дакле, можемо претпоставити да постоји дифеоморфизам $j : Y \rightarrow \pi^{-1}(I)$, и $\varepsilon > 0$, тако да важи

$$j^* \alpha = \lambda + dt, \quad j^* \pi|_{W \times (-\varepsilon, \varepsilon)} = t + c \pmod{2\pi},$$

што је и требало доказати. □

Глава 5

Отворене књиге и уредљивост

5.1 Контактна Хоферова норма

На датој контактної многострукости (M, ξ) посматраћемо групу

$$\mathcal{G} = \text{Cont}_0(M, \xi)$$

компактно подржаних контактоморфизама изотопних идентитети, као и њено универзално наткривање

$$\tilde{\mathcal{G}} = \widetilde{\text{Cont}_0(M, \xi)}$$

које може бити схваћено као скуп хомотопских класа путева у $\mathcal{G}$ који почињу у идентитети.

Тврђење 79. $\mathcal{G}$ је природно изоморфно групи $\mathbb{R}_{>0}$ -еквиваријантних Хамилтонових дифеоморфизама позитивне симплектизације многострукости M .

Доказ. Ради интуиције, објашњавамо како подижемо контактоморфизам. У ту сврху фиксирајмо $\psi \in \mathcal{G}$ и дефинишемо

$$S\psi : T^*M \rightarrow T^*M$$

тако што за фиксирано $\beta \in T^*M$ постављамо

$$S\psi(\beta) = (\psi^{-1})^*\beta.$$

Да је реч о дифеоморфизму видимо из фунторијалности, јер очигледно важи:

$$S \text{ id} = \text{id}, \quad S(\varphi\psi) = S\varphi \circ S\psi.$$

Такође, $\mathbb{R}_{>0}$ -еквиваријантност очигледно је задовољена, односно

$$S\psi(c\beta) = c S\psi(\beta).$$

Преостаје да видимо шта се дешава са симплектичком структуром на SM . Она је дата канонском Лиувилевом формом

$$(\lambda_{\text{can}})_\beta(v) = \beta(d\pi_\beta(v)).$$

Рачун показује

$$\begin{aligned} ((S\psi)^*\lambda_{\text{can}})_\beta(v) &= (\lambda_{\text{can}})_{S\psi(\beta)}((dS\psi)_\beta(v)) \\ &= S\psi(\beta)((d\pi)_{S\psi(\beta)}(dS\psi)_\beta(v)) \\ &= S\psi(\beta)((d\psi)_{\pi(\beta)}(d\pi)_\beta(v)) \\ &= \beta \circ (d\psi)_{\pi(\beta)}^{-1} \circ (d\psi)_{\pi(\beta)} \circ (d\pi)_\beta(v) \\ &= \beta \circ (d\pi)_\beta(v) \\ &= (\lambda_{\text{can}})_\beta(v), \end{aligned}$$

где смо искористили чињеницу

$$\pi \circ S\psi = \psi \circ \pi.$$

Дакле, $(S\psi)^*\lambda_{\text{can}} = \lambda_{\text{can}}$, односно $S\psi$ је тачан симплектоморфизам на T^*M .

До сада изложено важило би и за произвољан дифеоморфизам ψ . Но, ако је ψ додатно и контактоморфизам који чува кооријентацију онда $S\psi$ чува SM . Заиста, нека је $\beta \in SM$, односно

$$\beta|_\xi = 0, \quad \beta(R_\alpha) > 0.$$

Како важи

$$d\psi^{-1}(\xi_p) = \xi_{\psi^{-1}(p)} \quad \text{и} \quad d\psi^{-1}((R_\alpha)_p) = c(R_\alpha)_{\psi^{-1}(p)}$$

за неко $c > 0$, јасно је

$$S\psi(\beta)|_\xi = 0 \quad \text{и} \quad S\psi(\beta)(R_\alpha) > 0.$$

Коначно, закључујемо да је $S\psi : SM \rightarrow SM$ тачан симплектоморфизам.

Напомињемо такође да SM можемо тривијализовати као $M \times \mathbb{R}_{>0}$ помоћу

$$\beta \mapsto (\pi(\beta), \beta((R_\alpha)_{\pi(\beta)}))$$

када год имамо изабрану контактну форму α на (M, ξ) . У овим координатама,

$$S\psi : M \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow M \times \mathbb{R}_{>0}$$

изгледа као

$$(p, r) \mapsto \left(\psi(p), \frac{r}{\lambda_\psi(p)} \right),$$

где је $\lambda_\psi : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ функција која задовољава $\psi^* \alpha = \lambda_\psi \alpha$.

Преостаје да протумачимо и део тврђења о Хамилтоновости подизања у случају $\psi \in \mathcal{G}$.

Пођимо од контактне изотопије $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$. Нека је са Y_t означено неаутономно векторско поље које је генерише, односно задовољава

$$\frac{d}{dt} \psi_t(p) = Y_t(\psi_t(p)) \quad \text{тј.} \quad Y_t = \left(\frac{d}{dt} \psi_t \right) \circ \psi_t^{-1}.$$

На основу дефиниције добијамо и глаткост подизања $(S\psi_t)_{t \in [0,1]}$. Ради једноставности, ову симплектичку изотопију означимо са Φ_t , а са X_t векторско поље које је генерише, односно задовољава

$$X_t = \left(\frac{d}{dt} \Phi_t \right) \circ \Phi_t^{-1}.$$

Φ_1 је Хамилтонов дифеоморфизам ако постоји хамилтонијан $H_t(-) = H(t, -)$ за X_t , тј. задовољено је

$$i_{X_t} \omega_{\text{can}} = -dH_t.$$

На основу првог дела тврђења имамо да за све $t \in [0, 1]$ важи $\Phi_t^* \lambda_{\text{can}} = \lambda_{\text{can}}$, те из

$$\frac{d}{dt} \Phi_t^* \lambda_{\text{can}} = \Phi_t^* (\mathcal{L}_{X_t} \lambda_{\text{can}})$$

закључујемо $\mathcal{L}_{X_t} \lambda_{\text{can}} = 0$. На основу Картанове формуле сада добијамо

$$0 = \mathcal{L}_{X_t} \lambda_{\text{can}} = i_{X_t} d\lambda_{\text{can}} + d(i_{X_t} \lambda_{\text{can}}) = i_{X_t} \omega_{\text{can}} + d(i_{X_t} \lambda_{\text{can}})$$

и закључујемо да за хамилтонијан можемо поставити

$$H_t = i_{X_t} \lambda_{\text{can}} = \lambda_{\text{can}}(X_t).$$

Покушајмо да добијемо и нешто експлицитнији запис. Како за све t важи $\pi \circ \Phi_t = \psi_t \circ \pi$, на основу дефиниције векторских поља X_t и Y_t добијамо да за све $\gamma \in SM$ важи

$$d\pi_\gamma(X_t(\gamma)) = Y_t(\pi(\gamma))$$

па добијамо

$$H_t(\gamma) = (\lambda_{\text{can}})_\gamma(X_t(\gamma)) = \gamma((d\pi)_\gamma(X_t(\gamma))) = \gamma(Y_t(\pi(\gamma))),$$

као и $\mathbb{R}_{>0}$ -еквиваријантност $H_t(c\gamma) = cH_t(\gamma)$. Из наведеног, у поменутиим координатама у којима α тривијализује SM добијамо

$$H_t(s, p) = s \alpha_p(Y_t(p)).$$

Унутар $SM \cong M \times \mathbb{R}_{>0}$ канонски идентификујемо $M \times \{1\}$ са M , што нас мотивише да функцију $\tilde{H}_t : M \rightarrow \mathbb{R}$, дату са $\tilde{H}_t(p) = H_t(1, p)$ зовео контактним хамилтонијаном. Дакле, контактни хамилтонијан можемо дефинисати и без разматрања симплектизације. Једноставан рачун показује да контактни хамилтонијан једнозначно одређује ток — Y_t је јединствено векторско поље које задовољава

$$\alpha(Y_t) = H_t \quad \text{и} \quad i_{Y_t} d\alpha = -dH_t + R_\alpha(H_t) \alpha.$$

□

Напомена 80. За H_t можемо одабрати било коју глатку функцију. Ако специјално одаберемо да H буде аутономни $\mathbb{R}_{>0}$ -еквиваријантни хамилтонијан на $SM \cong M \times \mathbb{R}_{>0}$, дат са $H_t(s, p) = s$ добијамо једнопараметарску подгрупу $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\alpha \leq \mathcal{G}$, а векторско поље које је дефинише је управо Ребово векторско поље R_α дато са $i_{R_\alpha} \alpha = 1$, $i_{R_\alpha} d\alpha = 0$. Природни хомоморфизам $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}$ дат је са $t \mapsto \varphi_{R_\alpha}^t$.

Путу $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ у $\mathcal{G}$, на основу придруженог контактнoг хамилтонијана, $H_t = \alpha(\frac{d}{dt} \varphi_t)$, додељујемо величину коју зовео *контактна ХофEROVA дужина*, дефинисану са

$$\ell_\alpha((\varphi_t)_{t \in [0,1]}) = \int_0^1 \max_M |H_t| dt.$$

Дефиниција 81. За фиксирану контактну форму α на (M, ξ) , контактоморфизам $\psi \in \mathcal{G}$ и класу $\tilde{\psi} \in \tilde{\mathcal{G}}$ дефинишемо Хоферове енергије $|\psi|_\alpha$ и $|\tilde{\psi}|_\alpha$ са

$$\inf \ell_\alpha((\varphi_t)_{t \in [0,1]}),$$

где у случају ψ узимамо инфимум по свим изотопијама $\{\psi_t\}$ које задовољавају $\psi_1 = \psi$, а у случају $\tilde{\psi}$ по свим чија је класа у $\tilde{\mathcal{G}}$ баш $\tilde{\psi}$. Ако са $\pi : \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ означимо канонску пројекцију тривијално важи

$$|\psi|_\alpha = \inf_{\pi(\tilde{\psi})=\psi} |\tilde{\psi}|_\alpha.$$

Теорема 82. ([41]) Хоферов функционал енергије има следећа својства. Нека су $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$ произвољни. Тада важи

- (1) (недегенерисаност) $|\psi|_\alpha = 0 \iff \psi = \text{id}$,
- (2) (неједнакост троугла) $|\varphi\psi|_\alpha \leq |\varphi|_\alpha + |\psi|_\alpha$,
- (3) (симетричност) $|\psi^{-1}|_\alpha = |\psi|_\alpha$,
- (4) (природност) $|\varphi\psi\varphi^{-1}|_\alpha = |\psi|_{\varphi^*\alpha}$.

Због тога, зовемо га *контактном Хоферовом нормом*.

Напомена 83. Хоферова енергија посматрана на $\tilde{\mathcal{G}}$ такође поседује својства (2)–(4), али не нужно и (1).

5.2 Уредљивост

У семиналном раду [18], Елијашберг и Полтерович дефинишу релацију на $\tilde{\mathcal{G}}$ која под одређеним условима постаје релација поретка. Контактне многострукости које испуњавају ове услове убрзо постају предмет истраживања за себе те бивају издвојене као посебна класа многострукости које данас зовемо уредљивим. Због бројних импликација које уредљивост има на друге, често и раније истраживане феномене у контактної геометрији, она до данас остаје у жижи пажње математичара из области. Наш циљ у овом поглављу је да изложимо актуелан резултат Шелукина и Хедикеа, који у свом доказу

користе управо декомпозицију отворене књиге, прецизније, идеалне Жируове форме, о којима је било речи у Поглављу 4.3. Са тим на уму, представимо појам уредљивости.

На контактної кооријентисаној многострукости (M, ξ) , петљу контактоморфизама дефинишемо као глатко пресликавање $\psi : S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{G}$. Као што смо видели у претходном одељку, петље су генерисане 1-периодичним контактним хамилтонијанима. Петљу ћемо звати ненегативном ако је њен контактни хамилтонијан ненегативан (у односу на позитивну контактну форму α), а строго позитивном ако јој је контактни хамилтонијан строго позитиван.

За дате $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in \tilde{\mathcal{G}}$ дефинишемо релацију

$$\tilde{\varphi} \preceq \tilde{\psi} \stackrel{\text{def}}{\iff} \tilde{\varphi}^{-1}\tilde{\psi} \text{ се може представити ненегативним путем у } \mathcal{G}.$$

На затвореној многострукости, релација $\preceq$ је увек рефлексивна и транзитивна, но није увек антисиметрична.

Дефиниција 84. Кооријентисана контактна многострукост је уредљива ако $\preceq$ дефинише релацију поретка на $\tilde{\mathcal{G}}$.

У [18] је показана следећа карактеризација (Тврђења 2.1.А и 2.1.Б).

Теорема 85. Затворена контактна многострукост је уредљива ако и само ако не допушта строго позитивну контрактибилну петљу контактоморфизама.

Напомена 86. На сличан начин може се дефинисати и релација на $\mathcal{G}$ постављајући $\varphi \preceq \psi$ ако и само ако постоји ненегативан пут од id до $\varphi^{-1}\psi$ у $\mathcal{G}$. Овако дефинисано $\preceq$ ће бити релација поретка ако и само ако не постоје позитивне (контрактибилне или не) петље у $\mathcal{G}$. Ово својство зовемо *јаком уредљивошћу*, односно уредљивошћу самог $\mathcal{G}$.

Испитивање уредљивости конкретне многострукости није једноставан посао. Примера ради, познато је да су пројективни простори, $\mathbb{RP}^{2n+1}$, са стандардном контактном структуром, уредљиви (видети [18], [45]). Већина примера неуредљивих контактних многострукости, укључујући и случај стандардних контактних сфера S^{2n+1} , дуго је проналажена на основу принципа

показаног у [17], а који каже да је за све Лиувилове многострукости коначног типа W , и све $k \geq 2$, идеална контактна граница од $W \times \mathbb{C}^k$, неуредљива. Ипак, и наизглед једноставна питања, попут тога да ли је стандардна контактна структура на $S^1 \times S^2$ уредљива дуго остају без одговора. Принцип који излажемо у следећем одељку пружиће, између осталог, и одговор на ово питање.

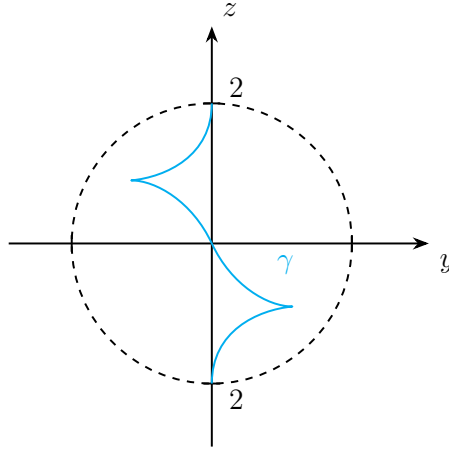
За крај одељка, да бисмо на конкретан начин истакли значај појма уредљивости, наводимо и следећу примену. Алан Вајнстин, 1978. године, формулише хипотезу, која тврди да Ребово поље на компактној контактної многострукости има периодичну орбиту. Везу са уредљивошћу користе Алберс, Фукс и Мери, те доказују:

Теорема 87. ([1]) Вајнстинова хипотеза је тачна за сваку затворену, не јако уредљиву, контактну многострукост. Ако је контактна многострукост и неуредљива, онда за произвољну контактну форму постоји контрактибилна затворена Ребова орбита.

5.3 Лабаве Лежандрове подмногострукости

У контактної геометрији и топологији постоји свеprisутна дихотомија између ригидности и флексибилности (видети [16],[6]). У овом контексту, Еми Марфи у [36] дефинише класу веома флексибилних Лежандрових подмногострукости и назива их *лабавим*. Дефиниција је заснована на конкретном локалном моделу пред нама.

Посматрајмо стандардну контактну 3-лопту радијуса 2, $B^3(2)$, са контактном формом $\alpha_0 = dz - x dy$ и фронталном пројекцијом $(x, y, z) \mapsto (y, z)$. Нека је γ Лежандрова крива у $B^3(2)$, са фронталном пројекцијом као на Слици 5.1.



Слика 5.1: Фронтална пројекција Лежандровог лука

Напомињемо да услов да је γ Лежандрова за улагање $i : \gamma \rightarrow B^3(2)$ гласи $i^*\alpha_0 = 0$ што за параметризацију $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ даје за све t : $z'(t) = x(t)y'(t)$. Дакле фронтална пројекција са слике једнозначно одређује γ . За $r > 1$ посматрајмо и скупе

$$V_r = \{(q, p) \in T^*\mathbb{R}^n \mid |q| < r, |p| < r\} \quad \text{и} \quad Z_r = V_r \cap \{p = 0\}.$$

Тада је $L_r := \gamma \times Z_r$ Лежандрова у $(B^3(2) \times V_r, \alpha_0 + \lambda)$, где је са λ означена канонска Лиувилова форма.

Дефиниција 88. Повезана Лежандрова подмногострукост L у (M^{2n+1}, ξ) , где је $n \geq 2$, назива се лабавом ако постоје отворен $U \subset M$, $r > 1$ и контактоморфизам $\varphi : U \rightarrow B^3(2) \times V_r$ такви да је $\varphi(U \cap L) = L_r$. Пар $(U, U \cap L)$ зовемо лабавом картом за L . За неповезано L кажемо да је лабаво уколико је свака од компоненти повезаности лабава унутар комплемента осталих.

Флексибилност о којој је било речи огледа се у h -принципу (видети [12]) који у [36] доказује Марфи. Из њега следи, у контексту овог поглавља, веома важно тврђење које доказује Накамура у [37].

Теорема 89. Нека је $(M, \ker \alpha)$ затворена контактна многострукост, L њена затворена лабава Лежандрова подмногострукост и нека је $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ изотопија контактоморфизама која почиње у идентитети. Претпоставимо да постоји лабава карта U за L таква да је контактна Хоферова норма ограничена са $c_1 > 0$ на $\mathcal{G}(U)$ и $c_2 > 0$ на $\mathcal{G}(\varphi_1(U))$. Тада за све $\delta > 0$ постоји контактна

изотопија $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$, дужине $\ell_\alpha(\psi_t) \leq c_1 + c_2 + \delta$, таква да је $\psi_1(L) = \varphi_1(L)$ и $\psi_t(L)$ је C^0 -близу $\varphi_t(L)$ за све t .

5.4 Уредљивост и контактна Хоферова норма

У [24] показано је да ако је (M, ξ) затворена, јако уредљива многострукост и φ_t^α Ребов ток неке контактне форме α за време $t \in \mathbb{R}$ онда важи $|\varphi_t^\alpha|_\alpha = |t|$ (видети Лему 3.1 и Последицу 2.4 у [24]). Тривијална последица овог тврђења је да, уколико је контактна Хоферова норма ограничена дуж Ребовог тока неке контактне форме, онда постоји позитивна контрактибилна петља у $\mathcal{G}$. Следеће тврђење подиже претходну орсервацију и на $\tilde{\mathcal{G}}$, односно преиначава дискусију о јакој уредљивости у дискусију о уредљивости.

Теорема 90. Нека је $\tilde{\varphi}_t^\alpha$ подизање Ребовог тока контактне форме α на $\tilde{\mathcal{G}}$. Ако важи $|\tilde{\varphi}_t^\alpha| < t$ за неко $t \in \mathbb{R}$ онда је (M, ξ) неуредљива.

Доказ. Поменути Лема 3.1 из [24] може се адаптирати тако да гласи:

За пут контактоморфизама $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ поставимо

$$c := \int_0^1 \min_M \alpha \left(\frac{d}{dt} \varphi_t \right) dt.$$

За свако $\delta > 0$ постоји пут $(\psi_t)_{t \in [0,1]} \in \tilde{\varphi}_t$ тако да за све $t \in [0, 1]$

$$\min_M \alpha \left(\frac{d}{dt} \psi_t \right) \in (c - \delta, c + \delta). \quad (*)$$

Покажимо да ако је (M, ξ) уредљиво онда је $|\tilde{\varphi}_t^\alpha|_\alpha = |t|$ за све $t \in \mathbb{R}$.

За почетак, важи $(\varphi_{st}^\alpha)_{s \in [0,1]} \in \tilde{\varphi}_t^\alpha$ и стога по дефиницији имамо да за све $t \in \mathbb{R}$ важи

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}_t^\alpha| &\leq \ell_\alpha((\varphi_{st}^\alpha)_{s \in [0,1]}) \\ &= \int_0^1 \max_M \left| \alpha \left(\frac{d}{ds} \varphi_{st}^\alpha \right) \right| ds \\ &= \int_0^1 \max_M |\alpha(tR_\alpha)| ds \\ &= |t|, \end{aligned}$$

дакле треба показати да не постоји $t \in \mathbb{R}$ такво да је $|\tilde{\varphi}_t^\alpha|_\alpha < |t|$. Како је $|\tilde{\varphi}_t^\alpha|_\alpha = |(\tilde{\varphi}_t^\alpha)^{-1}|_\alpha$ довољно је претпоставити да постоји $t > 0$ такво да $|\tilde{\varphi}_t^\alpha| < t$. По дефиницији контактне Хоферове норме тада постоји $(\psi_s)_{s \in [0, t]} \in (\tilde{\varphi}_t^\alpha)^{-1}$ такво да важи

$$\int_0^t \min_M \alpha \left(\frac{d}{ds} \psi_s \right) ds = c,$$

где је $|c| < 1$, односно важи $1 + c > 0$. На основу (*) можемо претпоставити да је $\min_M \alpha \left(\frac{d}{ds} \psi_s \right)$ произвољно близу c .

Поставимо $\Phi_s = \varphi_s^\alpha \circ \psi_s$ за $s \in [0, t]$. Тада важи $\Phi_0 = \text{id} = \varphi_t^\alpha \circ (\varphi_t^\alpha)^{-1} = \varphi_t^\alpha \circ \psi_t = \Phi_t$, односно $(\Phi_s)_{s \in [0, t]}$ је петља. Додатно $\tilde{\varphi}_t^\alpha \cdot \tilde{\psi}_t = \text{id}$ па је реч о контрактибилној петљи. За фиксирано $p \in M$ имамо да за $\Phi(s) := \Phi_s(p)$ важи $\Phi = H|_{\Delta(\mathbb{R}^2)}$, где је $H(s, u) = \varphi_s^\alpha(\psi_u(p))$ и $\Delta(\mathbb{R}^2)$ дијагонала у $\mathbb{R}^2$. На основу тога рачунамо

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Phi_s(p) &= \frac{d}{ds} \varphi_s^\alpha(\Phi_s(p)) + d\varphi_s^\alpha \left(\frac{d}{ds} \psi_s(\psi_s(p)) \right) \\ &= R_\alpha(\Phi_s(p)) + (\varphi_s^\alpha)_* X_s(\Phi_s(p)), \end{aligned}$$

односно

$$\frac{d}{ds} \Phi_s = R_\alpha + (\varphi_s^\alpha)_* X_s,$$

где је X_s генеришуће векторско поље за ψ_s . Према томе контрактибилна петља $(\Phi_s)_{s \in [0, t]}$ задовољава

$$\min_M \alpha \left(\frac{d}{ds} \Phi_s \right) = 1 + \min_M \alpha(X_s) > 1 + c - \delta > 0$$

где је δ изабрано довољно мало. Напомињемо да је коришћено и да је сваки од контактоморфизама φ_s^α строг. Закључујемо да је $(\Phi_s)_{s \in [0, t]}$ позитивна контрактибилна петља у $\mathcal{G}$, односно (M, ξ) је неуредљиво. $\square$

Наш следећи циљ је да пронађемо везу између отворених књига и контактне Хоферове норме.

Лема 91. Нека је (B, θ) декомпозиција отворене књиге адаптирана на контактну структуру (M, ξ) и β идеална Жируова форма. Нека су $W_\pm$ две стране отворене књиге и $L_\pm$ њихови скелети у односу на Лиувилеве форме које индукује β . Тада постоји контактнo векторско поље X чији ток задовољава да за било које две дисјунктне отворене околине $U_\pm$ од $L_\pm$ постоји $T > 0$ такво да важи $\varphi_T(M \setminus U_-) \subset U_+$.

Доказ. Без умањења општости претпоставимо $W_- = \pi^{-1}(0)$, $W_+ = \pi^{-1}(\pi)$. Нека је $V \cong B \times D^2$ околина повеза на којој β узима форму $\beta = d\theta + \frac{\eta}{r^2}$ и нека је $f(r)$ неоппадајућа функција једнака неком $0 < c < 1$ близу 0 и r близу 1. Посматрајмо функцију $H = f(r) r \sin \theta$ на $B \times D^2$ и нека је X контактнo векторско поље дефинисано контактним хамилтонијаном $\sin \theta$ на $(M \setminus V, \beta|_{M \setminus V})$ и дефинисано контактним хамилтонијаном H на $(V, r^2\beta)$. Векторско поље X је глатко јер близу ∂V важи $H = r^2 \sin \theta$.

Нека је (W, λ) тачно симплектоморфно страницама. Тврђење 78 гарантује да постоји $\varepsilon > 0$ и улагања $i_{\pm} : W \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ таква да је

$$i_{\pm}^* \beta = \lambda + dt, \quad i_{\pm}^* \theta = \left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2} \right) + t, \quad i_{\pm}^{-1}(W_{\pm}) = W \times \{0\}.$$

На $i_{\pm}(W \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ важи

$$X = \cos \theta (i_{\pm})_* Z + \sin \theta R_{\beta},$$

где је Z Лиувилoво векторско поље на W . Једноставан рачун показује да на V важи

$$X = \frac{rf - r^2 f'}{2} \sin \theta R_{\beta} + \frac{rf' + f}{2r} \sin \theta \partial_{\theta} - \frac{f}{2} \cos \theta \partial_r,$$

одакле следи

$$dx = d(r \cos \theta)(X) = -\frac{rf' \sin \theta + f}{2} \leq -\frac{c}{2},$$

док на $V \setminus K$ имамо

$$d\theta(X) = \frac{rf' + f}{2r} \sin \theta \geq \frac{c}{2} \sin \theta.$$

На $M \setminus (V \cup W_{\pm})$ важи $\beta(X) = \sin \theta \neq 0$.

Из претходних опсервација закључујемо следеће:

- Нуле векторског поља X све леже у скелетима $L_{\pm}$.
- На страницама $W_{\pm}$ векторско поље X пропорционално је Лиувилoвом векторском пољу и то са константама 1 на W_- и -1 на W_+ .
- Како на V важи $dx(X) < 0$ као и

$$dy(X) = d(r \sin \theta)(X) = \frac{rf'}{2} \cos \theta \sin \theta$$

дакле $dy(X) \equiv 0$ близу B . Стога, интегрална крива $\varphi_t(p)$ сече B ако и само ако $p \in W_- \setminus L_-$, те потом улази у W_+ .

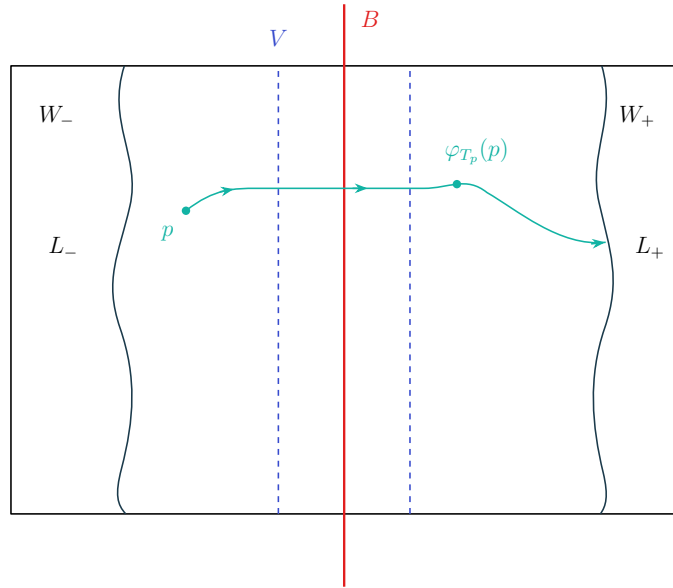
Одаберимо домен $P \subset W_-$ са глатком звездастом границом и $\delta > 0$ довољно мало да важи

$$A_+ = i_+(P \times (-\delta, \delta)) \subset U_+.$$

Тврдимо да за све $p \in M \setminus L_-$ постоји $T_p > 0$ такво да $\varphi_t(p) \in A_+$ за све $t \geq T_p$. Јасно, на основу компактности $M \setminus U_- \subset M \setminus L_-$ уколико је ово тачно можемо одабрати и униформно T из исказа теореме. Разликујемо два случаја.

$$1^\circ \quad p \in (W_- \setminus L_-) \cup B \cup W_+$$

По претходној дискусији јасно је да у овом случају имамо $\varphi_t(p) \in W_\pm \cup B$ за све t . Такође видели смо да $\varphi_t(p)$ сече B те да се након тога задржава у W_+ , као и да напушта V за коначно време. На $W_+ \setminus V$, φ_t одговара негативном току Лиувиловог векторског поља на W_+ па тврђење следи из чињенице да је $\partial(V \cap W_+)$ глатка звездаста хиперповрш у W_+ .



Слика 5.2: Линија тока кроз тачку $p \in W_- \setminus L_-$

$$2^\circ \quad p \in M \setminus (W_\pm \cup B)$$

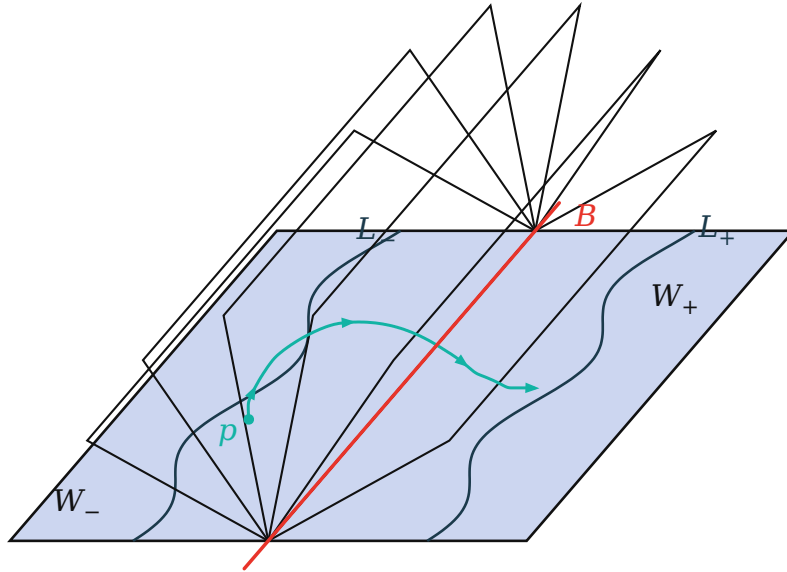
На $M \setminus V$ имамо да је X контактнo за $\sin \theta$ у односу на β па важи

$$X = \sin \theta R_\beta + Y, \quad i_Y d\beta = d(\sin \theta)(R_\beta)\beta - d(\sin \theta).$$

Закључујемо $d(\sin \theta)(Y) = 0$ и $d(\sin \theta)(X) = \sin \theta d(\sin \theta)(R_\beta) = \sin \theta \cos \theta d\theta(R_\beta)$, па како је $d(\sin \theta)(X) = \cos \theta d\theta(X)$ добијамо

$$d\theta(X) = \sin \theta d\theta(R_\beta).$$

Како за идеалну Жируову форму важи $d\theta(R_\beta) > 0$ на $M \setminus B$ закључујемо да је дуж линија тока $\varphi_t(p)$, $d\theta$ ограничено или одозго или одоздо на $M \setminus (W_- \cup B \cup i_+(W \times (-\delta, \delta)))$ у зависности од знака $\sin \theta$, те $\varphi_t(p)$ за коначно време улази у $i_+(W \times (-\delta, \delta))$ и излази из V . Преостаје технички захтеван део доказа који прескачемо (видети Лему 2.7 у [25] и Сliku 5.3), али који се у потпуности своди на опсервацију да је на $i_+(W \times (-\delta, \delta)) \setminus V$ пројекција контактнoг векторског поља X на страницу пропорционална Лиувилoвом векторском пољу са коефицијентом пропорционалности који тежи -1 .



Слика 5.3: Линија тока кроз тачку $p \in M \setminus (W_\pm \cup B)$

Овиме је доказ завршен. □

Напомена 92. Тврђење које смо управо показали можемо реформулисати на следећи начин. Наиме, ако су $W_\pm$ интериори две странице са скелетима

$L_{\pm}$ показано је да постоји векторско поље чији ток ψ_t задовољава да за сваки отворен $U \supset L_-$ важи

$$\bigcap_{t \geq 0} \psi_t(M \setminus U) = L_+.$$

Лема 93. Нека је $(U, \lambda) = (W \times (-\varepsilon, \varepsilon), dt + \lambda)$. Тада је контактна Хоферова норма ограничена на $\tilde{\mathcal{G}}(U)$.

Доказ. Нека је $(f_s)_{s \in [0,1]}$ контактна изотопија у U подржана у неком компактном $K_0 \subset W \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ и нека је $K_1 \subset W \times (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ компактан скуп такав да је $K_0 \subset \text{int } K_1$. Уочимо контактну векторско поље X дато контактним хамилтонијаном $\alpha(X) = -t$. X можемо записати као $a\partial_t + Y$ где $dt(Y) = 0$. Једначине које једнозначно одређују X тада узимају форму:

$$a + \lambda(Y) = -t, \quad i_Y d\lambda = -\lambda$$

одакле закључујемо $a \equiv -t$ и $Y = -Z$, где је Z Лиувилово векторско поље на W . Са $(\varphi_s)_{s \geq 0}$ означимо његов ток. Како важи $\mathcal{L}_X \lambda = -\lambda$ закључујемо да важи формула $\varphi_s(t_0, p) = (e^{-s}t_0, \eta_s(p))$, где је са $(\eta_s)_{s \geq 0}$ означен негативни Лиувилов ток на (W, λ) . Под овим условима јасно је да можемо дефинисати контактни хамилтонијан h_s за све $s \geq 0$ који задовољава:

- $h_s|_{\varphi_s(K_0)} = \alpha(X)$
- $h_s \equiv 0$ ван $\varphi_s(K_1)$
- $\max_U |h_s| \leq \varepsilon_0 e^{-s} + \delta e^{-s}$,

при чему $\delta > 0$ можемо одабрати произвољно мало.

Нека је $(g_s)_{s \geq 0}$ изотопија генерисана са $(h_s)_{s \geq 0}$ и приметимо да очигледно важи $g_s|_{K_0} = \varphi_s$ за све s , као и $|\tilde{g}_s|_{\alpha} \leq \varepsilon_0 + \delta$. Већ смо видели да важи $\mathcal{L}_X \lambda = -\lambda$ па је $\varphi_s^* \alpha = e^{-s} \alpha$, а на K_0 имамо $g_s^* \alpha|_{K_0} = e^{-s} \alpha|_{K_0}$. На основу Теореме 82 имамо

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_1|_{\alpha} &= |\tilde{g}_s \tilde{g}_s^{-1} \tilde{f}_1 \tilde{g}_s \tilde{g}_s^{-1}|_{\alpha} \\ &= |\tilde{g}_s (\widetilde{g_s^{-1} f_1 g_s}) \tilde{g}_s^{-1}|_{\alpha} \\ &\leq 2|\tilde{g}_s|_{\alpha} + |\tilde{f}_1|_{g_s^* \alpha} \\ &\leq 2\varepsilon_0 + 2\delta + e^{-s} |\tilde{f}_1|_{\alpha}, \end{aligned}$$

где је искоришћена чињеница да су путеви $(g_s^{-1}f_r g_s)_{r \in [0,1]}$ и $(g_{rs}^{-1}f_r g_{rs})_{r \in [0,1]}$ хомотопни са фиксираним крајевима, а заједничка класа у $\tilde{\mathcal{G}}(U)$ означена је са $\widetilde{g_s^{-1}f_1 g_s}$ и једнака је $\widetilde{g_s^{-1}f_1 g_s}$. Закључујемо, узимајући s произвољно велико и δ произвољно мало, да важи $|\tilde{f}_1|_\alpha \leq 2\varepsilon_0$. $\square$

Напомена 94. Лема 93 специјално имплицира да је контактна Хоферова норма ограничена на $\tilde{\mathcal{G}}(B^{2n+1})$, где је $(B^{2n+1}, dz - \sum_{j=1}^n y_j dx_j)$ стандардна Дарбуова лопта.

Тврђење 95. Нека је $V = M \setminus L_-$. Тада је контактна Хоферова норма, у односу на било коју контактну форму која се продужава на M , ограничена на $\tilde{\mathcal{G}}(V)$.

Доказ. Са n означимо рестрикцију контактне форме са M на V . Одаберимо $U_\pm$, околине од $L_\pm$ контактоморфне са $(W \times (-\varepsilon, \varepsilon), dt + \lambda)$ и нека је ψ_t ток из Леме 91. Нека је $\tilde{U} \subset U_-$ отворена околина од L_- чије затворење лежи у U_- . Како је $V \setminus \tilde{U}$ са компактним затворењем према Напомени 92 имамо да постоји $T > 0$ за које је $\psi_T(V \setminus \tilde{U}) \subset U_+$. Приметимо такође да важи и $n|_{U_\pm} = s_\pm \alpha$, где су $s_\pm$ ограничене позитивне функције на $U_\pm$ (ограниченост следи из $n = \beta|_V$ где је β форма на компактном M). Одавде имамо $|f|_n \leq |\beta|_\infty |f|_\alpha$ за све $f \in \tilde{\mathcal{G}}(U_\pm)$, па је по претходној леми $|\cdot|_n$ ограничено на простору свих $\tilde{f}$ који имају представнике компактно подржане у $U_\pm$.

Да бисмо завршили доказ тврђења ми полазимо од $\tilde{f}_1 \in \tilde{\mathcal{G}}(V)$ са представником $(f_s)_{s \in [0,1]}$ компактно подржаним у $K \subset V$. Можемо употребити идентичну технику као у доказу Леме 91 и искористити контактни хамилтонијан $h(t, p) = t$ модификован тако да добијемо компактно подржану изотопију $(\tilde{\psi}_s)_{s \geq 0}$ на U_- која задовољава да за неко T_- важи $\tilde{\psi}_{T_-}(K \cap U_-) \cap \tilde{U} = \emptyset$. Добијамо тада

$$|\tilde{f}_1|_n \leq C_- + |\tilde{F}_1|_n,$$

где је $\tilde{F}_1$ елемент $\tilde{\mathcal{G}}(V)$ представљен са $(\psi_{T_-} f_s \psi_{T_-}^{-1})_{s \in [0,1]}$, а C_- константа из Леме 93, која зависи само од избора U_- .

Коначно, како је $(F_s)_{s \in [0,1]}$ компактно подржано у $V \setminus \tilde{U}$, $(\psi_T F_s \psi_T^{-1})_{s \in [0,1]}$ је компактно подржано у U_+ и стога важи

$$|\tilde{f}_1|_n \leq C_- + |\tilde{F}_1|_n \leq 2|\psi_T|_n + C_- + C_+$$

чиме је доказ завршен. $\square$

Пре него ли пређемо на централне теореме дајемо још једно припремно тврђење.

Лема 96. Нека су $K_{\pm}$ компактни подскупови контактне многострукости (M, ξ) и нека је $(f_t)_{t \in [0,1]}$ компактно подржана контактна изотопија за коју је $f_t(K_-) \cap K_+ = \emptyset$ за све $t \in [0, 1]$. Тада је $f_t = f_t^- \circ f_t^+$ где су $f_t^{\pm}$ компактно подржане у $M \setminus K_{\pm}$.

Доказ. Како су $K_{\pm}$ компактни постоји отворен $U \supset K_-$ такав да $A = \bigcup_{t \in [0,1]} f_t(U)$ не сече K_+ . Нека је V отворен скуп са компактним затворењем који садржи A и не сече K_+ . Модификујмо контактни хамилтонијан изотопије $(f_t)_{t \in [0,1]}$ тако да на U остаје непромењен а ван $\bar{V}$ постаје константан и њиме генерисану контактну изотопију означимо са $(f_t^+)_{t \in [0,1]}$. Јасно, $(f_t^+)_{t \in [0,1]}$ је компактно подржана у $M \setminus K_+$. Доказ завршавамо постављајући $f_t^- := f_t \circ (f_t^+)^{-1}$. $\square$

Теорема 97. Нека је (M^{2n+1}, ξ) затворена контактна многострукост где је ξ контактна структура адаптирана декомпозицији отворене књиге са Вајн-стиновом страницом W чији је скелет у односу на неку идеалну Жируову форму означен са L . Тада важи:

- (1) Ако је W субкритично контактне Хоферове норме су ограничене на $\mathcal{G}$ и $\tilde{\mathcal{G}}$.
- (2) Ако је $n \geq 2$ и L глатка и затворена лабава Лежандрова подмногострукост од M , онда је за сваку контактну форму α рестрикција контактне Хоферове норме на групу строгих контактоморфизама $\mathcal{G}_{\alpha}$ и њену инверзну слику у универзалном наткривању $\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha}$ ограничена.

Јасно, у оба случаја (M, ξ) је неуредљиво.

Доказ. (1) Нека је са β означена идеална Жируова форма за (K, θ) и нека су $W_- = \theta^{-1}(0)$ и $W_+ = \theta^{-1}(\pi)$ странице са скелетима $L_{\pm}$. Субкритичност из претпоставке тврђења значи $L_{\pm} = L_{\pm}^{(n-1)}$.

Пођимо од произвољне изотопије $(f_t)_{t \in [0,1]}$. Тврђење 5.2 у [13] гарантује постојање изотопије $(f'_t)_{t \in [0,1]}$ која је C^0 -близу $(f_t)_{t \in [0,1]}$ и задовољава додатни услов $f'_t(L_-) \cap L_+ = \emptyset$ за све $t > 0$. На основу Леме 96, f'_t се може записати као $f_t^- \circ f_t^+$, где су f_t^- , f_t^+ контактне изотопије које задовољавају услове Тврђења 95, па имамо да важи

$$|\tilde{f}'_1|_\alpha \leq |\tilde{f}_1^-|_\alpha + |\tilde{f}_1^+|_\alpha \leq C,$$

где је C константа из Тврђења 95. Посматрајмо изотопију $g_t = (f'_t)^{-1}f_t$. Како $(f'_t)_{t \in [0,1]}$ бирамо C^0 -близу $(f_t)_{t \in [0,1]}$ можемо претпоставити да је $(g_t)_{t \in [0,1]}$ C^0 -мало, те како су L_- и L_+ дисјунктни компакти можемо претпоставити и $g_t(L_-) \cap L_+ = \emptyset$ за све t . Због тога добијамо и

$$|\tilde{g}_1|_\alpha = |(\widetilde{f'_1})^{-1}f_1|_\alpha = |(\widetilde{f'_1})^{-1}\tilde{f}_1|_\alpha \leq C.$$

Овиме је доказ завршен јер сада имамо

$$|\tilde{f}_1|_\alpha = |\tilde{f}_1(\widetilde{f'_1})^{-1}\tilde{f}_1|_\alpha \leq 2C.$$

(2) Нека је W_- посматрана страница и L_- њен скелет, који је уједно и лабава Лежандрова подмногострукост од (M, ξ) , те нека је U лабава карта за L_- . Како је U Дарбуова лопта, на основу Напомене 94 имамо да постоји $C_1 > 0$ које ограничава посматрану контактну Хоферову норму на $\tilde{\mathcal{G}}(U)$.

Нека је сада $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ пут контактоморфизама за који је φ_1 строг контактоморфизам. Јасно је да је $\varphi_1(L_-)$ лабава Лежандрова подмногострукост од M са лабавом картом $\varphi_1(U)$. Како је $\varphi_1^*\alpha = \alpha$ добијамо да је $|\cdot|_\alpha$ ограничено са C_1 и на $\tilde{\mathcal{G}}(\varphi_1(U))$.

На основу Теореме 89 за свако $\delta > 0$ постоји контактна изотопија $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$ контактне Хоферове дужине мање од $\delta + 2C_1$ таква да је $\psi_1(L_-) = \varphi_1(L_-)$ и $\psi_t(L_-)$ C^0 -близу $\varphi_t(L_-)$ за све $t \in [0, 1]$. Одавде закључујемо да је $(\psi_t^{-1}\varphi_t)(L_-)$ C^0 -близу L_- , па као у доказу дела (1) постоји нека страница W_+ са скелетом L_+ таква да можемо сматрати $(\psi_t^{-1}\varphi_t)(L_-) \cap L_+ = \emptyset$ за све t . Напомињемо да је избор W_+ независан од $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$. Поновном употребом Леме 96 и Тврђења 95, добијамо да постоји константа C_2 која не зависи од $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$, а која ограничава $|\tilde{\psi}_1^{-1}\tilde{\varphi}_1|_\alpha$ за описани избор $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$. Једноставно закључујемо:

$$|\tilde{\varphi}_1|_\alpha = |\tilde{\psi}_1\tilde{\psi}_1^{-1}\tilde{\varphi}_1|_\alpha \leq \delta + 2C_1 + C_2.$$

У овом случају неуредљивост (M, ξ) следи из чињенице да је Ребов ток $\mathcal{R}_\alpha$ сачињен од тачних контактоморфизама. $\square$

Теорема 98. Нека је (M, ξ) затворена контактна многострукост, $L \subset M$ скелет неке странице адаптиране контактне отворене књиге и $\tilde{\varphi}_t$ подизање пута φ_t из $\mathcal{G}$ у $\tilde{\mathcal{G}}$. Ако постоји контактоморфизам ψ такав да је $\psi(L) \cap \varphi_t(L) = \emptyset$ за све $t \geq 0$ онда је контактна Хоферова норма ограничена дуж $\tilde{\varphi}_t$ и последично, дуж φ_t . Специјално, ако је $\tilde{\varphi}_t$ индуковано Ребовим током неке контактне форме, онда је (M, ξ) неуредљиво.

Доказ. Претпоставимо дакле да постоје пут $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ у $\mathcal{G}$ и контактоморфизам ψ такви да за $A = \bigcup_{t \geq 0} \varphi_t(L)$ важи $\psi(L) \cap A = \emptyset$.

На основу Леме 95 имамо

$$\varphi_t = g_t \circ h_t,$$

где је свако g_t компактно подржано у $M \setminus L$, а свако h_t у $M \setminus \psi(L)$. Приметимо такође да је $\psi(L)$ скелет неке странице у некој другој декомпозицији отворене књиге.

На основу претходног и Тврђења 95 имамо да постоји константа $C > 0$ тако да за све $t \geq 0$ важи $|\tilde{g}_t|_\alpha \leq C$ и $|\tilde{h}_t|_\alpha \leq C$. Као директну последицу ове чињенице добијамо и $|\tilde{\varphi}_t|_\alpha \leq 2C$, што је и требало доказати. $\square$

Напомена 99. У претходном доказу поменуто је да на основу контактоморфизма $\psi : (M, \xi) \rightarrow (M, \xi)$ и контактне отворене књиге (K, θ) на (M, ξ) можемо добити нову контактну отворену књигу на (M, ξ) . Конкретно, реч је о следећем општом принципу. Уведимо ознаке $K' = \psi(K)$ и $\theta' : M \setminus K' \rightarrow S^1$ за пресликавање дато са $\theta' = \theta \circ \psi^{-1}$. Тада важи:

- (K', θ') је тополошка отворена књига на M .

Заиста, $\theta \circ \psi^{-1}$ је очигледно субмерзија, а ако са $i : K \times D^2 \hookrightarrow U \subset M$ означимо околинину повеза K за коју важи $i(K \times \{0\}) = K$ и $i^*\theta = e$, где је e угаона координата на $D^2 \setminus \{0\}$, онда очигледно важи $\psi \circ i(K \times \{0\}) = K'$ као и

$$(\psi \circ i)^*(\theta') = i^*(\theta' \circ \psi) = i^*(\theta \circ \psi^{-1} \circ \psi) = i^*\theta = e.$$

- ξ је адаптирано на (K, θ) .

Да бисмо ово видели фиксирајмо идеалну Жируову форму β за (K, θ) . Тада лако проверавамо да $\beta' = (\psi^{-1})^* \beta$ задаје идеалну Жируову форму за (K', θ') . Интериори страница су тада Вајнстинове многострукости коначног типа са Лиувилевим формама $\beta|_{\theta'^{-1}(e)}$. Лиувилово векторско поље странице дато је тада једначином $i_z d\beta' = \beta'$, односно важи

$$i_z(\psi^{-1})^* d\beta = (\psi^{-1})^* \beta,$$

па су Лиувилова векторска поља на старим (Z_s) и новим (Z_n) страницама у очигледној релацији $\psi_* Z_s = Z_n$. Закључујемо да ψ заиста слика скелете старих у скелете нових страница.

Као последицу Теореме 98 добијамо и уопштење примера производа сфера $S^1 \times S^2$, који смо обећали у Поглављу 5.2.

Тврђење 100. $T^n \times S^{n+1}$ са стандардном контактном структуром је неуредљива контактна многострукост.

Доказ. • *Стандардна контактна структура*

Посматрајмо таутолошку форму λ_{can} на $T^*T^n \cong T^n \times \mathbb{R}^n$ и форму $\lambda_{\mathbb{C}} = \frac{1}{2}(x dy - y dx)$ на $\mathbb{C}$. Њихов збир, $\lambda_{can} + \lambda_{\mathbb{C}}$, тада је Лиувилова форма на производу $T^*T^n \times \mathbb{C}$. Уколико на $T^n = (S^1)^n$ поставимо координате $(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ на $T^*T^n \times \mathbb{C} \cong T^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}$ можемо писати

$$\lambda = \lambda_{can} + \lambda_{\mathbb{C}} = \sum_k x_k d\theta_k + \frac{1}{2}(x dy - y dx).$$

Тада једноставно добијамо да је Лиувилово векторско поље дато са

$$X_\lambda = \sum_k x_k \partial_{x_k} + \frac{1}{2}(x \partial_x + y \partial_y),$$

па видимо да за скуп са звездастом границом можемо одабрати

$$T^n \times S^{n+1} = \left\{ (p, x_1, \dots, x_n, x, y) \in T^*T^n \times \mathbb{C} \mid \sum_k x_k^2 + x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

и идеална контактна граница контактоморфна је са

$$(T^n \times S^{n+1}, \lambda|_{T^n \times S^{n+1}} =: \alpha).$$

Овако добијену контактну структуру зовео стандардном на $T^n \times S^{n+1}$.

• *Отворена књига на $T^n \times S^{n+1}$*

Разматрање настављамо у истом моделу. Поставимо

$$B := \left\{ (p, x_1, \dots, x_n, z) \mid z = 0, \sum_k x_k^2 = 1 \right\} \subset T^n \times S^{n+1}$$

и задајмо фибрацију $\pi : T^n \times S^{n+1} \setminus B \rightarrow S^1$ са $\pi((p, x_1, \dots, x_n, z)) = \arg(z)$. Јасно, околина $i : B \times D^2 \rightarrow T^n \times S^{n+1}$ може се одредити експлицитно постављајући $D^2 = \{|z| \leq 1\}$. У посматраним координатама имамо

$$\lambda|_B = \sum_k x_k d\theta_k,$$

па је $(B, \ker \lambda|_B)$ контактоморфно стандардном сферном раслојењу у T^*T^n .

Посматрајмо једну конкретну страницу дате отворене књиге $P = \pi^{-1}(0)$, за коју важи

$$P = \left\{ (p, x_1, \dots, x_n, z = x + iy) \in T^n \times \mathbb{R}^n \times (0, 1] \mid x^2 + \sum_k x_k^2 = 1 \right\}.$$

Како важи $dy|_P = 0$ јер је $y|_P \equiv 0$ добијамо $\lambda|_P = \sum_k x_k d\theta_k$. Није тешко видети да је P заправо симплектоморфно делу диск раслојења $T^* \times \text{int}(B^n) \rightarrow T^*T^n$ управо са рестрикцијом $d\lambda_{can} = \sum_k dx_k \wedge d\theta_k$ те и да је у овим координатама услов из Дефиниције 30, везан за оријентацију тривијалан. Испоставља се да је испуњеност услова на овој страници довољна јер имамо тачан симплектоморфизам страница $(P_0, d\lambda_{can})$ $(P_\psi, d\lambda_{can})$ дат ротацијом $\mathbb{C}$ -фактора за угао ψ .

Показали смо стога да је (B, π) контактна отворена књига за $(T^n \times S^{n+1}, (\sum_k x_k d\theta_k + \frac{1}{2}(y dx - x dy))|_{T^n \times S^{n+1}})$.

Лиувилово векторско поље на $T^n \times B^n(1)$ дато је са $\tilde{Z} = x_k \partial_{x_k}$. Морамо узети у обзир и дату параметризацију

$$\Phi : T^n \times B^n(1) \rightarrow P_0$$

$$(p, x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(p, x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_k x_k^2} \right)$$

помоћу које добијамо и Лиувилово векторско поље на P_0 , где из $\Phi_*(\partial_{x_k}) = \partial_{x_k} - \frac{x_k}{x}\partial_x$ закључујемо

$$\begin{aligned} Z = \Phi_* \tilde{Z} &= \sum_k x_k \partial_{x_k} - \frac{\sum_k x_k^2}{x} \partial_x \\ &= \sum_k x_k \partial_{x_k} - \frac{1 - x^2}{x} \partial_x. \end{aligned}$$

Видимо тада да је скелет L_0 у $(P_0, \lambda|_{P_0})$ у разматраном моделу скуп

$$L_0 = T^n \times \{0\} \times \{1\} \subset T^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}.$$

• *Ребов ток на $T^n \times S^{n+1}$*

Једноставном провером утврђујемо да је Ребово поље на $(T^n \times S^{n+1}, \alpha)$ дато са

$$R_\alpha = 2\partial_e = 2(x\partial_y - y\partial_x).$$

Орбита тачке $(p, 0, 1)$ при Ребовом току је стога $\{(p, 0, e^{it}) \mid t \geq 0\}$, односно

$$A := \bigcup_{t \geq 0} \varphi_t(L_0) = T^n \times \{0\} \times S^1.$$

Модел до ког смо дошли истраживан је, у већој општости, у [30]. Конкретно, реч је о томе да је A пред-Лагранжево — подиже се до Лагранжеве подмногострукости у симплектизацији — и као такво може се од себе раздвојити контактоморфизмом. Прецизније, постоји $\psi \in \text{Cont}(T^n \times S^{n+1}, \xi_{std})$ који задовољава

$$\psi(L_0) \cap \bigcup_{t \geq 0} \varphi_t(L_0) = \emptyset.$$

Овиме су испуњени сви услови за примену Теореме 98 управо на Ребов ток, чиме је доказ завршен. $\square$

Глава 6

О класификацији контактних структура у вишим димензијама

6.1 Заврнутост

У контактної топологији постоји основна подела контактних структура на *заврнуте* и *затегнуте*. Заврнуте структуре су, у суштини, тополошки а не геометријски објекти: за њих важе h -принципи, па се њихово постојање и класификација своде на алгебарску топологију. Затегнуте структуре су, на супрот томе, суштински геометријске, те их је по правилу знатно теже класификовати.

Димензија три

Дефиниција 101. Нека је (M^3, ξ) контактна многострукост. *Заврнути диск* је уложени диск $D \hookrightarrow M$ такав да је

$$T_p D = \xi_p \quad \text{за свако } p \in \partial D.$$

Контактна структура ξ је *заврнута* уколико такав диск постоји, а *затегнута* у супротном.

Пример 102. На $\mathbb{R}^3$ са цилиндричним координатама (r, θ, z) посматрајмо контактну структуру

$$\xi_{ot} = \ker(\cos r \, dz + r \sin r \, d\theta)$$

и диск $D = \{z = 0, r \leq \pi\}$. За $r = \pi$ дата 1-форма се своди на $-dz$, па је $\xi_{ot} = \ker dz = TD$ дуж ∂D ; дакле, D јесте заврнути диск. Његова карактеристична фолијација D_ξ има тачно једну сингуларну тачку, у координатном почетку, док је ∂D затворен лист.

Теорема 103. (Елијашберг [16]) Нека је M затворена оријентисана многострукост димензије три. Придруживање контактної структури њеног поља тангентних равни успоставља бијекцију између скупа класа изотопије заврнутих контактних структура на M и скупа хомотопских класа поља тангентних равни на M .

Дакле, у димензији три заврнутост је потпуно флексибилан појам: свака хомотопска класа поља равни садржи тачно једну заврнуту контактну структуру до на изотопију.

Више димензије

Појам заврнутости у вишим димензијама захтевао је нову конструкцију. Идеја је да у сличном духу пружимо одређено својство контактне многострукости које би омогућило доказивање пандана Теореме 103. Приметимо одмах да просто преписивање дефиниције из димензије три није могуће, јер ако би $D^{2n} \subset (M^{2n+1}, \xi)$ био уложени диск са својством да за све $p \in \partial D$ важи $T_p D = \xi_p$, онда би ∂D била изотропна подмногострукост у (M^{2n+1}, ξ) , и самим тим димензије не веће од n , што за $n \geq 2$ није могуће.

Први кораци ка дефиницији вишедимензионалне заврнутости остварени су у [38], где Нидеркригер даје верзију заврнутог диска на коме контактна форма многострукости задаје одговарајућу фолијацију. Овакву уложену подмногострукост назива *пластикштуфе*, а њено присуство испоставља се као опструкција за попуњивост. До одговарајуће дефиниције долазе Борман, Елијашберг и Марфи у [3], те показују следећу теорему, након чега дефиниција постаје стандардна.

Теорема 104. ([3]) Нека је M^{2n+1} затворена контактна многострукост. Придруживање контактної структури на M , скоро контактне структуре коју она дефинише остварује бијекцију између скупова класа изотопије заврнутих контактних структура и хомотопских класа скоро контактних структура на M .

Дефиниција заврнутости коју дају захтева доста посла, те прескачемо њено излагање. Такође, мана дефиниције је и у томе што је веома тешка за проверити. Стога, следећи корак, у погледу ваљаности дефиниције, остварују Казалс, Марфи и Пресас у [8], где дају читав низ једноставнијих, геометријских

карактеризација заврнутости. Кључна међу њима, по својој једноставности, је следећа.

Посматрајмо контактну многострукост (M^{2n+1}, ξ) , те $\alpha_{ot} \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, контактну форму која дефинише заврнуту контактну структуру ξ_{ot} на $\mathbb{R}^3$, и стандардну Лиувилу форму на $\mathbb{C}^{n-1}$,

$$\lambda_{st} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (x_j dy_j - y_j dx_j).$$

Испоставља се да је (M^{2n+1}, ξ) заврнута, ако и само ако, постоји контактнo улагање од $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^{n-1}, \ker(\alpha_{ot} + \lambda_{st}))$ у (M, ξ) . Додатно, показано је да постоји и константа R , која зависи само од избора α_{ot} и димензије n , таква да се контактнo улагање у наведеној карактеризацији може заменити са контактним улагањем многострукости $(\mathbb{R}^3 \times D^{2n-2}(R), \ker(\alpha_{ot} + \lambda_{st}))$.

Још једна од карактеризација које показују укључује управо теорију отворених књига. Наиме, контактна многострукост (M, ξ) је заврнута, ако и само ако, постоји негативно стабилизована отворена књига компатибилна са (M, ξ) .

6.2 Попуњивост

Дефиниција 105. Нека је V затворена, оријентисана многострукост и ξ позитивна кооријентисана контактна структура на њој. Кажемо да компактна симплектичка многострукост (W, ω) *симплектички (јако) попуњава* (V, ξ) , ако је V оријентисана граница од (W, ω) , и ω има примитивну форму λ , на околини ∂W , чија је рестрикција на $V = \partial W$ контактна форма за ξ .

Близу границе ∂W , примитивна форма λ дефинише Лиувилу векторско поље X_λ , те се услов да је $\lambda|_{TV}$ позитивна контактна форма своди на то да, дуж V , X_λ показује трансверзално напоље. Из овог разлога, у случају Дефиниције 105, V зовео конвексном границом од W .

За дату кооријентисану контактну многострукост (V, ξ) природно можемо причати о конформалној класи CS_ξ , симплектичких структура на ξ . Заиста, ако је α било која контактна форма, онда $d\alpha|_\xi$ дефинише структуру симплектичког раслојења, која од избора форме α зависи до на рескалирање. У

димензији три, ова опсервација доводи до природне дефиниције мање рестриктивне верзије попуњивости. У ситуацији Дефиниције 105 кажемо да ω доминира ξ ако важи $\omega|_{TV} \in CS_\xi$. Ипак, у [32], показано је да је ово еквивалентно јакој попуњивости, почевши од димензије пет. Стога, у [31], Масо, Нидеркригер и Вендл дају следећу, релаксиранију дефиницију слабе попуњивости.

Дефиниција 106. Нека је (W, ω) компактна симплектичка многострукост, са оријентисаном границом $\partial W = V$, на којој је дата кооријентисана контактна структура ξ . Кажемо да (W, ω) слабо попуњава (V, ξ) а ω слабо доминира ξ , ако су ω_ξ и $\omega_\xi + CS_\xi$ симплектичке структуре на ξ .

Овај услов је еквивалентан са тим да су

$$\alpha \wedge (d\alpha + \omega_\xi)^{n-1}, \quad \alpha \wedge \omega_\xi^{n-1}$$

позитивне запреминске форме, за произвољан избор контактне форме α . Уколико фиксирамо неко α , претходни услов постаје еквивалентан са

$$\alpha \wedge (\omega_\xi + \tau d\alpha)^{n-1} > 0,$$

за све $\tau \geq 0$.

6.3 Буржоаове контактне структуре

Видели смо да Турстон–Винкелнкемлерова конструкција гарантује постојање контактне структуре на T^3 . До ове чињенице могли смо доћи и непосредно јер је T^3 дифеоморфно стандардном сферном раслојењу ST^*T^2 , а T^*T^2 као и свако котангентно раслојење допушта симплектичку структуру. У [29] Луц 1979. године конструише контактну структуру на T^5 , међутим, питање постојања контактне структуре на T^{2n+1} за $n \geq 3$ остаје неразрешено наредне двадесет три године. Тек након Жируовог доказа да свака контактна многострукост допушта контактну отворену књигу, Фредерик Буржоа доказује општије тврђење — ако M^{2n+1} допушта контактну структуру допушта је и $M^{2n+1} \times T^2$. Структуре које конструише постају познатије од питања које их је првобитно мотивисало и данас их називамо *Буржоаове контактне структуре*. Погледајмо о чему је реч.

У Поглављу 4.2 видели смо да свакој контактної отвореној књизи (B, π) на (M, ξ) , можемо придружити контактну форму α и дефинишуће пресликавање $f: M \rightarrow \mathbb{C}$, такве да $d\left(\frac{\alpha}{|f|}\right)$ дефинише идеалне Лиувилове структуре на страницама. Овакав пар (α, f) , зваћемо *репрезентацијом* контактне отворене књиге. У овој нотацији, дајемо благо уопштење аргумента из [4], које се појављује у [27].

Дефиниција 107. *Буржоаова контактна структура* придружена репрезентацији (α, f) , контактне отворене књиге (B, π) на (M, ξ) , у односу на стандардну оријентацију на T^2 дату са $d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$, дата је контактном формом

$$\tilde{\alpha} = \alpha + f_x d\varphi_1 - f_y d\varphi_2,$$

где је $f = f_x + if_y$, а (φ_1, φ_2) стандардне координате на $T^2 = S^1 \times S^1$.

Овако дефинисана контактна структура очигледно ће бити T^2 -инваријантна. Да бисмо оправдали дефиницију, односно доказали да је $\tilde{\alpha}$ заиста контактна форма, уведемо и следећи појам.

Дефиниција 108. Нека је (M, ξ) затворена контактна многострукост. *Буржоа–Биронелина контактна структура* $\tilde{\xi}$ на $M \times T^2$, која деформише контактну дистрибуцију $\xi \oplus TT^2$, је било која контактна структура добијена као језгро форме $\tilde{\alpha} = \alpha + \beta$, где је:

- (1) α контактна форма на (M, ξ) ,
- (2) $\beta|_{T(M \times \{z\})} \equiv 0$, за све $z \in T^2$,
- (3) $\beta|_{T(\{p\} \times T^2)}$ је затворена форма,
- (4) оријентација коју $\tilde{\alpha}$ индукује на $M \times T^2$ слаже се са оријентацијом производа.

Да бисмо видели да је свака Буржоа–Биронелина контактна структура хомотопна, кроз скоро-контактне структуре, са $(\xi \oplus TT^2, d\alpha + \eta)$, посматраћемо двопараметарске фамилије форми

$$\lambda_{\varepsilon, \delta} := \tilde{\alpha}_{\varepsilon} = \alpha + \varepsilon\beta, \quad \omega_{\varepsilon, \delta} := d\alpha_{\varepsilon} + \delta\eta.$$

Тада важи

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon, \delta} \wedge \omega_{\varepsilon, \delta}^{n+1} &= (\alpha + \varepsilon\beta) \wedge (d\alpha + \varepsilon d\beta + \delta\eta)^{n+1} \\ &= \tilde{\alpha}_{\varepsilon} \wedge (d\tilde{\alpha}_{\varepsilon})^{n+1} + (n+1)\delta\alpha \wedge (d\alpha)^n \wedge \eta. \end{aligned}$$

Услови (1)–(3) из Дефиниције 108 показују

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_\varepsilon \wedge (d\tilde{\alpha}_\varepsilon)^{n+1} &= \varepsilon^2(n+1) \left(\frac{n}{2}(d\beta)^2 \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} + \beta \wedge d\beta \wedge (d\alpha)^n \right) \\ &= \varepsilon^2 \tilde{\alpha} \wedge (d\tilde{\alpha})^{n+1}.\end{aligned}\quad (6.1)$$

Према томе, и $\tilde{\alpha}_\varepsilon \wedge (d\tilde{\alpha}_\varepsilon)^{n+1}$, и $\alpha \wedge (d\alpha)^n \wedge \eta$ су форме запремине на $M \times T^2$, а по услову (4) оне су истог знака. Закључујемо да је $(\ker \alpha_\varepsilon, \omega_{\varepsilon,\delta})$ скоро-контактна структура кад год ε и δ нису истовремено 0. Како је $\ker \alpha_0 = \xi \oplus TT^2$, жељена хомотопија дата је са

$$\delta_t = \omega_{1-t,t}, \quad t \in [0, 1].$$

Приметимо, додатно, да смо показали и да је $(\alpha_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ фамилија контактних форми, за које су, по Грејевој стабилности, $(\ker \alpha_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ контактоморфне.

Лема 109. Нека је (M, ξ) затворена контактна многострукост, димензије не мање од три. Претпоставимо да је $\tilde{\alpha} = \alpha + \beta$ једна 1-форма на $M \times T^2$, где α и β задовољавају услове (1)–(4) Дефиниције 108. Тада можемо записати

$$\tilde{\alpha} = \alpha + f_x d\varphi_1 - f_y d\varphi_2,$$

где је $f = f_x + if_y: M \times T^2 \rightarrow \mathbb{C}$ глатка функција, а (φ_1, φ_2) координате на T^2 . Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) $\tilde{\alpha}$ је контактна форма.

(2) За све $(\varphi_1, \varphi_2) \in T^2$, пар $(\alpha, f(\cdot, \varphi_1, \varphi_2))$ је репрезентација контактне отворене књиге на (M, ξ) .

Доказ. • (2) $\Rightarrow$ (1):

Из (6.1) знамо да је контактни услов за $\tilde{\alpha}$ дат са

$$(n+1) \left(\frac{n}{2}(d\beta)^2 \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} + \beta \wedge d\beta \wedge (d\alpha)^n \right) \neq 0.$$

Узевши у обзир $\beta = f_x d\varphi_1 - f_y d\varphi_2$, добијамо:

$$\begin{aligned}\beta \wedge d\beta &= \rho^2 d_M \theta \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2, \\ (d\beta)^2 &= 2\rho d_M \rho \wedge d_M \theta \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2,\end{aligned}$$

где је $f = \rho e^{i\theta}$, а d_M извод у M -правцима. Добијамо

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} \wedge (d\tilde{\alpha})^{n+1} &= (n+1) \left(n\rho d_M \rho \wedge d_M \theta \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \right. \\ &\quad \left. + \rho^2 d_M \theta \wedge (d\alpha)^n \right) \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2,\end{aligned}\quad (6.2)$$

што је управо запис у поларним координатама форме запремине на M , са датом Лиувилевом отвореном књигом, $\Omega_M = |f|^{n+2} d\theta \wedge d\left(\frac{\alpha}{|f|}\right)^n$. Закључујемо

$$\tilde{\alpha} \wedge (d\tilde{\alpha})^{n+1} = (n+1) \Omega_M \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \neq 0.$$

• (1) $\Rightarrow$ (2):

Фиксирајмо произвољно $z \in T^2$. Потребно је да покажемо:

(i) 0 је регуларна вредност пресликавања $p \mapsto f(p, z)$;

(ii) $B = \{p \in M \mid f(p, z) = 0\} \neq \emptyset$;

(iii) $\pi := \frac{f}{|f|}: M \setminus B \rightarrow S^1$ је фибрација;

(iv) $d\left(\frac{\alpha}{|f|}\right)$ дефинише идеалну Лиувилеву структуру на свакој страници.

По (6.2), користећи $f(p, z) = 0 \Leftrightarrow \rho(p, z) = 0$ и $\rho d_M \rho \wedge d_M \theta = d_M f_x \wedge d_M f_y$, закључујемо да $f(p, z) = 0$ повлачи $d_M f_x \wedge d_M f_y \neq 0$, односно, важи (i). Слично, на $M \setminus B$, $d\pi = 0 \Leftrightarrow d_M \theta = 0$, што је у контрадикцији са (6.2), дакле важи (ii). Да бисмо добили преостале услове рачунамо

$$\left(d_M\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)\right)^n = \frac{1}{\rho^{n+2}} (-n\rho d_M \rho \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} + \rho^2 (d\alpha)^n).$$

Приметимо да у (6.2), $d_M \theta$ можемо извући из заграде, тако да једначина поприма форму

$$(n+1) \rho^{n+2} \left(d_M\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)\right)^n \wedge d_M \theta \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \neq 0,$$

па како је страница дата са $\theta = \theta_0$, важи (iv). Коначно, да бисмо доказали (iii), претпоставимо да је $B = \emptyset$. Тада је свака страница, дата са $\theta = \theta_0$, затворена подмногострукост од M , димензије $2n$, на којој је дата симплектичка форма $d\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)$. За $n > 0$, Стоксова теорема даје контрадикцију. $\square$

Буржоаве контактне структуре добијамо у специјалном случају када одаберемо да f буде дефинишућа функција отворене књиге (B, π) на , дакле константно по координатама турса. У случају да је контактна отворена књига задата апстрактном отвореном књигом (P, φ) , претходно описаном конструкцијом добијену контактну структуру на $OB(P, \varphi) \times T^2$ означаваћемо са $BO(P, \varphi)$.

6.4 Неколико примера

Испоставља се да је дискусија о уопштењу Буржоаових контактних структура веома корисна за испитивање слабе попуњивости. Наиме, веома једноставно добијамо да се слаба попуњивост, са базне контактне многострукости, до на изотопију, преноси и на добијену Буржоаову многострукост.

Теорема 110. Нека је (V, ξ) контактна многострукост, слабо попуњена са (W, ω) , и нека је (B, π) било која контактна отворена књига на (M, ξ) . Придружена Буржоаова контактна структура на $V \times T^2$ изотопна је, тада, контакт-ној структури која се може слабо попуњити са $(W \times T^2, \omega + \eta)$, где је η форма запремине на T^2 .

Доказ. Посматрајмо фамилију модификованих Буржоаових форми α_ε из Дефиниције 107, те формирајмо фамилију полинома

$$P_\varepsilon(t) := \alpha_\varepsilon \wedge (t d\alpha_\varepsilon + \omega + \eta)^{n+1},$$

са коефицијентима у $\Omega^{2n+3}(V \times T^2)$. У складу са Дефиницијом 106, желимо да одредимо $\varepsilon > 0$, такво да је за све $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $P_\varepsilon(t) > 0$. Водећи члан овог полинома је

$$\alpha_\varepsilon \wedge (d\alpha_\varepsilon)^{n+1} t^{n+1} = \varepsilon^2 \alpha \wedge (d\alpha)^{n+1} t^{n+1},$$

односно, водећи коефицијент је 0 за $\varepsilon = 0$ и строго позитиван за $\varepsilon > 0$. За $\varepsilon = 0$ имамо

$$\begin{aligned} P_0(t) &= \alpha \wedge (t d\alpha + \omega + \eta)^{n+1} \\ &= (n+1) \alpha \wedge (t d\alpha + \omega)^n \wedge \eta, \end{aligned}$$

што је строго позитивно за $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, јер је (W, ω) слабо попуњење од (V, ξ) . Такође и водећи коефицијент, $\alpha \wedge (d\alpha)^n \wedge \eta$ је строго позитиван. Прелазак са P_0 на P_ε , $\varepsilon > 0$, представља малу пертурбацију коефицијената полинома, јер је P_ε глатко по ε . Како $\alpha \wedge (d\alpha)^n \wedge \eta t^n$ доминира остале чланове за довољно велико t , можемо одабрати $t_0 > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ тако да за све $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и $t > t_0$, важи $P_\varepsilon(t) > 0$. С друге стране, како је P_0 строго позитивно на компактном $[0, t_0]$, можемо одабрати и $\varepsilon_1 > 0$ такво да је $P_\varepsilon(t) > 0$ за све $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ и $t \in [0, t_0]$. Коначно, за било које $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ имамо $P_\varepsilon(t) > 0$, за све $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Последишно, $(W \times T^2, \omega + \eta)$ слабо попуњава $(V \times T^2, \ker \alpha_\varepsilon)$. $\square$

За један резултат о јакој попуњивости, размотримо следећу, природну декомпозицију једне класе контактних многострукости.

Дефиниција 111. Нека је дат идеални Лиувилев домен (V, ω) и нека је λ једна примитивна форма за ω , а u ненегативна функција са регуларним скупом нивоа $\{u = 0\} = \partial V$. Контактну многострукост $(V \times S^1, \ker(u dt + u\lambda))$ називамо *Жируовим доменом*.

Напомена 112. Овако дефинисана контактна структура, до на изотопију релативно у односу на границу, не зависи од избора u и λ , већ само од идеалне Лиувилеве структуре ω .

Посматрајмо S^1 -инваријантне контактне структуре на $V \times S^1$. Хиперповрши облика $V \times \{pt\}$ су тада конвексне, што видимо из чињенице да је, за S^1 -инваријантну контактну структуру, векторско поље ∂_θ , где је θ координата на S^1 , контактна и трансверзална на $V \times \{pt\}$. Као што је описано у Примеру 64, добијамо тада декомпозицију $V = V_+ \cup V_-$, на идеалне Лиувилеве домене V_+ и V_- , на којима је ∂_θ позитивно, односно негативно трансверзално на контактну структуру. Захваљујући S^1 -инваријантности, сада можемо видети да је $V \times S^1$ добијено лепљењем Жирових домена $V_+ \times S^1$ и $V_- \times S^1$ по заједничкој граници $\Gamma \times S^1$, где је $\Gamma = \partial V_+ = \partial V_-$, деобни скуп у $V \times \{pt\}$. У [5] доказан је следећи критеријум јаке попуњивости.

Теорема 113. Претпоставимо да $V^{2n} \times S^1$ допушта јако попуњиву, S^1 -инваријантну контактну структуру. Нека V_+ и V_- чине претходно описано конвексно цепање многострукости V , $\Gamma = \partial V_+ = \partial V_-$ деобни скуп, за који додатно претпостављамо да је повезан, и нека је (W^{2n+2}, ω) попуњење од $V \times S^1$. Посматрамо инклузије, као и индукована пресликавања у хомологији:

$$\Gamma \hookrightarrow V_\pm \hookrightarrow W,$$

$$H_*(\Gamma, \mathbb{Q}) \xrightarrow{I_\pm} H_*(V_\pm, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_*(W, \mathbb{Q}).$$

Тада, друга инклузија индукује инјективно пресликавање на $\text{Im}(I_\pm)$.

У случају Буржоаове конструкције, јасно, добијамо T^2 -инваријантну контактну структуру. Она је тада тривијално S^1 -инваријантна. Штавише, висок

степен експлицитности у тој конструкцији омогућава нам да веома прецизно опишемо претходно поменуто декомпозицију на Жирове домене. Фиксирајмо ознаке за сфере које чине торус, $T^2 = S_x^1 \times S_y^1$. Посматрамо контактнo векторско поље ∂_y , и хиперповрш $M \times S_x^1 \times \{y_0\}$. Функција u , из Примера 64, дата је, имајући у виду Дефиницију 107, са

$$u = (\beta + f_x dx - f_y dy)(\partial_y) = -f_y = -\rho \sin \theta,$$

где $\rho = |f|$ и $\theta = \arg(f)$ дају запис функције f у поларним координатама. Деобни скуп је тада

$$\Gamma = \{\rho \sin \theta = 0\} = \{\rho = 0\} \cup \{\theta = 0\} \cup \{\theta = \pi\} \subset M \times S_x^1 \times \{y_0\},$$

односно, унија страница P_0 и P_π , при декомпозицији отворене књиге (B, π) . Идеални Лиувилoви домени који дају декомпозицију хиперповрши $M \times S_x^1$ су:

$$V_+ = \overline{\{\sin \theta > 0\}} \times S_x^1, \quad V_- = \overline{\{\sin \theta < 0\}} \times S_x^1.$$

Можемо их схватити као по половину отворене књиге дате на M , помножену са S_x^1 . При кореспонденцији између конкретних и апстрактних отворених књига, описаној у Тврђењу 26, можемо видети да је, глатко, $V_\pm \cong P \times D^* S_x^1$, где је P страница одговарајуће апстрактне отворене књиге. Буржоаова контактна многострукост је ништа друго до два Жируова домена $V_+ \times S_y^1$ и $V_- \times S_y^1$, залепљена по својој заједничкој граници.

Напомена 114. T^2 -инваријантност Буржоаових контактних структура није нам ирелевантна. Она гарантује слободу при избору координата на торусу, специјално, за произвољну примитивну класу у $H_1(T^2, \mathbb{Z})$ можемо претпоставити да је представљена управо са S_x^1 . Најједноставнији начин да ово видимо је да посматрамо дифеоморфизам на $M \times T^2$, који фиксира тачке на M , а на T^2 је дат произвољним $A \in SL(2, \mathbb{Z})$

Теорема 115. Претпоставимо да је $(2n+1)$ -димензионална Буржоаова контактна многострукост $BO(P, \varphi)$, строго симплектички попуњена са (W, ω) . Тада, инклузија странице P , у попуњење W , дата са

$$P \hookrightarrow OB(P, \varphi) \times \{pt\} \hookrightarrow BO(P, \varphi) = \partial W \hookrightarrow W,$$

индукује инјективно пресликавање у рационалној хомологији. Такође, инклузија

$$T^2 \hookrightarrow BO(P, \varphi) \hookrightarrow W,$$

индукује инјективно пресликавање у рационалној хомологији.

Доказ. Имајући у виду претходну дискусију о индукованој декомпозицији Буржоаових многострукости, инклузију странице можемо видети као

$$P \hookrightarrow \Gamma \hookrightarrow V_{\pm} \cong P \times D^*S^1 \simeq P \times S^1,$$

па је она хомотопна инклузији фибре $P \times \{pt\}$ у $P \times S^1$. По Кинетовој формули, $H_*(V_{\pm}) \cong H_*(P) \otimes H_*(S^1)$, па $P \hookrightarrow \Gamma$ индукује инјективно пресликавање у рационалној хомологији. Тврђење тада следи директно из Теореме 113. На идентичан начин видимо да је и инклузија $S_x^1 \hookrightarrow W$ инјективна у рационалној хомологији.

Даље,

$$\begin{aligned} H_1(T^2, \mathbb{Z}) &\longrightarrow H_1(T^2, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \cong H_1(T^2, \mathbb{Q}) \\ a &\longmapsto a \otimes 1 \end{aligned}$$

је инјективно, те како по Напомени 114, S_x^1 може бити одабрано тако да представља било коју произвољну примитивну класу у хомологији, закључујемо да је индуковано пресликавање $H_1(T^2, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(W, \mathbb{Q})$ инјективно. По теорему о универзалним коефицијентима за кохомологију, имамо да је $H_*(T^2, \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(W, \mathbb{Q})$ инјективно ако и само ако је $H^*(T^2, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(W, \mathbb{Q})$ сурјективно. Ово следи из инјективности на H_1 , на основу структуре кап производа на $H^*(T^2, \mathbb{Q})$. $\square$

Да бисмо искористили претходна тврђења да произведемо пример слабо, али не и јако попуњиве контактне многострукости произвољне димензије, вратимо се на појам стабилизације који смо видели у Примеру 40. Наиме, важи следеће тврђење.

Теорема 116. Нека је $(M, \xi) = OB(W, \lambda, \Psi)$ и D било који Лагранжев диск у (W, λ) са Лежандровом границом $\partial D \subset (\partial W, \ker \lambda)$. Такође, са (S^{2n+1}, ξ_-) означимо контактну структуру $OB(D^*S^n, \tau^{-1})$, где је τ^{-1} инверз Ден–Зајделовог увртања из Примра 40. Тада су многострукости добијене позитивном и негативном стабилизацијом дуж D дифеоморфне са M . Позитивна стабилизација је контактоморфна са (M, ξ) , а негативна са контактном повезаном сумом $(M \# S^{2n+1}, \xi \# \xi_-)$.

Доказ ове теореме следи из општијег тврђења, везаног за другачију конструкцију, коју зовемо *контактна Мирасагијева сума*. Она се састоји од две контактне многострукости $(M_i, \xi_i) = OB(W_i, \lambda_i, \Psi_i)$ и два Лагранжева диска $D_i \subset W_i$, са Лежандровим границама у ∂W_i , $i = 1, 2$. Тада, на основу теореме о околини Лагранжевих подмногострукости можемо направити идентификације

$$(U_i, D_i, \lambda_i|_{U_i}) \cong \left(D^n \times D^n, D^n \times \{0\}, \lambda = \sum_{j=1}^n x_j dy_j - y_j dx_j \right),$$

те формирати нови Лиувилев домен, идентификујући U_1 и U_2 кроз $(x_j, y_j) \mapsto (y_j, -x_j)$ да бисмо добили (W, λ) . Монодрому на (W, λ) задајемо са $\Psi_2 \circ \Psi_1$, где подразумевамо да смо дате Ψ_1, Ψ_2 продужили идентитетом ван њихових компактних носача у $W_1, W_2 \subset W$. Контактну многострукост

$$OB(W, \lambda, \Psi_2 \circ \Psi_1),$$

тада зовемо контактном Мирасагијевом сумом од $OB(W_1, \lambda_1, \Psi_1)$ и $OB(W_2, \lambda_2, \Psi_2)$.

Теорема 117. Описана конструкција контактне Мирасагијеве суме индукује контактну повезану суму, прецизније

$$OB(W, \lambda, \Psi_2 \circ \Psi_1) \cong (M_1 \# M_2, \xi_1 \# \xi_2).$$

Доказ. Видети Тврђење 2.6 у [7]. □

Доказ се своди на дефинисање раздвајајуће сфере S . Ради интуиције, објашњавамо овај корак. Унутар $M = OB(W, \lambda, \Psi_2 \circ \Psi_1)$, околина повеза O дата је са $O = \partial W \times D^2$. Торус пресликавања $\Psi_2 \circ \Psi_1$, можемо видети као лепљење двеју контактизација

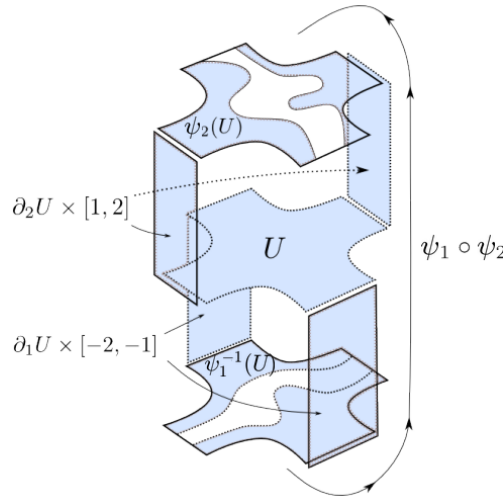
$$M \setminus O = \left(W \times ([-2, -1] \cup [1, 2]) \right) \Big/_{\substack{(x, -1) \sim (\Psi_1(x), 1), \\ (x, 2) \sim (\Psi_2(x), -2)}}$$

Са U означимо идентификоване U_1 и U_2 унутар W . Тада границу од U можемо поделити на $\partial_1 U$ и $\partial_2 U$, где је $\partial_i U = (\partial D_i) \times D^n$, део границе од U садржан у контактної граници странице W_i , који Ψ_i фиксира тачка по тачка. Раздвајајућу сферу можемо дефинисати као скуп

$$S = (U \times \{-2\}) \cup (U \times \{1\}) \cup (\partial_1 U \times [-2, -1]) \cup (\partial_2 U \times [1, 2]) \cup ((U \cap \partial W) \times \partial D^2),$$

при чему је заиста реч о сфери јер по претходно описаним идентификацијама имамо $U \times \{-2\} = \Psi_2^{-1}(U) \times \{2\}$ и $U \times \{1\} = \Psi_1^{-1}(U) \times \{-1\}$, док Ψ_1 фиксира $\partial_1 U$, а Ψ_2 фиксира $\partial_2 U$, тачка по тачка.

Лепљење које чини да ови сегменти заиста представљају сферу приказано је на слици 6.1, где је доњи „поклопац”, $U \times \{-2\}$, представљен са $\Psi_1^{-1}(U) \times \{-2\}$ (ово има смисла управо због малопређашњег коментара о $\Psi_1|_{\partial_1 U} = \text{id}$), а његова копија $\Psi_2(U) = \Psi_2 \circ \Psi_1(\Psi_1^{-1}(U))$, нацртана је на нивоу 2, тако да као за $\partial_1 U \times [-2, -1]$, буде јасно шта је други „поклопац” за $\partial_2 U \times [1, 2]$.



Слика 6.1: Раздвајајућа сфера

Из описа стабилизације датог у Примеру 40, јасно је да су позитивна и негативна стабилизација ништа друго до контактне Мирасагијеве суме са $(S^{2n+1}, \xi_{std}) = OB(D^*S^n, \tau)$ и $(S^{2n+1}, \xi_-) = OB(D^*S^n, \tau^{-1})$ редом, одакле следи доказ Теореме 116.

Пример 118. Посматрајмо контактну многострукост $(M, \xi) = OB(W, \varphi)$. Њену контактну повезану суму са $(S^{2n+1}, \xi_{std}) = OB(D^*S^n, \tau)$, где је τ позитивно Ден–Зајделово увртање, називамо њеном позитивном стабилизацијом. До на контактоморфизам, позитивном стабилизацијом, ништа се не мења. Стога, ако је (M, ξ) слабо попуњиво, на основу Теореме 110, и $OB(W_+, \varphi_+)$ је слабо попуњиво. С друге стране, уколико искористимо Теорему 117, да разма-трање пребацимо у контекст Мирасагијевих сума, можемо видети да је сфера која се додаје приликом стабилизације, премда нонула у хомологији нове

странице W_+ , нула у хомологији $M \# S^{2n+1} = M$, јер цела лежи у контактної лопти $D^{2n+1} = S^{2n+1} \setminus D$, где је D Дарбуова лопта извађена из S^{2n+1} , да би се конструисала повезана сума. Инклузија странице не може, дакле, индуковати инјективно пресликавање у хомологији, те по Теорему 115, $OB(W_+, \varphi_+)$ није јако попуњива контактна многострукост.

За крај, наводимо и један резултат, чији се значај огледа у нади коју улива пред истраживања која следе. Речима Џонатана Боудена [42]: „Уколико не разумемо сферу, како да разумемо било шта?”

У [2] доказано је да су све контактне структуре добијене Буржоавом конструкцијом затегнуте. Овај резултат може се искористити за проналажење многих затегнутих структура, које нису јако попуњиве, те допринети дубљем разумевању различитих класа вишедимензионалних контактних многострукости. Тако, у [6], користећи изузетно лепу технику да сузбију топологију торуса у $S^{2n-1} \times T^2$, аутори показују следеће тврђење:

Теорема 119. (Теорема Б у [6]) За све $n \geq 2$, сфера S^{2n+1} допушта затегнуту, не јако попуњиву контактну структуру.

Литература

- [1] P. Albers, U. Fuchs, and W. J. Merry, *Orderability and the Weinstein Conjecture*, Compos. Math. 151, 2251–2272, 2015.
- [2] R. Avdek and Z. Zhou, *Bourgeois' Contact Manifolds are Tight*, Preprint, arXiv:2404.16311, 2024.
- [3] M. S. Borman, Y. Eliashberg, and E. Murphy, *Existence and Classification of Overtwisted Contact Structures in All Dimensions*, Acta Math. 215, 281–361, 2015.
- [4] F. Bourgeois, *Odd Dimensional Tori are Contact Manifolds*, Int. Math. Res. Not. 2002, no. 30, 1571–1574, 2002.
- [5] J. Bowden, F. Gironella, and A. Moreno, *Bourgeois Contact Structures: Tightness, Fillability and Applications*, Invent. Math. 230, 713–765, 2022.
- [6] J. Bowden, F. Gironella, A. Moreno, and Z. Zhou, *Tight Contact Structures without Symplectic Fillings are Everywhere*, Preprint, arXiv:2211.03680, 2026.
- [7] R. Casals and E. Murphy, *Contact Topology from the Loose Viewpoint*, Proceedings of the 22nd Gökova Geometry-Topology Conference, 81–115, International Press, Somerville, MA, 2016.
- [8] R. Casals, E. Murphy, and F. Presas, *Geometric Criteria for Overtwistedness*, J. Amer. Math. Soc. 32, 563–604, 2019.
- [9] R. Casals, D. M. Pancholi, and F. Presas, *Almost Contact 5-Manifolds are Contact*, Ann. Math. (2) 182, 429–490, 2015.
- [10] Y. Chekanov, O. van Koert, and F. Schlenk, *Minimal Atlases of Closed Contact Manifolds*, New Perspectives and Challenges in Symplectic Field Theory, 73–112, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

- [11] K. Cieliebak and Y. Eliashberg, *From Stein to Weinstein and Back. Symplectic Geometry of Affine Complex Manifolds*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [12] K. Cieliebak, Y. Eliashberg, and N. Mishachev, *Introduction to the h -Principle*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2024.
- [13] S. Courte and P. Massot, *Contactomorphism Groups and Legendrian Flexibility*, Preprint, arXiv:1803.07997, 2018.
- [14] S. K. Donaldson, *Symplectic Submanifolds and Almost-Complex Geometry*, J. Differential Geom. 44, 666–705, 1996.
- [15] ———, *Lefschetz Pencils on Symplectic Manifolds*, J. Differential Geom. 53, 205–236, 1999.
- [16] Y. Eliashberg, *Classification of Overtwisted Contact Structures on 3-Manifolds*, Invent. Math. 98, 623–637, 1989.
- [17] Y. Eliashberg, S. S. Kim, and L. Polterovich, *Erratum to “Geometry of Contact Transformations and Domains: Orderability Versus Squeezing”*, Geom. Topol. 13, 1175–1176, 2009.
- [18] Y. Eliashberg and L. Polterovich, *Partially Ordered Groups and Geometry of Contact Transformations*, Geom. Funct. Anal. 10, 1448–1476, 2000.
- [19] H. Geiges, *Contact Structures on 1-Connected 5-Manifolds*, Mathematika 38, 303–311, 1991.
- [20] ———, *An Introduction to Contact Topology*, Cambridge University Press, 2008.
- [21] E. Giroux, *Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures*, Proceedings of the ICM, Beijing II, 405–414, 2002.
- [22] ———, *Ideal Liouville Domains, a Cool Gadget*, J. Symplectic Geom. 18, 769–790, 2020.
- [23] M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [24] J. Hedicke, *Lorentzian Distance Functions in Contact Geometry*, J. Topol. Anal. 16, 205–225, 2024.

- [25] J. Heddicke and E. Shelukhin, *Non-Orderability and the Contact Hofer Norm*, Preprint, arXiv:2411.19887, прихваћено за објављивање у Duke Mathematical Journal.
- [26] Lee, John M., *Introduction to Smooth Manifolds*, 2013.
- [27] S. Lisi, A. Marinković, and K. Niederkrüger, *On Properties of Bourgeois Contact Structures*, Algebr. Geom. Topol. 19, 3409–3451, 2019.
- [28] R. Lutz, *Structures de Contact sur les Fibrés Principaux en Cercles de Dimension Trois*, Ann. Inst. Fourier 27, 1–15, 1977.
- [29] ———, *Sur la Géométrie des Structures de Contact Invariantes*, Ann. Inst. Fourier 29, 283–306, 1979.
- [30] A. Marinković and M. Pabiniak, *On Displaceability of Pre-Lagrangian Toric Fibers in Contact Toric Manifolds*, Int. J. Math. 27, 2016.
- [31] P. Massot, K. Niederkrüger, and C. Wendl, *Weak and Strong Fillability of Higher Dimensional Contact Manifolds*, Invent. Math. 192, 287–373, 2013.
- [32] D. McDuff, *Symplectic Manifolds with Contact Type Boundaries*, Invent. Math. 103, 651–671, 1991.
- [33] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford University Press, Oxford, 2016.
- [34] R. B. Melrose, *Introduction to Analysis on Singular Spaces*, Белешке са предавања, доступно на: <https://math.mit.edu/~rbm/InSisp/InSiSp.pdf>.
- [35] J.-P. Mohsen, *Quantitative Transversality in Symplectic Geometry: Sub-Varieties and Hypersurfaces*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. (6) 28, 655–706, 2019.
- [36] E. Murphy, *Loose Legendrian Embeddings in High Dimensional Contact Manifolds*, Preprint, arXiv:1201.2245, 2012.
- [37] L. Nakamura, *Small-Energy Isotopies of Loose Legendrian Submanifolds*, Geom. Topol. 28, 4233–4255, 2024.

- [38] K. Niederkrüger, *The Plastikstufe – a Generalization of the Overtwisted Disk to Higher Dimensions*, *Algebr. Geom. Topol.* 6, 2473–2508, 2006.
- [39] P. Popescu-Pampu, *An Introduction to Real Oriented Blowups in Toric, Toroidal and Logarithmic Geometries*, Preprint, arXiv:2507.11982, 2025.
- [40] F. Presas, *Geometric Decompositions of Almost Contact Manifolds*, *Contact and Symplectic Topology*, 137–172, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2014.
- [41] E. Shelukhin, *The Hofer Norm of a Contactomorphism*, *J. Symplectic Geom.* 15, 1173–1208, 2017.
- [42] L. Sloman, *In the ‘Wild West’ of Geometry, Mathematicians Redefine the Sphere*, *Quanta Magazine*, 7. Новембар 2023, доступно на: <https://www.quanta-magazine.org/in-the-wild-west-of-geometry-mathematician-s-redefine-the-sphere-20231107/>.
- [43] W. P. Thurston and H. E. Winkelnkemper, *On the Existence of Contact Forms*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 52, 345–347, 1975.
- [44] L. W. Tu, *Differential Geometry. Connections, Curvature, and Characteristic Classes*, Springer, Cham, 2017.
- [45] I. Uljarević, *A Survey on Orderability and Contact Non-Squeezing*, Preprint, arXiv:2504.12061, *Celebratio Mathematica* volume for Y. Eliashberg, 2025.
- [46] O. van Koert, *Lecture Notes on Stabilization of Contact Open Books*, *Münster J. Math.* 10, 425–455, 2017.
- [47] A. Weinstein, *Contact Surgery and Symplectic Handlebodies*, *Hokkaido Math. J.* 20, 241–251, 1991.
- [48] N. M. J. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Clarendon Press, Oxford, 1997.